

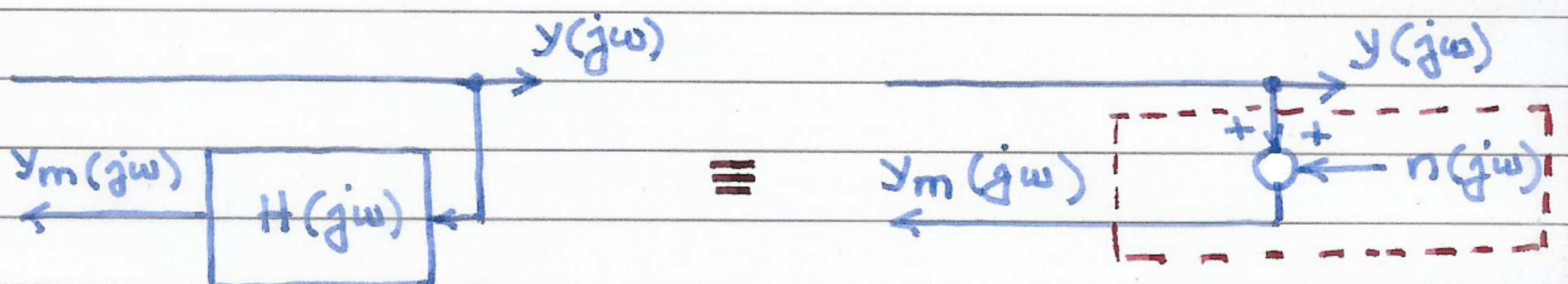
2.5.2 - O CONJUNTO Ω_n

• Erro de medida:

- parcela determinística devida à dinâmica do sensor
- parcela aleatória (em geral, ruído elétrico)
↑ **Análise espectral**

• Dinâmica do sensor

- $H(s)$: f.t. do sensor



- Para haver equivalência:

$$\left. \begin{aligned} y_m(j\omega) &= H(j\omega) y(j\omega) \\ y_m(j\omega) &= y(j\omega) + n(j\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(j\omega) y(j\omega) = y(j\omega) + n(j\omega)$$

Ou seja:

$$[H(j\omega) - 1] y(j\omega) = n(j\omega)$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{n(j\omega)}{y(j\omega)} = H(j\omega) - 1}$$

$$\frac{n(j\omega)}{y(j\omega)} = H(j\omega) - 1$$

- Baixas frequências

$$H(j\omega) \approx 1 \Rightarrow \frac{|n(j\omega)|}{|y(j\omega)|} \ll 1 \Rightarrow |n(j\omega)| \ll |y(j\omega)| \text{ (ok)}$$

- Altas frequências

$$|H(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow \frac{n(j\omega)}{y(j\omega)} \approx -1 \Rightarrow n(j\omega) \approx -y(j\omega) \Rightarrow$$

