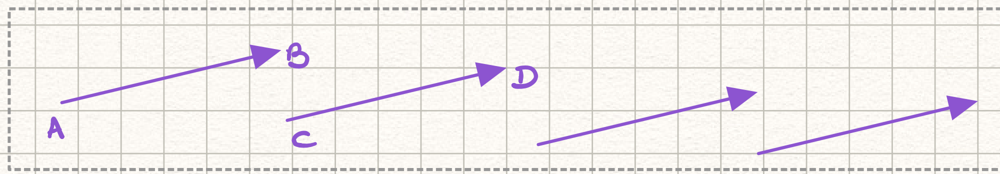
30/04/2021

SOs Equipolentes:

Mesmos $\begin{cases} \text{módulo} \\ \text{direção} \\ \text{sentido} \end{cases}$

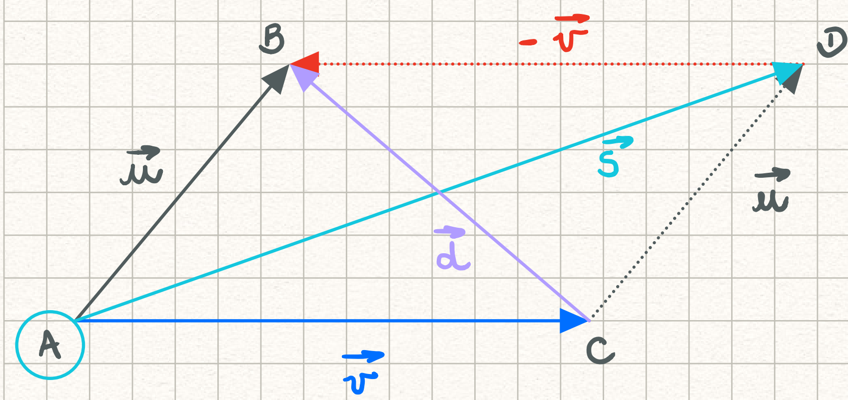


Notação: $AB \sim CD$

Vetor: $\vec{v}$

Conjunto de todos os SOs equipolentes a um SO conhecido.

Soma de Vetores:



Paralelogramo:

$$\vec{s} = \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{d} = \vec{CB} = \underbrace{\vec{u} - \vec{v}}_{\vec{u} + (-\vec{v})}$$

Multiplicação de um Vetor por um Escalar: $\vec{p} = k\vec{v}$

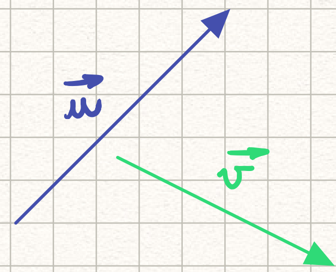
k ... escalar $\begin{cases} \text{altera} \begin{cases} \text{módulo do vetor} \\ \text{sentido do vetor} \end{cases} \\ \text{não altera} - \text{direção do vetor} : \vec{p} \parallel \vec{v} \end{cases}$

Dependência Linear:

$$\underbrace{\boxed{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n}}_{CL} = \vec{0} \quad \begin{cases} \exists\, a_i \neq 0 \longrightarrow LD \\ \text{somente } a_i = 0 \longrightarrow LI \end{cases}$$

