

Modelos Lineares com metriz de Planejamento de Posto

Completo

3.1- Introdução

Um modelo linear geral é dado por

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_K x_K + \epsilon$$

Y e ϵ variáveis aleatórias

$x_1, x_2, \dots, x_K$ variáveis não aleatórias

Y - variável resposta ou variável dependente

$x_1, x_2, \dots, x_K$ - variáveis independentes, explicativas ou preditoras

Ex: Y - renda de um indivíduo

x_1 - número de anos de escolaridade

x_2 - idade

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

Suposição usual: $E(\epsilon) = 0 \Rightarrow$

$$E(Y | x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

de indivíduos

→ Renda média da população com x_1 anos de escolaridade e x_2 anos de idade

$$Y = E(Y | x_1, x_2) + \epsilon \rightarrow \begin{array}{l} \text{Variação entre indivíduos} \\ \text{Variáveis externas não incluídas} \end{array}$$

↓
renda média do indiv. com sua escolaridade e idade

Tomada uma amostra de n observações

$$(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i) \quad i=1, 2, \dots, n$$

o modelo linear geral é definido como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$n > k+1$$

onde

- i) y_i v.a. observável
- ii) x_{ji} v. não aleatórias fixadas
- iii) $\beta_j, j=0, 1, 2, \dots, k$ parâmetros
- iv) ϵ_i v.a. não observáveis, $\text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_l) = \delta_{il},$
 $i, l=1, 2, \dots, n$

$$E(\epsilon_i) = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \dots + \beta_k x_{k1} + \epsilon_1 \\ \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \dots + \beta_k x_{kn} + \epsilon_n \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\underline{y} = X \underline{\beta} + \underline{\epsilon},$$

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & & x_{kn} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad 60$$

onde

- (1) $\underset{\sim}{Y}$ é um vetor aleatório observável $n \times 1$
- (2) X é uma matriz $n \times (k+1)$ de valores observáveis fixos
 $n > k+1$ (os elementos de X não são variáveis aleatórias)
 X : matriz de planejamento
- (3) $\underset{\sim}{\beta}$ é um vetor $(k+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos,
 definido num espaço paramétrico $\Omega_{\underset{\sim}{\beta}}$
- (4) $\underset{\sim}{\epsilon}$ é um vetor aleatório não observável com
 $E(\underset{\sim}{\epsilon}) = \underset{\sim}{0} \quad \text{Var}(\underset{\sim}{\epsilon}) = \Sigma$

Este modelo admite vários casos especiais dependendo de

- i) a distribuição de $\underset{\sim}{\epsilon}$
- ii) a estrutura de covariância definida na matriz Σ
- iii) O posto e a estrutura da matriz X

$n > k+1 \quad r(X) = n$ - de colunas linearmente independentes
 de X

Se $r(X) = k+1$, X é de posto completo

Neste tópic, trabalharemos com modelo, com matriz de planejamento de posto completo, nos seguintes casos.

61

Caso 1: $\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$ σ^2 desconhecido

Caso 2: $\underline{\epsilon}$ tem uma distribuição n -variada qualquer
com $E(\underline{\epsilon}) = \underline{0}$ e $\text{Var}(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 I_n$, σ^2 desconhecido

Caso 3: $\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \sigma^2 V)$ V matriz $n \times n$ conhecida

Caso 4: $\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \Sigma)$ Σ desconhecido

3.2 - Inferências - caso 1

Modelo Linear Geral

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

$$\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n) \quad \sigma^2 \text{ desconhecido, } r(X) = k+1$$

completo

$\Downarrow$

$$\underline{Y} \sim N_n(X\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$$

$$E(\underline{Y} | X) = X\underline{\beta}$$

$$E(Y_i | \underline{X}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} = \underline{X}_i \underline{\beta}$$

onde $\underline{X}_i$ é a i -ésima linha de X , $i = 1, 2, \dots, n$

$$i) E(\underline{\epsilon}) = \underline{0} \Rightarrow E(\epsilon_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$ii) \text{Var}(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 I_n \Rightarrow$$

$$\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 \quad \forall i \quad (\text{suposição de homocedasticidade})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_l) = 0 \quad i \neq l$$

Como $\underline{\epsilon} \sim N_n$ então ϵ_i, ϵ_l são v.a. independentes

$$iii) \underline{\epsilon} \sim N_n \Rightarrow \epsilon_i \sim N_1$$

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad i=1, 2, \dots, n$$

Todo modelo que puder ser escrito na forma $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$ é dito linear.