$$y_m(j\omega) = y(j\omega) + n(j\omega) \approx 0 \text{ (ok)}$$

- Frequências intermediárias

$$\frac{n(j\omega)}{y(j\omega)} = H(j\omega) - 1$$

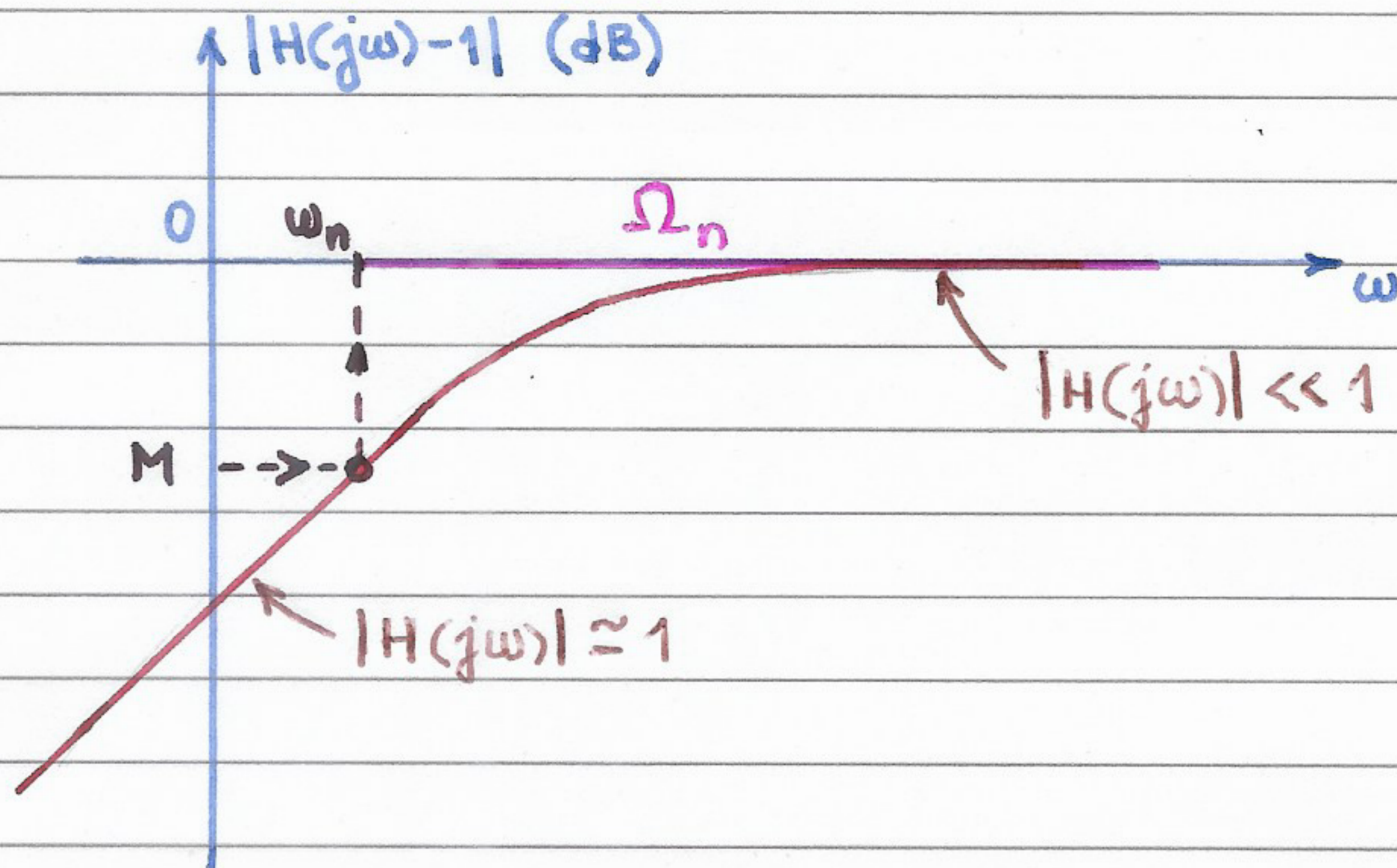
- Seja M : $0 < M \ll 1$ o nível de tolerância do erro de medida (isto é, valores até M são aceitáveis)