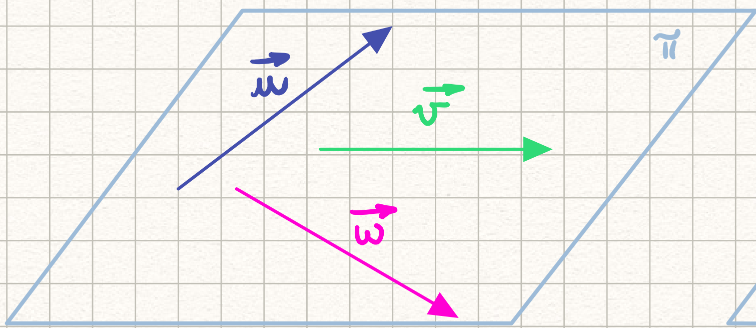
2 vetores LD

são paralelos

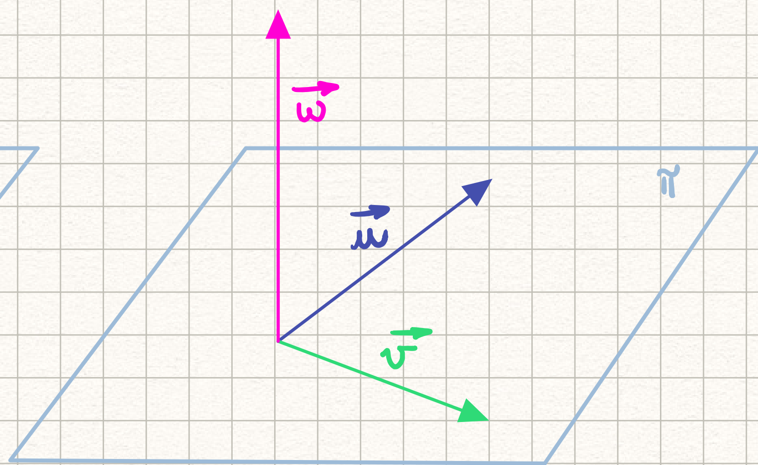


2 vetores LI

não são paralelos



3 vetores LD são coplanares



3 vetores LI não são coplanares

4. VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Slide 05

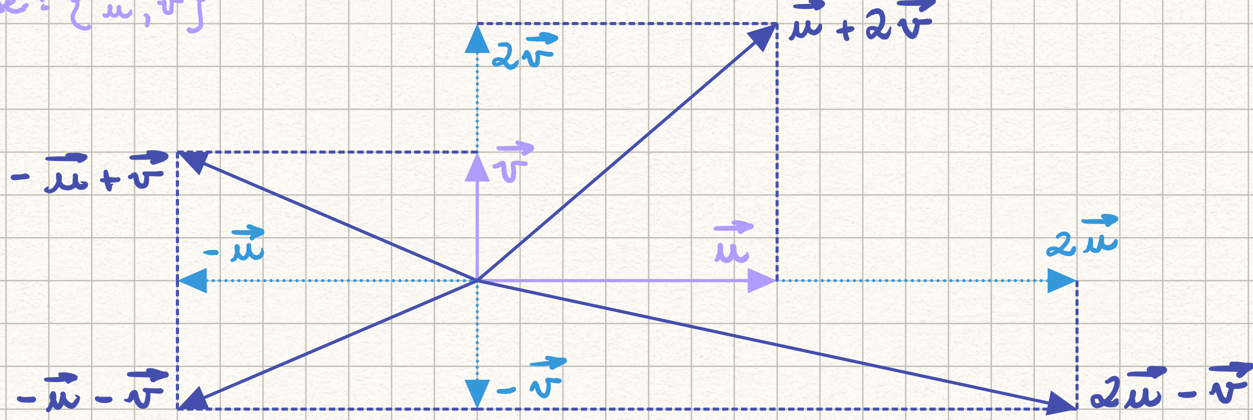
Base é o menor subconjunto de vetores capaz de gerar todos os outros vetores do conjunto ao qual pertence.

Gerar → todos os vetores de um conjunto podem ser escritos como CL dos vetores da base.

↓

soma de vetores, ponderada pelos coeficientes a_i

Base: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$



TEOREMA II :

Suponha que $\vec{w}$ pode ser escrito de maneiras distintas como CL dos vetores da base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \quad e \quad \vec{w} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2$$

Mas, $\vec{w} = \vec{w}$, portanto:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2$$

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\text{escalar}}\vec{v}_1 + \underbrace{(a_2 - b_2)}_{\text{escalar}}\vec{v}_2 = \vec{0}$$

Mas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é base, logo:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{matrix}$$

LI

e $\vec{w}$ pode ser escrito de maneira única como CL dos vetores da base!