Ex: O modelo de regressão polinomial

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_K X^K + \epsilon$$

é linear nos parâmetros, é um caso particular de

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon} \quad \text{para } x_1 = X \quad x_2 = X^2 \dots x_K = X^K$$

$$\text{Modelo não linear } Y = \theta_1 e^{\theta_2 X} + \epsilon$$

a) estimação de β

o parâmetro

$$E(Y_i | X_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} = X_i \beta$$

será estimado por

$$E(\hat{Y}_i | X_i) = X_i \hat{\beta} = \hat{Y}_i \quad \hat{\beta} = [\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \dots \quad \hat{\beta}_k]' \text{ estimador de } \beta$$

Prever o valor de $Y_i | X_i$ por $E(\hat{Y}_i | X_i) = X_i \hat{\beta} = \hat{Y}_i$

$$= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

$$\therefore \hat{Y}_i \begin{cases} \text{estimador de } E(Y_i | X_i) \\ \text{previsor de } Y_i | X_i \end{cases}$$

Resíduo: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad i=1, 2, \dots, n$

erro cometido por prever Y_i por $\hat{Y}_i$, $i=1, 2, \dots, n$

vetor de Resíduos: $\underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 - \hat{Y}_1 \\ Y_2 - \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ Y_n - \hat{Y}_n \end{bmatrix} = \underline{Y} - \hat{\underline{Y}}$

$$\hat{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = X \hat{\underline{\beta}}$$

Estimadores de Mínimos Quadrados de $\underline{\beta}$

minimize $S = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \underline{e}' \underline{e} = (\underline{y} - \hat{\underline{y}})' (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) =$

$$= (\underline{y} - X \hat{\underline{\beta}})' (\underline{y} - X \hat{\underline{\beta}}) = \underbrace{\underline{y}' \underline{y}}_{1 \times n \quad n \times 1} - \underbrace{\underline{y}' X \hat{\underline{\beta}}}_{n \times (k+1) \quad (k+1) \times 1} - \underbrace{\hat{\underline{\beta}}' X' \underline{y}}_{(k+1) \times n \quad n \times 1} + \hat{\underline{\beta}}' X' X \hat{\underline{\beta}}$$

escalar

$$= \underline{y}' \underline{y} - 2 \underline{y}' X \hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\beta}}' X' X \hat{\underline{\beta}}$$

$$f(\underline{x}) = \underline{a}' \underline{x} \Rightarrow \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{a}$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}' A \underline{x} \Rightarrow \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = 2A \underline{x}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\underline{\beta}}} = -2X' \underline{y} + 2X' X \hat{\underline{\beta}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow X' X \hat{\underline{\beta}} = X' \underline{y} \quad \text{sistema de equações normais}$$

$$r(X) = K+1 \Rightarrow r(X'X) = K+1 \Rightarrow X'X \text{ é de posto completo } (K+1)$$

$$\exists (X'X)^{-1}$$

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X'X)^{-1}}_{(K+1) \times (K+1)} \underbrace{X'Y}_{n \times 1} = \hat{\beta}_0 \text{ estimadora de mínimos quadrados de } \beta \text{ de } \hat{\beta}_K$$

Ex:

i	renda Y	anos de escolaridade X ₁	Idade X ₂
1	10	6	28
2	20	12	40
3	17	10	32
4	12	8	36
5	11	9	34