- Então, o conjunto Ω_n é aquele em que o erro de medida é tal que

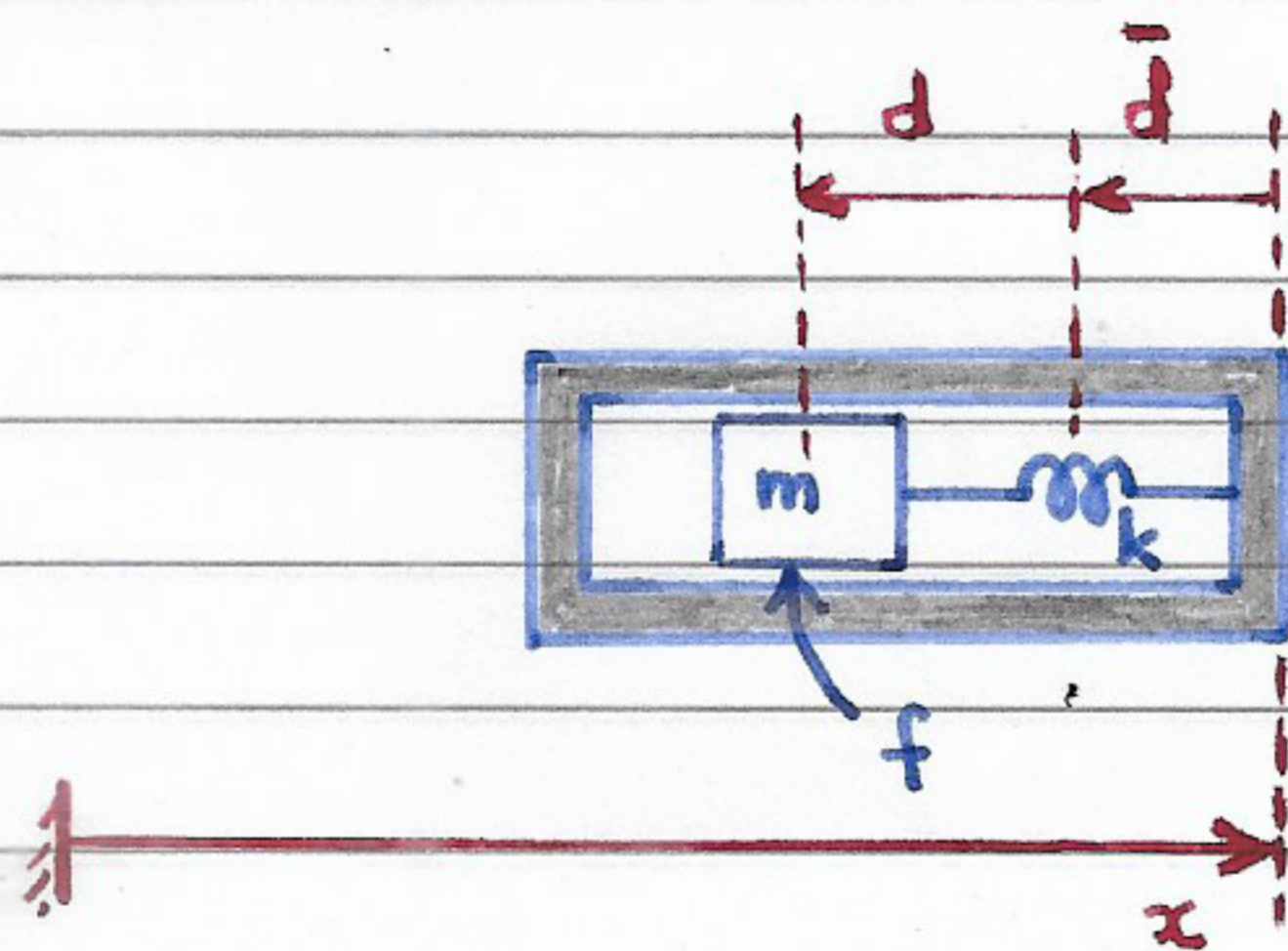
$$\frac{|n(j\omega)|}{|y(j\omega)|} \geq M$$

- Ou seja, o conjunto Ω_n é aquele em que

$$|H(j\omega) - 1| \geq M$$



EXEMPLO 2.6 - Acelerômetro



- Ideia: medir a aceleração da carcaça ($a = \ddot{x}$)

por meio da medida do deslocamento da

massa m em relação à posição de repou-

so \bar{d}

- Designando a aceleração medida por a_m :

$$a_m(t) = \frac{k}{m} d(t)$$

pode-se mostrar que (veja apostila):

$$H(s) = \frac{a_m(s)}{a(s)} = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2}$$

em que:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{f}{2\sqrt{km}}$$

- Portanto:

$$H(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)}{a(j\omega)} = \frac{\omega_a^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_a j\omega + \omega_a^2}$$

• Se $\omega \ll \omega_a \Rightarrow H(j\omega) \approx 1 \Rightarrow a_m(j\omega) \approx a(j\omega)$

