Eletromagnetismo — 7600021

Primeira lista suplementar.

28/04/2021

Exercícios do livro texto (Griffiths - Introdução à Eletrodinâmica - 3a. edição). Além dos abaixo, faça o número 10 da primeira lista.

1. **1.43**
   (a) $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)\,\mathrm{d}x$.
   (b) $\int_0^5 \cos x\,\delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x$.
   (c) $\int_0^3 x^3\delta(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)\;\mathrm{d}x$.

2. **1.45**
   (a) Mostre que

   $$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta(x)) = -\delta(x).$$

   Sugestão: Use integração por partes.

   (b) Seja $\theta(x)$ a *função degrau*

   $$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}.$$

   Mostre que $\mathrm{d}\theta\,/\,\mathrm{d}x = \delta(x)$.

3. **1.46**
   (a) Escreva uma expressão para a densidade de carga elétrica $\rho(\vec{r})$ de uma carga pontual na posição $\vec{r}'$;
   (b) Qual é a densidade de carga de um dipolo elétrico, consistente de uma carga pontual $-q$ na origem e uma carga pontual na posição $\vec{a}$?
   (c) Qual é a densidade de carga de uma casca esférica infinitesimalmente fina de raio R e carga total Q, centrada na origem?

4. **1.47** Efetue as seguintes integrais:
   (a) $\int_{\text{espaço}}(r^2 + \vec{r}\cdot\vec{a} + a^2)\delta^3(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau$, onde $\vec{a}$ é um vetor fixo e a, seu módulo.
   (b) $\int_{\mathcal{V}} |\vec{r}-\vec{b}|^2\delta^3(5\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$, onde $\mathcal{V}$ é um cubo de lado 2, centrado na origem, e $\vec{b} = 4\hat{y} + 3\hat{z}$.

(c) $\int_{\mathcal{V}}(r^4 + r^2(\vec{r}\cdot\vec{c})\delta^3(\vec{r}-\vec{c})\,\mathrm{d}\tau$, onde $\mathcal{V}$ é uma esfera de raio 6 em torno da origem, $\vec{c} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$, e c é sua magnitude.

(d) $\int_{\mathcal{V}}\vec{r}\cdot(\vec{d}-\vec{r})\delta^3(\vec{e}-\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$, onde $\vec{d} = (1,2,3)$, $\vec{e} = (3,2,1)$, e $\mathcal{V}$ é uma esfera de raio 1.5 centrado em $(2,2,2)$.

5. **1.53** Verifique o teorema fundamental da divergência para o campo

$$\vec{v} = r^2\cos\theta\hat{r} + r^2\cos\phi\hat{\theta} - r^2\cos\theta\sin\phi\hat{\phi},$$

usando com volume um octante da esfera de raio R (Fig. 1.48). Inclua toda a superfície do octante.

6. **1.55** Calcule a integral de linha de

$$\vec{v} = 6\hat{x} + yz^2\hat{y} + (3y+z)\hat{z}$$

ao longo do caminho triangular na Fig. 1.49. Verifique o resultado por meio do teorema de Stokes.

7. **1.58** Verifique o teorema fundamental da divergência para o campo

$$\vec{v} = r^2\sin\theta\hat{r} + 4r^2\cos\theta\hat{\theta} + r^2\tan\theta\hat{\phi},$$

usando o volume do sorvete na Fig. 1.52, onde a superfície superior é uma calota esférica de raio R, centrada na origem.

8. **1.59** Duas elegantes verificações dos teoremas fundamentais:

(a) Combine o corolário 2 do teorema do gradiente com o teorema de Stokes (com $\vec{v} = \vec{\nabla}T$). Mostre que o resultado concorda com o que você já sabe sobre derivadas segundos.

(b) Combine o corolário 2 do teorema do rotacional com o teorema da divergência. Mostre que o resultado concorda com o que você já sabe.

9. **1.61** A integral

$$\vec{a} \equiv \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\vec{a}$$

é conhecida como a *área vetorial* da superfície $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}$ for plana, então $|\vec{a}|$ é a área ordinária.

(a) Encontre a área vetorial de uma calota hemisférica de raio R.

(b) Mostre que $\vec{a} = 0$ para qualquer superfície fechada.

(c) Mostre que $\vec{a}$ é o mesmo vetor para todas as superfícies com uma mesma borda.

(d) Mostre que

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{\ell},$$

onde a integral corre ao longo da borda. *Sugestão:* Desenhe o cone que vai da origem até a borda. Divida a superfície do cone em triângulos infinitesimais, cada um vértice na origem e lado oposto $d\vec{\ell}$ e explore a interpretação geométrica do produto vetorial.

(e) Mostre que

$$\oint (\vec{c} \cdot \vec{r})\, d\vec{\ell} = \vec{a} \times \vec{c},$$

para quqlauer vetor $\vec{c}$.

10. **1.62(a)** Encontre a divergência do campo

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r}.$$

Para isso,

(a) Calcule diretamente o divergente;

(b) Teste seu resultado por meio do teorema da divergência;

(c) Existe uma função delta na origem, como no caso do campo $\hat{r}/r^2$? Explique.