

SLC609 / SME 341

Assunto: Álgebra Linear

Aula AL-4 – Espaços vetoriais e subespaços

Prof. Miguel Frasson

Abril de 2021

Espaços vetoriais

- ▶ Vimos o $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades com respeito à soma e produto por escalar.
- ▶ Hoje veremos que muitos outros conjuntos satisfazem as mesmas propriedades, e portanto para eles valem inúmeras propriedades que já estamos familiarizados.
- ▶ Dizemos que esses espaços são **espaços vetoriais**.
- ▶ Daremos diversos exemplos desses espaços.

Definição dos espaços vetoriais

Um conjunto não vazio V é um **espaço vetorial** com escalares num corpo como $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou outro, quando nele estão definidas duas operações — a **soma** e o **produto por escalar** — satisfazendo:

$$(\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

EV1 $x + (y + z) = (x + y) + z$

EV2 $x + y = y + x$

EV3 existe um *elemento neutro* da soma, denotado 0: $x + 0 = x$

EV4 para $x \in V$ existe um *elemento oposto*, denotado $-x$:
 $x + (-x) = 0$

EV5 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

EV6 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

EV7 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

EV8 $1x = x$

Exemplos: $\mathbb{R}^n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

- ▶ $V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial, pelas propriedades dos números reais.
- ▶ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais. Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 - ▶ Soma: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
 - ▶ Produto por escalar: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$
- ▶ O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é espaço vetorial.

Exemplos: $C(I, \mathbb{R})$

- ▶ Se I é um intervalo, $C(I, \mathbb{R})$, o conjunto das funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é espaço vetorial. Dadas $f, g \in C(I, \mathbb{R})$, definimos as funções $f + g$ e αf ($\alpha \in \mathbb{R}$):
 - ▶ Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I$
 - ▶ Produto por escalar: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Exemplos com $\mathbb{Z}$

- ▶ $\mathbb{Z}$ não é espaço vetorial com escalares em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$:
Para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha x \notin \mathbb{Z}$ não está definido para $x = 1 \in \mathbb{Z}$.
- ▶ $\mathbb{Z}$ com escalares em $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ e operações usuais é espaço vetorial?
 - ▶ EV1 até EV4 são propriedades dos inteiros.
 - ▶ Produto por escalar: $0x = 0 \in \mathbb{Z}$, $1x = x$
 - ▶ Verificando EV5:
 - ▶ $\alpha = 0$: $\alpha(\beta x) = 0(\beta x) = 0 = 0x = (0\beta)x$
 - ▶ $\alpha = 1$: $\alpha(\beta x) = 1(\beta x) = \beta x = (1\beta)x$
 - ▶ Verificando EV6:
 - ▶ se $\alpha = 1$, $\beta = 1$:
 - ▶ $(\alpha + \beta)x = \underbrace{(1 + 1)}_{=0}x = 0x = 0$
 - ▶ $1x + 1x = x + x = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$.
 - ▶ EV6 não está satisfeita!
 - ▶ $\mathbb{Z}$ com escalares em $\mathbb{Z}_2$ não é espaço vetorial.

Algumas propriedades derivadas da principais

Diferença

Definimos a **diferença** $u - v$ por:

$$u - v = u + (-v)$$

De fato, dado $v \in V$, $-v \in V$ existe por **EV4**.

Equações lineares sempre têm solução

Dados $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ $a, b \in V$, a equação linear (com variável $x \in V$)

$$\gamma x + a = b$$

tem solução

$$x = \gamma^{-1}(b - a)$$

De fato:

$$\gamma x + a = b \implies (\gamma x + a) + (-a) = b + (-a) \quad (\text{EV4})$$

$$\implies \gamma x + (a + -a) = b - a \quad (\text{EV1})$$

$$\implies \gamma x + 0 = b - a \quad (\text{EV4})$$

$$\implies \gamma x = b - a \quad (\text{EV3})$$

$$\implies \gamma^{-1}(\gamma x) = \gamma^{-1}(b - a) \quad (\gamma^{-1} \text{ existe})$$

$$\implies (\gamma^{-1}\gamma)x = \gamma^{-1}(b - a) \quad (\text{EV5})$$

$$\implies 1x = \gamma^{-1}(b - a) \quad (\text{EV5})$$

$$\implies x = \gamma^{-1}(b - a) \quad (\text{EV8})$$

$0x, \alpha 0$

► $0x = 0$

De fato,

$$\begin{aligned} 0x &= (0 + 0)x && (\text{em } \mathbb{R}: 0 = 0 + 0) \\ &= 0x + 0x && (\text{EV6}) \\ \implies 0x + (-0x) &= (0x + 0x) + (-0x) && (\text{EV4}) \\ \implies 0x + -0x &= 0x + (0x + -0x) && (\text{EV1}) \\ \implies 0 &= 0x + 0 && (\text{EV4}) \\ \implies 0 &= 0x && (\text{EV3}) \end{aligned}$$

► Tente mostrar que $\alpha 0 = 0$ usando as propriedades.