• Se $\omega \gg \omega_a \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_a^2}{-\omega^2} \Rightarrow |H(j\omega)| \ll 1$

• Para determinar Ω_n associado a um dado

valor de M : $0 < M \ll 1$, temos que

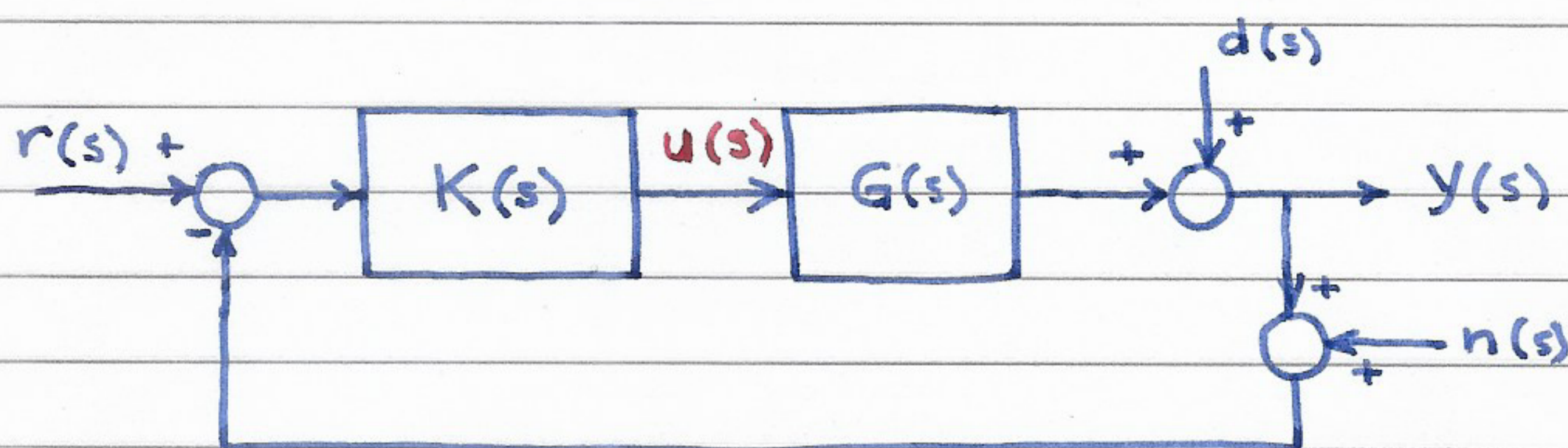
resolver:

$$\left| \frac{\omega_a^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_a j\omega + \omega_a^2} - 1 \right| \geq M$$

NOTA: - Exemplo mais conceitual do que prático.

- Ponto de vista do projetista do sensor.

2.6 - LIMITAÇÃO DO ESFORÇO DE CONTROLE



$$u(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} [r(j\omega) - d(j\omega) - n(j\omega)]$$

• BAIXAS FREQUÊNCIAS ($\omega \in \Omega_r \cup \Omega_d$)

Para o acompanhamento de referência e rejeição de perturbação,

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$$

$$\therefore 1 + G(j\omega)K(j\omega) \approx G(j\omega)K(j\omega)$$

Assim:

$$u(j\omega) \approx \frac{1}{G(j\omega)} [r(j\omega) - d(j\omega)]$$

Fatos importantes

• $u(j\omega)$ não depende de $K(j\omega)$!

• Se $|G(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow \frac{|u(j\omega)|}{|r(j\omega)|} = \frac{|u(j\omega)|}{|d(j\omega)|} = \frac{1}{|G(j\omega)|} \gg 1$

EXEMPLO 2.7 - Super petroleiro

• ALTAS FREQUÊNCIAS ($\omega \in \Omega_n$)

$$u(j\omega) = - \frac{K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} n(j\omega)$$

- Quantitativamente

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \leq \underbrace{\delta_u(\omega)}_{\text{dado}} \quad (\omega \in \Omega_n)$$

Tipicamente $\delta_u(\omega) \ll 1$ ($\omega \in \Omega_n$)

Lembrando que

$$\frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} = S(j\omega)$$

temos

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = |K(j\omega)S(j\omega)|$$

Portanto

$$|K(j\omega)S(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (H_{\infty})$$

Normalmente

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n)$$

para atender à Condição de Rejeição do Erro de Medida.