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 28 \\ 1 & 12 & 40 \\ 1 & 10 & 32 \\ 1 & 8 & 36 \\ 1 & 9 & 34 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 45 & 170 \\ 45 & 425 & 1562 \\ 170 & 1562 & 5860 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{2880} \begin{bmatrix} 50656 & 1840 & -1960 \\ 1840 & 400 & -160 \\ -1960 & -160 & 100 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 70 \\ 665 \\ 2430 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 56 \\ 50 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{56}{24} + \frac{50}{24} x_1 - \frac{5}{24} x_2 = 2,3 + 2,1 x_1 - 0,2 x_2$$

$x_1 = 7$ $x_2 = 30$ $\hat{y} = 10,7$ estimativa da renda média 7 anos esol/
30 anos idade
previsão da renda de um indivíduo
c/ 7 anos esol / 30 anos

O método de min. quadrados não exige conhecimento da distrib. dos ϵ .

Estimadores de Máxima Verossimilhança de β

$$y | X \sim N_n(X\beta, \sigma^2 I)$$

Função de Verossimilhança:

$$L(\beta, \sigma^2 | y_1, y_2, \dots, y_n, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{kn})$$

$$= L(\beta, \sigma^2 | y, X) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta) \right]$$

$$\log L = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y'y - 2y'X\beta + \beta'X'X\beta)$$

$$\Omega = \{(\beta, \sigma^2) \mid \sigma^2 > 0 \quad -\infty < \beta_j < \infty \quad j = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{2}{2\sigma^2} (X' y - X' X \beta) = 0_{(k+1) \times 1}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\beta)' (y - X\beta) = 0$$

$$\hat{\beta}_{mv} = (X'X)^{-1} X' y$$

$$-n\hat{\sigma}^2 + (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) = 0$$

$$\hat{\sigma}_{mv}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \rightarrow \text{ soma de quadrados dos resíduos }$$

b) ~~formas de Quadrados~~ depois

SSE $\rightarrow$ soma de quadrados dos resíduos

$$SSE = (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) = y'y - 2y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} =$$

$X'y$

$$y'y - \hat{\beta}' X' y = \text{ Pode ser escrita como uma forma quadrática em } y$$

$$SSE = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'[I - X(X'X)^{-1}X']y$$

b) Propriedades de $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' \underset{\substack{\downarrow \\ (k+1) \times n}}{Y} = A \underset{\substack{\downarrow \\ n \times 1}}{Y}$$

i) $\hat{\beta}$ é linear em Y

$$ii) E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1} X' Y] = (X'X)^{-1} X' E(Y) = (X'X)^{-1} X' X \beta = \beta$$

$$iii) \text{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X' \text{Var}(Y) X (X'X)^{-1} = \\ (X'X)^{-1} X' \sigma^2 I X (X'X)^{-1} = (X'X)^{-1} \sigma^2$$

$$iv) \hat{\beta} \sim N_{k+1}(\beta, (X'X)^{-1} \sigma^2) \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, a_{jj} \sigma^2)$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) = a_{ij} \sigma^2$$

$$\hat{\beta}_i \text{ e } \hat{\beta}_j \text{ são v.a. independentes} \Leftrightarrow a_{ij} = 0$$

Exemplo

68

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} \end{bmatrix} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad X'X = \begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{\det(X'X)} \left[\text{Cof}(X'X) \right]' = \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

$$X' \underline{y} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\underline{\beta}} = \frac{1}{n s_{xx}} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\text{Var}(\hat{\underline{\beta}}) = (X'X)^{-1} \sigma^2 = \frac{1}{n s_{xx}} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2 \quad \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\sum x_i}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2$$

$$\hat{\underline{\beta}} \sim N_2, \text{ i.e. } \hat{\beta}_0 \text{ e } \hat{\beta}_1 \text{ são independentes} \iff \sum x_i = 0$$

c) Somas de Quadrados (modelo com intercepto)

69

SSE - soma de quadrados dos resíduos

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = (\underline{y} - X\hat{\beta})'(\underline{y} - X\hat{\beta}) = \underline{y}'\underline{y} - 2\underline{y}'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$= \underline{y}'\underline{y} - \hat{\beta}'X'\underline{y}$$