Slide 06

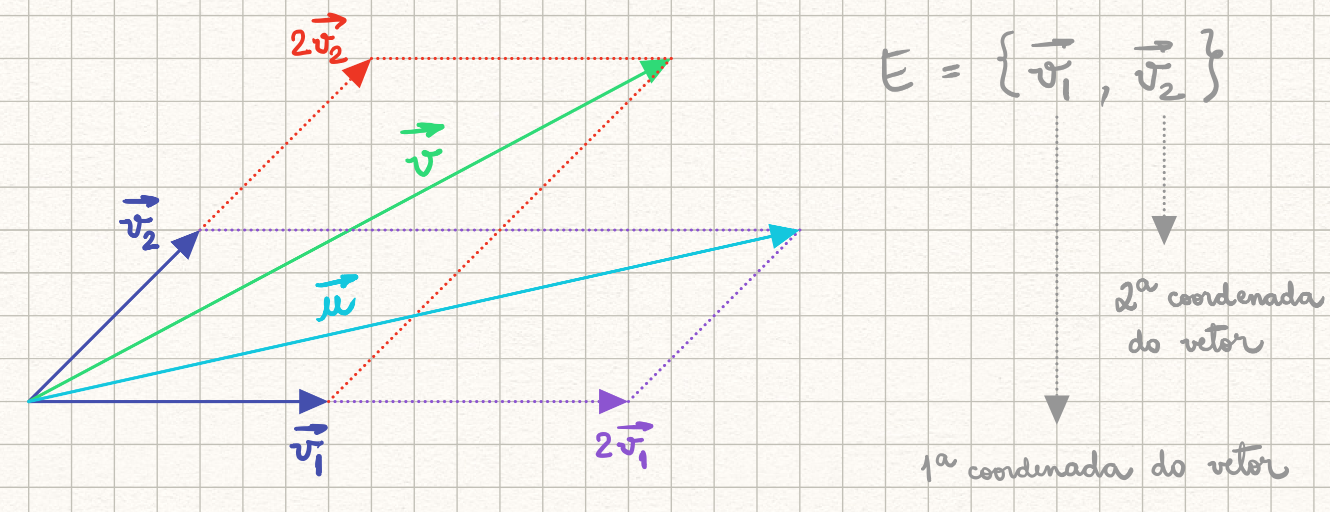
i) Por que a ordem importa?

Seja a base $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Os vetores $\begin{cases} \vec{u} = (2, 1)_E \\ \vec{w} = (1, 2)_E \end{cases}$ são iguais?