Então

$$\frac{K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \approx K(j\omega)$$

Logo

$$\frac{|u(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \approx |K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n)$$

Para termos a condição expressa em termos do ganho

de malha :

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) |G(j\omega)| \quad (\omega \in \Omega_n)$$

(Loop Shaping)

• NOTA

$$|K(j\omega)| \leq \delta_u(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n)$$

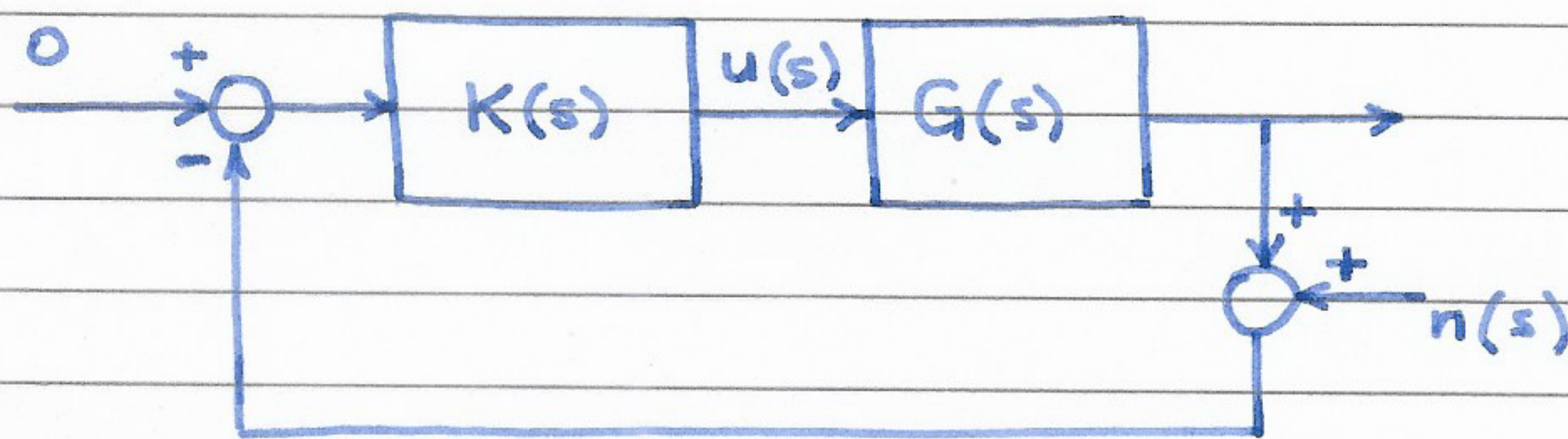
- Idealmente $K(s)$ estritamente própria (polinômio do denominador com grau $>$ do que do numerador)

- Problema com PID's :

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \Rightarrow$$

$$K(j\omega) = K_p + \frac{K_I}{j\omega} + \underbrace{K_D j\omega}_{\text{cresce c/\omega}}$$

