MAE-5725 – Modelos Lineares
2ª Lista de Exercícios
Profa. Silvia Nagib Elian

1) Se, $\underset{\sim}{X} \sim N_n\left(\underset{\sim}{\mu}, V\right)$ prove que se $\underset{\sim}{X}' A \underset{\sim}{X} \sim \chi^2_{R,\lambda}, \lambda = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}' A \underset{\sim}{\mu}$, então $\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)' A \left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right) \sim \chi^2_r$.

2) Se $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$ são vetores aleatórios n_1 e n_2 dimensionais, a variável aleatória $\underset{\sim}{X}_1' A \underset{\sim}{X}_2$, onde A é uma matriz $n_1 \times n_2$ é chamada forma bilinear. Verifica-se que $E\left(\underset{\sim}{X}_1' A \underset{\sim}{X}_2\right) = tr(AC') + \underset{\sim}{\mu}_1' A \underset{\sim}{\mu}_2$, onde $\underset{\sim}{\mu}_1 = E\left(\underset{\sim}{X}_1\right), \underset{\sim}{\mu}_2 = E\left(\underset{\sim}{X}_2\right)$ e $Cov\left(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2\right) = C$. Utilize este resultado para calcular $E\left(\underset{\sim}{X}' A \underset{\sim}{Y}\right)$, onde $\underset{\sim}{X} \sim N\left(\underset{\sim}{\mu}_1, I\right), \underset{\sim}{Y} \sim N\left(\underset{\sim}{\mu}_2, I\right)$ e a matriz de correlação entre $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ é R.

O enunciado a seguir refere-se aos exercícios 3) a 10). Considere $\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_3\left(\underset{\sim}{0}, \Sigma\right)$ onde $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3) Determine a distribuição marginal de X_1.

4) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2

5) Determine a distribuição condicional de X_o dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$

6) Calcule $\rho_{12}, \rho_{01}, \rho_{02}$.

7) Calcule $\rho_{01|2}$.

8) Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$

9) Calcule $\sigma_{11|2}$.

10) Determine a covariância entre Z_1 e Z_2, onde $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$

11) Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(\mu, \Sigma) r, r(\Sigma) = n$. Prove que se Σ é uma inversa generalizada de A, então $Y' A \underset{\sim}{Y} \sim X^2_{p,\lambda}$ onde $\lambda = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}' A \underset{\sim}{\mu}$ e $p = r(A)$.

12) Se $\underset{\sim}{Y} \sim N_n\left(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\right)$, com $r(\Sigma) = n$, determine a distribuição de $\underset{\sim}{Y}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{Y}$.

13) Seja $\underset{\sim}{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]$ um vetor aleatório tri-dimensional com função geradora $m_{\underset{\sim}{x}}(t) = \exp\left[t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_1t_2 - t_1t_3\right]$. Determine c tal que $P[2X_1 - 3X_2 + X_3 \rangle c] = 0{,}95$.

14) No exercício anterior, determine a distribuição condicional de $X_1 \mid \overline{X} = 6$.

15) Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_p\left(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2 I\right)$. Se A é uma matriz simétrica de posto completo, calcular $E\left(\underset{\sim}{Y}' A \underset{\sim}{Y}\right)$ e $Var\left(\underset{\sim}{Y}' A \underset{\sim}{Y}\right)$.

16) Sejam $\underset{\sim}{X} \sim N_p\left(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\right)$, B uma matriz de constantes q x p e $\underset{\sim}{b}$ um vetor de constantes q x 1. Usando funções geradoras de momentos, prove que $Y = BX + \underset{\sim}{b}$ tem distribuição $N_q\left(B\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{b}, B\Sigma B'\right)$.

17)Sabendo que (X, Y) tem distribuição normal bivariada, X~ N(8, 4), Y~N (3, 2) e que E (Y | X = x) = -1 + 1 / 2 x, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e Var (Y | X = x).

18)Seja Y ~ N (0 , I) e X = AY, U = BY e V = CY, onde A, B e C são matrizes rxn de posto r, r<n . Se Cov(X, U) = 0 e Cov (X , V) = 0 , prove que X é independente de U + V .

5) Sejam $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \underset{\sim}{X}_3$ e $\underset{\sim}{X}_4$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$.

a) Determine as distribuições dos vetores aleatórios

$$\underset{\sim}{V}_1 = -\frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_1 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_2 + \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_3 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_4 \quad e$$

$$\underset{\sim}{V}_2 = \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{X}_2 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_3 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_4 .$$

b) Determine a distribuição conjunta de $\underset{\sim}{V}_1$ e $\underset{\sim}{V}_2$.

6) Os vetores aleatórios $\underset{\sim}{X}' = [X_1 \ X_2 \ X_3]$ e $\underset{\sim}{Y}' = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]$ são independentes com distribuição normal trivariada com parâmetros

$$\underset{\sim}{\mu}_X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\mu}_Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Sigma_Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine as distribuições das variáveis

a) $\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{Y}$ b) $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{Y} \\ \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{Y} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X} \\ \underset{\sim}{Y} \end{bmatrix}$

matriz A $(x'Ax)$

21) Se $X_1, X_2 \dots X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2, determine a esperança de

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \dots + (X_{n-1} - X_n)^2.$$

22) Se $X_1, X_2 \dots X_n$ são variáveis aleatórias com média μ e $Var(\underset{\sim}{X}) = \Sigma$ com $\sigma_{ii} = \sigma^2$ e $\sigma_{ij} = \rho\sigma^2 \ (i \neq j)$, mostre que $Q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ é um estimador não viciado de $\sigma^2(1-\rho)$.

23) Se $Y_1, Y_2 \dots Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, prove que $\bar{Y}$ e $S^2 = \dfrac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes.

24) Se $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(0, I_n)$, determine a variância de

$$(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \dots + (Y_{n-1} - Y_n)^2.$$

25) Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ e σ^2 desconhecidos e o teste de hipóteses

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu > \mu_0$

com região crítica $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_c$, t_c tal que

$P(t_{n-1} \geq t_c) = \alpha$, $t_{n-1} \sim$ t-student com $n-1$ graus de liberdade.

Prove que se $\mu = \mu_1 > \mu_0$, μ_1 especificado,

$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ tem distribuição t de student não central com parâmetro de não centralidade $\mu_1 - \mu_0$ e $n-1$ graus de liberdade. Qual a utilidade desse fato?

26) Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, I_n)$. Prove que se $\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = Q_1 + Q_2$, onde $Q_1 = \underset{\sim}{Y}' A \underset{\sim}{Y}$ e $Q_1 \sim \chi^2_a$ então $Q_2 \sim \chi^2_{n-a}$.

27) Se $\underset{\sim}{Y} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ com $Y = [Y_1, Y_2, Y_3]'$,

$\underset{\sim}{\mu} = [\mu \ \ \mu \ \ \mu]'$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$,

determine o valor de a para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.

28) Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e Σ tal que $\sigma_{ii} = \sigma^2$ e $\sigma_{ij} = \sigma^2(1-\rho)$, para $i, j = 1, 2 \dots n$, $i \neq j$.
Prove que $\bar{X}$ é independente de $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.

29) Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_{p+q}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ particionado como $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$,

$\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$ vetores p e q dimensionais e

$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$ com $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}$ e

$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$. Prove que $\underset{\sim}{Y}$ e $\underset{\sim}{X}_2$ são vetores aleatórios independentes.