$2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

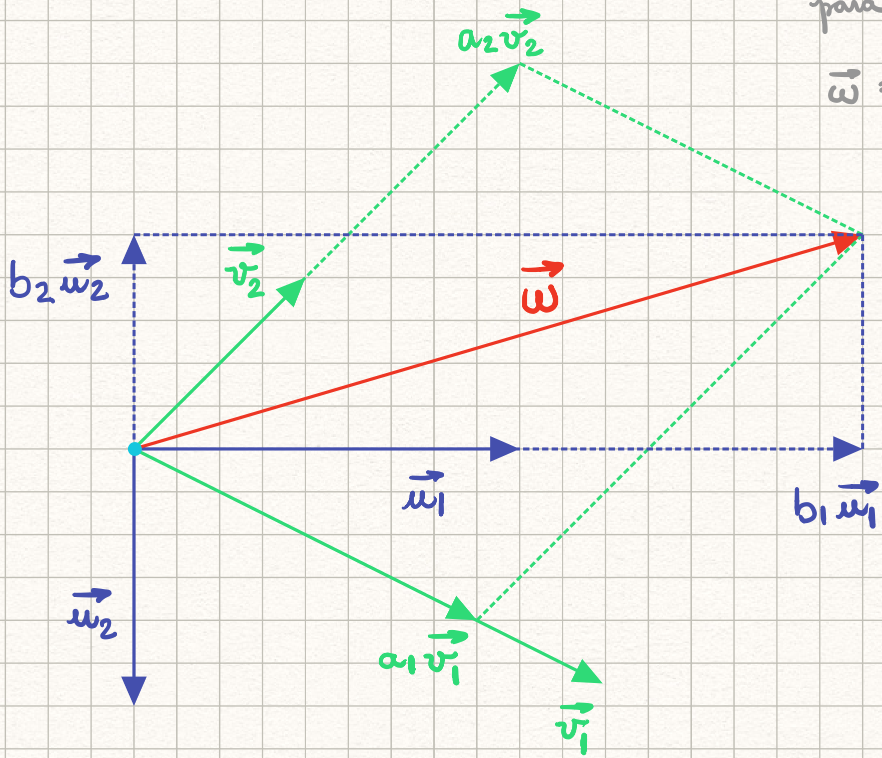


iii) $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$F = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$\vec{w}$ Observe que o vetor $\vec{w}$ não se altera, porém, suas coordenadas são distintas para cada base:

$\vec{w} = (a_1, a_2)_E \; ; \; \vec{w} = (b_1, b_2)_F$



Slide 07

Teorema III:

Prova (a):

$$\text{Se} \begin{cases} \vec{w} = (a_1, a_2)_E, \text{ então: } \vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \\ \vec{t} = (b_1, b_2)_E, \text{ então: } \vec{t} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 \end{cases}$$

$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

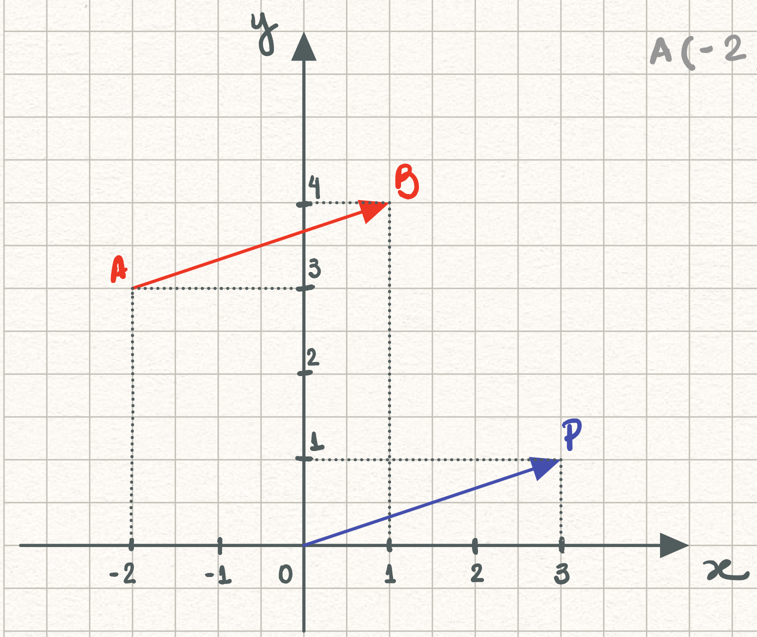
Logo:

$$\begin{aligned} \vec{w} + \vec{t} &= (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) + (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2) \\ &= (a_1\vec{v}_1 + b_1\vec{v}_1) + (a_2\vec{v}_2 + b_2\vec{v}_2) \\ &= \underbrace{(a_1 + b_1)}_{=c_1}\vec{v}_1 + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{=c_2}\vec{v}_2 \\ &= c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = (c_1, c_2)_E \end{aligned}$$

Então:

$$\vec{w} + \vec{t} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)_E$$

Slide 14



$A(-2,3)$; $B(1,4)$ $\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A \\ \vec{v} = (1,4) - (-2,3) \\ \vec{v} = (3,1) \end{cases}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ $\begin{cases} O(0,0) \\ P(3,1) \end{cases}$