EXEMPLO 2.8



$$K(s) = \frac{10}{0,1s+1}$$

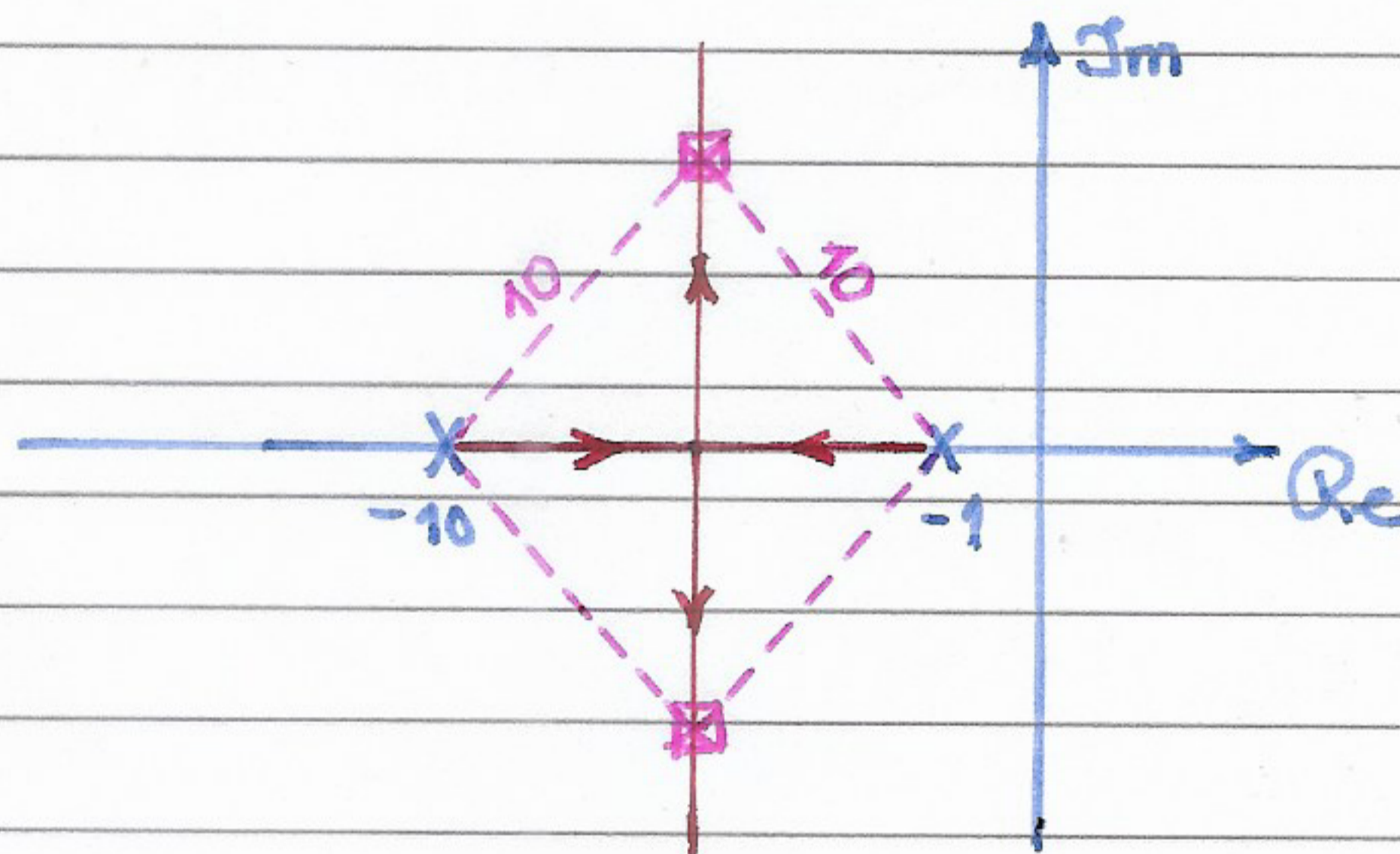
$$G = \frac{1}{s+1}$$

- $K(s)$ estritamente própria!

- Estabilidade interna

- Via LGR

$$G(s)K(s) = \frac{1}{s+1} \frac{10}{0,1s+1} = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$$