Se $\alpha x = 0$, então $\alpha = 0$ ou $x = 0$

De fato, se $\alpha x = 0$ e $\alpha \neq 0$, x é solução da equação linear

$$\alpha x + 0 = 0 \implies x = \alpha^{-1}(0 - 0) = \alpha^{-1}0 = 0.$$

- Note que o produto aqui é **produto por escalar**
- Isso não vale com qualquer produto, por exemplo produto de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}$$

Subespaços vetoriais

- ▶ Verificar que um conjunto é espaço vetorial demanda verificar 8 propriedades.
- ▶ Isso pode-se reduzir para 2 ou 3 propriedades se o “candidato” é subconjunto de um espaço vetorial.
- ▶ Chamamos esses subconjuntos de **subespaços vetoriais**.

Subespaços vetoriais

Subespaços vetoriais

Um subconjunto U de um espaço vetorial V é também um espaço vetorial se

- ▶ $0 \in U$
- ▶ $u, v \in U \implies u + v \in U$ (U é fechado para a soma)
- ▶ $u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha u \in U$ (" U é fechado para o prod. escalar)

Exemplo: $U = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ em $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2$, sejam $a, b \in \mathbb{R}$. $U = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ é subespaço.

- ▶ $(0, 0) \in U$ pois $a0 + b0 = 0$.
- ▶ Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ pertencem a U ,

$$au_1 + bu_2 = 0, \quad av_1 + bv_2 = 0$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in U:$$

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) = (au_1 + bu_2) + (av_1 + bv_2) = 0 + 0 = 0.$$

- ▶ $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2) \in U:$

$$a(\alpha u_1) + b(\alpha u_2) = \alpha(au_1 + bu_2) = \alpha 0 = 0.$$

Exemplo: 1º quadrante em $\mathbb{R}^2$ não é!

$$U = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2:$$

- ▶ $(0, 0) \in U$
- ▶ U é fechado para a soma
- ▶ mas **não** é fechado para o produto por escalar:

$$-1 \in \mathbb{R}, (1, 1) \in U \text{ mas } -1(1, 1) = (-1, -1) \notin U.$$

Subespaços de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^2$ todos os possíveis subespaços são:

- ▶ $\{(0,0)\}$
- ▶ Retas que passam pela origem
- ▶ $\mathbb{R}^2$

Em $\mathbb{R}^3$ todos os possíveis subespaços são:

- ▶ $\{(0,0,0)\}$
- ▶ Retas que passam pela origem:
dado $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$, $\{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$
- ▶ Planos que passam pela origem:
dado $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$, $\{v : v \cdot u = 0\}$
- ▶ $\mathbb{R}^3$

Exemplo: funções pares ou ímpares

Seja $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P = \{f \in V : f(x) = f(-x)\}$,
 $I = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$ são subespaços vetoriais:

- ▶ a função 0 é função par e ímpar ($\therefore 0 \in U$)
- ▶ soma de funções pares é par (P é fechado para a soma)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

- ▶ múltiplo de função par é par (P é fechado para o produto por escalar)

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x)$$

- ▶ analogamente para funções ímpares (exercício)

Exemplo: matrizes simétricas

Seja $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas $n \times n$.
Vamos denotar a **transposta** de uma matriz A por A' .

Propriedades da transposta:

$$(\alpha \in \mathbb{R}, \quad A, B \in M_{n \times n})$$

- ▶ $(A')' = A$
- ▶ $(A + B)' = A' + B'$
- ▶ $(AB)' = B'A'$
- ▶ $(\alpha A)' = \alpha A'$

Seja $S = \{A \in V : A = A'\}$ o conjunto das **matrizes simétricas**.

São exemplos de matrizes simétricas:

- ▶ a matriz nula $0 \in M_{n \times n}$ é simétrica.
- ▶ a matriz identidade I_n é simétrica.
- ▶ $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é a expressão geral das matrizes simétricas 2×2 .

Exemplo: matrizes simétricas

Mostre que S é subespaço de $M_{n \times n}$.

- ▶ A matriz nula $0 \in S$, como vimos.
- ▶ Sejam $A, B \in S$. então $A = A'$, $B = B'$.
Vamos verificar que $A + B \in S$:

$$(A + B)' = A' + B' = A + B \implies A + B \in S.$$

- ▶ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in S$. Então $A = A'$.

$$(\alpha A)' = \alpha A' = \alpha A \implies \alpha A \in S.$$

- ▶ Portanto S é subespaço vetorial de $M_{n \times n}$

Exemplo: interseção de subespaços é subespaço

Sejam U, W dois subespaços de um espaço vetorial V . Mostre que $Z = U \cap W$ é subespaço de V .

- ▶ Como U, W são subespaços, $0 \in U$ e $0 \in W$. Então $0 \in U \cap W$.
- ▶ Sejam $x, y \in U \cap W$.
 - ▶ $x, y \in U \cap W \implies x, y \in U$ e $x, y \in W$.
 - ▶ $x, y \in U \implies x + y \in U$
 - ▶ $x, y \in W \implies x + y \in W$
 - ▶ portanto $x + y \in U \cap W$
- ▶ Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in U \cap W$.
 - ▶ $x \in U \cap W \implies x \in U$ e $x \in W$.
 - ▶ $x \in U \implies \alpha x \in U$
 - ▶ $x \in W \implies \alpha x \in W$
 - ▶ portanto $\alpha x \in U \cap W$
- ▶ Logo, $U \cap W$ é subespaço vetorial de V .