EXERCÍCIOS

1) Se $\vec{w} = (a_1, a_2)_E$, então $\vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$

Logo:

$$\begin{aligned} m\vec{w} &= m(a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}) \quad \begin{cases} \vec{w_1} = a_1\vec{v_1} \\ \vec{w_2} = a_2\vec{v_2} \end{cases} \\ &= m(\vec{w_1} + \vec{w_2}) \\ &= m\vec{w_1} + m\vec{w_2} \\ &= ma_1\vec{v_1} + ma_2\vec{v_2} \\ &= \underbrace{(ma_1)}_{=b_1}\vec{v_1} + \underbrace{(ma_2)}_{=b_2}\vec{v_2} \\ &= b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} = (b_1, b_2)_E \end{aligned}$$

Então:

$$m\vec{w} = (ma_1, ma_2)_E$$

2) $E = \{\vec{r}, \vec{s}\}$ $\quad \begin{cases} \vec{u} = (1,2)_E \longrightarrow \vec{u} = \vec{r} + 2\vec{s} \\ \vec{v} = (4,-2)_E \longrightarrow \vec{v} = 4\vec{r} - 2\vec{s} \\ \vec{w} = (-1,8)_E \longrightarrow \vec{w} = -\vec{r} + 8\vec{s} \end{cases}$

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad , \quad a, b\,?$$

Substituindo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na equação acima:

$$-r + 8\vec{s} = a(\vec{r} + 2\vec{s}) + b(4\vec{r} - 2\vec{s})$$

$$-r + 8\vec{s} = a\vec{r} + 2a\vec{s} + 4b\vec{r} - 2b\vec{s}$$

$$-\vec{r} + 8\vec{s} = (a + 4b)\vec{r} + (2a - 2b)\vec{s}$$

Em coordenadas:

$$(\boxed{-1}, \boxed{8})_E = (\boxed{a + 4b}, \boxed{2a - 2b})_E$$

Os vetores somente serão iguais se as suas respectivas coord. forem iguais. Portanto, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} a + 4b = -1 \\ 2a - 2b = 8 \end{cases}$$, cuja solução é

$a = 3$

$b = -1$

3) Aqui, as operações entre os vetores serão feitas de forma literal, aplicando as propriedades. A substituição pelas coord. dos vetores só ocorrerá no final.

LEMBRANDO: se não houver referência à base na qual foram obtidas as coord., considera-se a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$

$4\vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{u} = -\vec{w} - \frac{1}{3}\vec{w}$

$-\frac{4}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$

$\vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{u} + 3\vec{v}$

COORD.

$\vec{w} = -\frac{3}{2}(3,-1) + 3(-1,2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) + (-3,6)$

$\therefore\ \vec{w} = \left(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$

b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

$3\vec{w} - 2\vec{v} + \vec{u} = 8\vec{w} - 6\vec{u}$

$3\vec{w} - 8\vec{w} = -6\vec{u} - \vec{u} + 2\vec{v}$

$-5\vec{w} = -7\vec{u} + 2\vec{v}$

$\vec{w} = \frac{7}{5}\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v}$

COORD.

$\vec{w} = \frac{7}{5}(3,-1) - \frac{2}{5}(-1,2) = \left(\frac{21}{5}, -\frac{7}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$\therefore\ \vec{w} = \left(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5}\right)$

4) $A(-1,3)$, $B(1,0)$ $\Big\}$ $\overrightarrow{BA} = A - B = (-1,3) - (1,0) = (-2,3)$

$C(2,-1)$, $D(x,y)$ $\Big\}$ $\overrightarrow{DC} = C - D = (2,-1) - (x,y) = (2-x, -1-y)$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} \iff \begin{cases} x_{DC} = x_{BA} \\ y_{DC} = y_{BA} \end{cases}$$

Logo $\begin{cases} 2 - x = -2 \\ -1 - y = 3 \end{cases}$, cuja solução é $x = 4$, $y = -4$