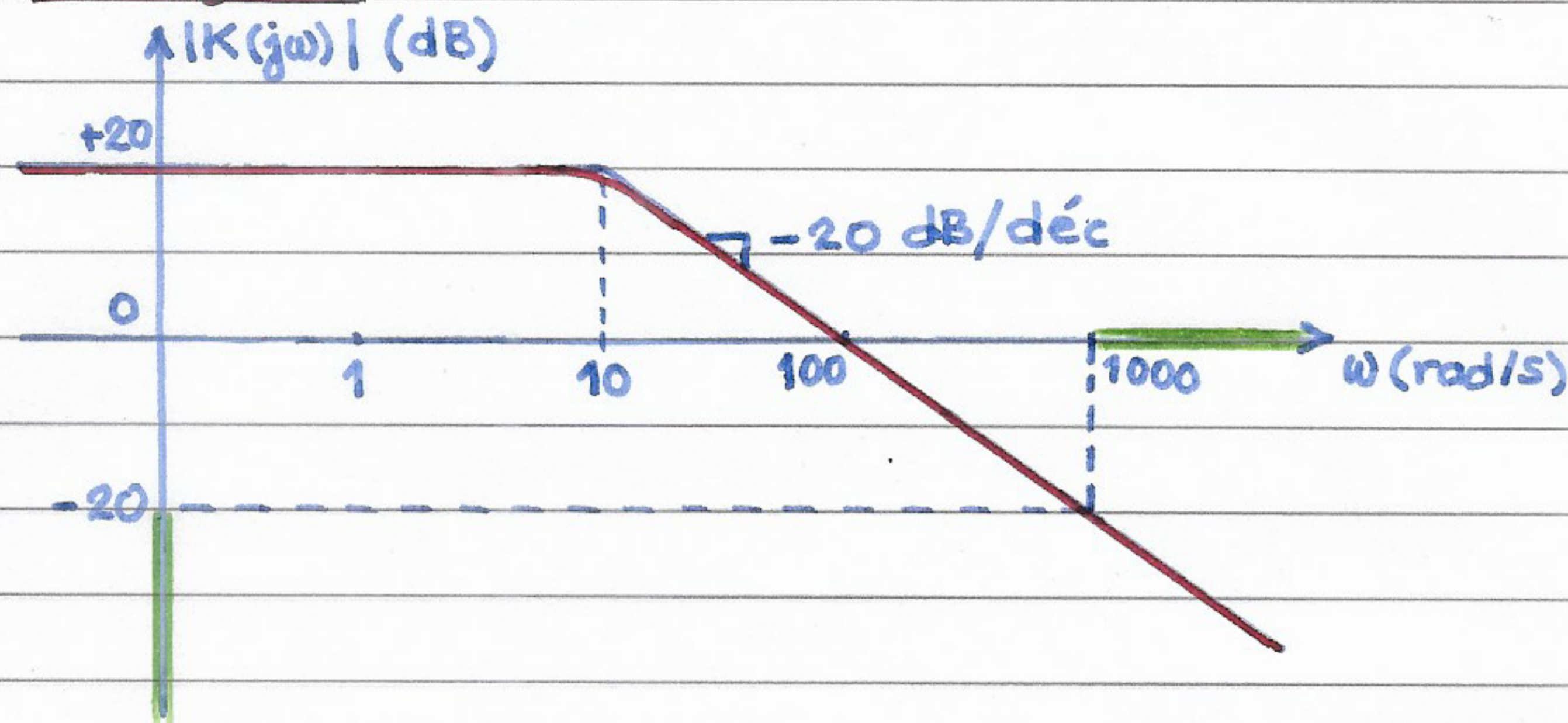
∴ polos de m.f. e S.P.E.A.

- Não há cancelamento entre polos e zeros de $G(s)$

e $K(s)$ no S.P.D.F.

- Conclusão : internamente estável

- $|K(j\omega)|$



$$\therefore \omega \geq 1000 \text{ rad/s} \Rightarrow |K(j\omega)| \leq -20 \text{ dB} = 0,1$$

$$- \omega_n = 1000 \text{ rad/s} \Rightarrow \Omega_n = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \geq \omega_n\}$$

$$|K(j\omega)| \leq 0,1 \text{ para } \omega \in \Omega_n \Rightarrow \delta_u(\omega) = 0,1$$

- Simulação

$n(t)$ = soma de 10 senóides + ruído

- amplitudes aleatórias $\in [0, 1]$

- fases aleatórias $\in [0, 2\pi]$

- frequências uniformemente espaçadas em

$$[10^3, 10^4] \text{ rad/s}$$

- ruído gaussiano de média nula e variância

igual a 25% do valor da amplitude da senóide