Forma Quadrática em $\underline{y}$

$$SSE = \underline{y}'\underline{y} - \underline{y}'X(X'X)^{-1}X'\underline{y} = \underline{y}'[I - X(X'X)^{-1}X']\underline{y}$$

SST - soma de quadrados total (corrigida pela média)

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \underline{y}'\underline{y} - \frac{\underline{y}'\underline{1}\underline{1}'\underline{y}}{n} =$$

$$\underline{1}' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times n}$$

$$= \underline{y}'\left[I - \frac{\underline{1}\underline{1}'}{n}\right]\underline{y}$$

SSR - soma de quadrados da regressão

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum \hat{y}_i^2 - 2\bar{y} \sum \hat{y}_i + n\bar{y}^2$$

Resultado 1

Em todo modelo de regressão linear com intercepto

$$\underset{\sim}{1}' X (X' X)^{-1} X' = \underset{\sim}{1}'$$

Prova:

usando

$$X' X (X' X)^{-1} X' = X'$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & & x_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1} & X_1 \end{bmatrix}$$

Particionando X' :

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}' \\ X_1' \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{1}' : 1 \times n$$

$$X_1' : k \times n$$

mesmas dim

$$X' X (X' X)^{-1} X' = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}' \\ X_1' \end{bmatrix} X (X' X)^{-1} X' = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}' X (X' X)^{-1} X' \\ X_1' X (X' X)^{-1} X' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}' \\ X_1' \end{bmatrix}$$

$\uparrow$
 X'

Portanto: $\underset{\sim}{1}' X (X' X)^{-1} X' = \underset{\sim}{1}'$

Resultado 2

$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{em todo modelo de regressão linear com}$$

intercepto $\left\{ \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0 \right\}$

Prova:

$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{\hat{y}} = \underset{\sim}{1}' X (X' X)^{-1} X' \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{1}' \underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$\underset{\sim}{1}'$

Consequência 1

$$SSR = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n \bar{y}^2 =$$

$$\hat{\beta}' X' y - n \bar{y}^2$$

↳ fórmula mais conhecida para cálculos

Prova:

$$\sum \hat{y}_i = \sum y_i = n \bar{y}$$

$$\therefore SSR = \sum \hat{y}_i^2 - 2 n \bar{y}^2 + n \bar{y}^2 = \boxed{\sum \tilde{y}_i^2 - n \bar{y}^2}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{\beta}' X'}}{\tilde{y}'} \tilde{y} - n \bar{y}^2 = \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} - n \bar{y}^2 = \boxed{\hat{\beta}' X' y - n \bar{y}^2}$$

$\downarrow$
 $(X'X)^{-1} X' y$

Consequência 2

$$SSR = y' \left[X(X'X)^{-1}X' - \frac{1 \cdot 1'}{n} \right] y$$

Prova:

$$SSR = \hat{\beta}' X' y - n \bar{y}^2 = y' X (X'X)^{-1} X' y - y' \frac{1 \cdot 1'}{n} y$$

$$= y' \left[X(X'X)^{-1}X' - \frac{1 \cdot 1'}{n} \right] y$$

Consequência 3

$$SST = SSR + SSE$$

↳ ver as somas escritas como formas quadráticas

$$SST = SSR + SSE$$

72

↓
Parte da Variabilidade em Y que a equação de regressão não consegue explicar

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

↓
fixa, independente do modelo

Quanto γ , maior a diferença entre

$$\hat{Y} = \bar{Y}$$

e

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \dots + \hat{\beta}_K X_K, \text{ menor}$$

$\sum e_i^2$, mais motivos para usar $X_1, X_2, \dots, X_K$

$\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ pode ser encarada como a soma de quadrados do resíduo do modelo $\hat{Y} = \bar{Y}$

$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ - soma de quadrados do resíduo do modelo

$$\hat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{X} \hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$\therefore$, SSR - redução na soma de quadrados do resíduo com a introdução de $X_1, X_2, \dots, X_K$ no modelo

Def

O quociente $R^2 = \frac{SSR}{SST}$ é chamado coeficiente de ex-

pliação do modelo ou coeficiente de correlação múltipla.

$$0 \leq R^2 \leq 1$$