Manipulando vem:

$$\boxed{\tau \dot{\omega} + \omega = K_0 \left(v_a - K_1 T_L \right)}$$

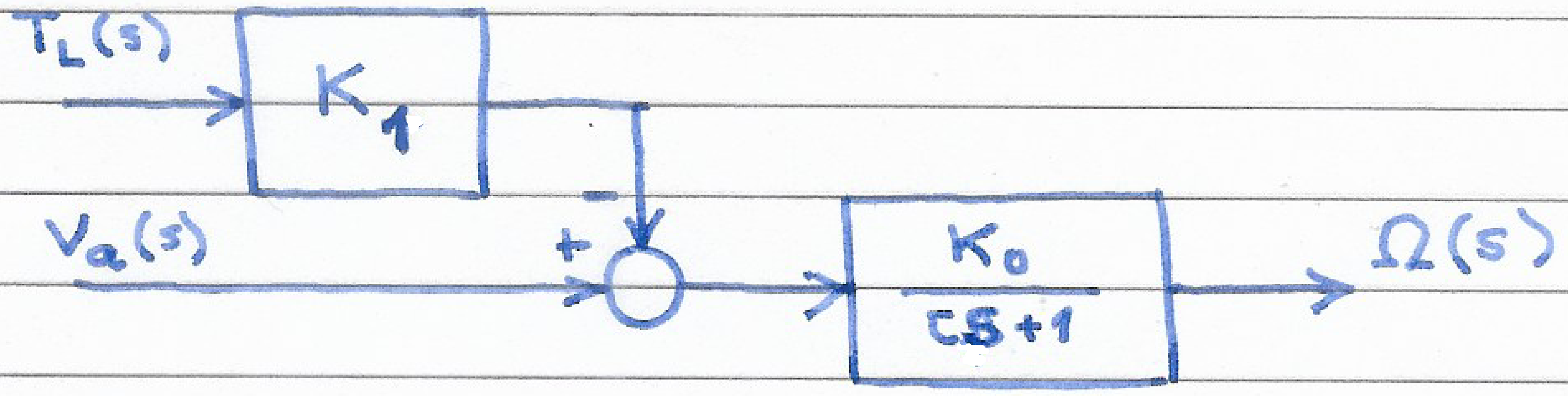
em que:

$$\tau = \frac{J R_a}{K_T K_V} \qquad K_0 = \frac{1}{K_V} \qquad K_1 = \frac{R_a}{K_T}$$

Transformando:

$$\boxed{\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1} \left[V_a(s) - K_1 T_L(s) \right]}$$

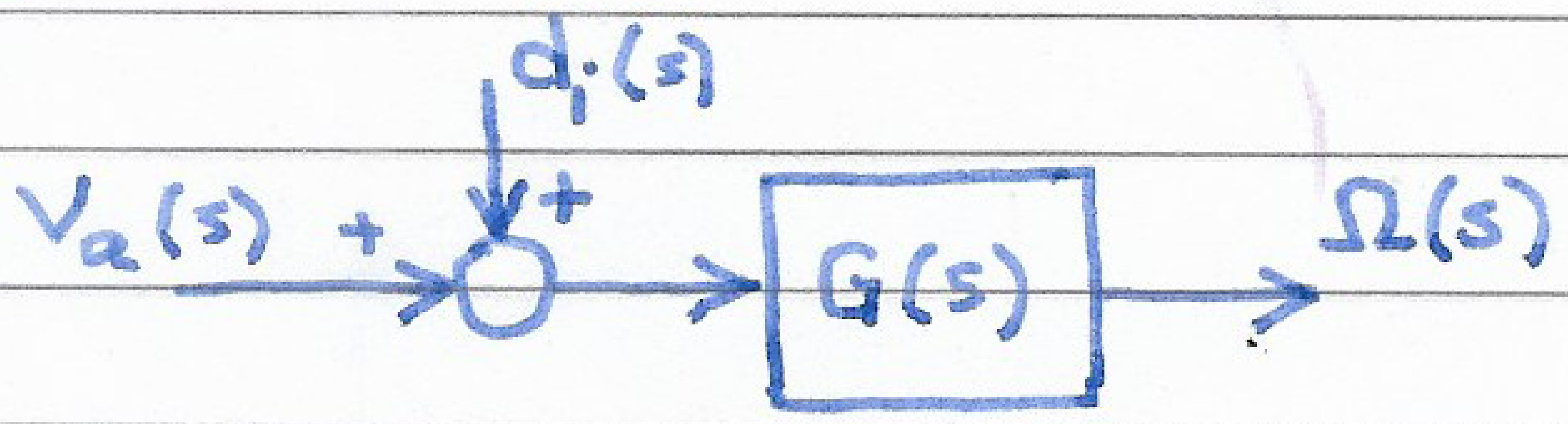
Diagrama de blocos:



Ou, definindo:

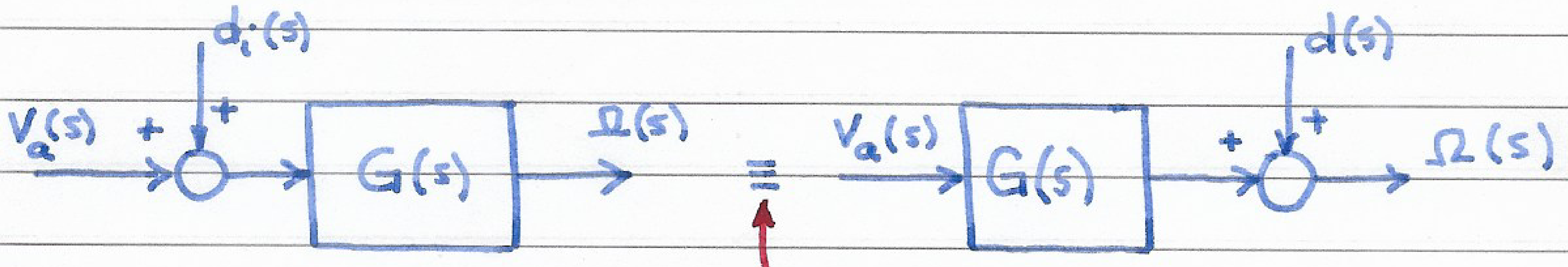
$$G(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1} \qquad d_i(s) = -K_1 T_L(s)$$

temos:



Nota: Perturbação resultou representada naturalmente na entrada da planta ("causa")

Álgebra de diagrama de blocos:



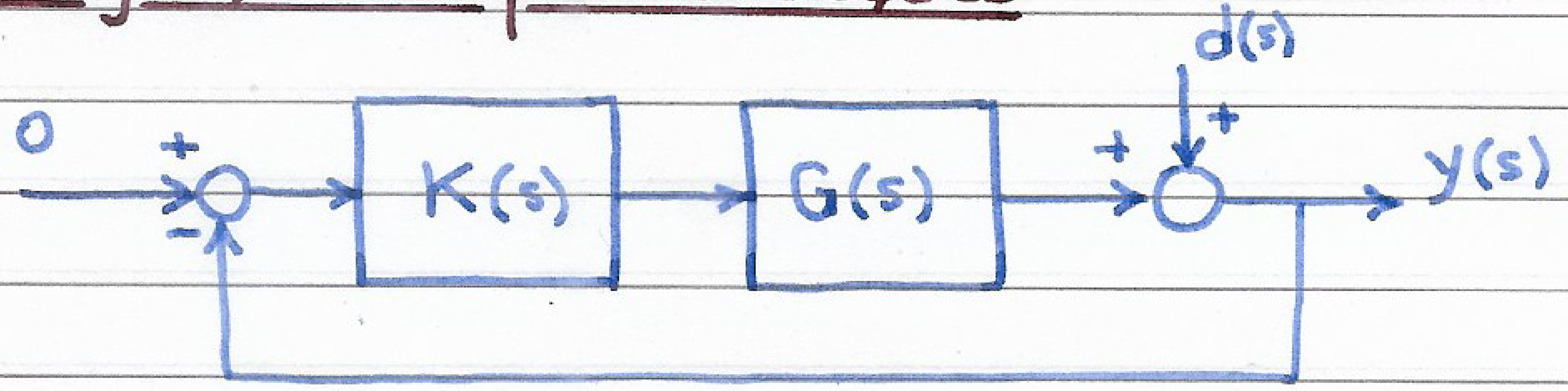
se $d(s) = G(s)\,d_i(s)$

$d_i(s)$ tem dimensão de tensão elétrica

$d(s)$ tem dimensão de velocidade angular

$$d(s) = G(s)\,d_i(s) = \frac{K_0}{\tau s+1}\cdot\left(-K_1 T_L(s)\right)$$

Rejeição de perturbações



- $$y(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)}\,d(j\omega)$$

- $\Omega_d = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \leq \omega_d\}$ - conjunto onde $d(j\omega)$ é mais significativo

  Ω_d é de b.f. -> planta filtra

- **Qualitativamente**

  Se $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$ para $\omega \in \Omega_d$, então

  $\dfrac{y(j\omega)}{d(j\omega)}$ é "pequeno".

Neste caso temos também

$$|S(j\omega)| \ll 1 \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

- **Quantitativamente**

$$\frac{|y(j\omega)|}{|d(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

$\delta_d(\omega)$: dado (especificação de projeto)

Tipicamente : $\delta_d(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_d)$

Mas :

$$\frac{y(j\omega)}{d(j\omega)} = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)}$$

Portanto:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|d(j\omega)|} = \frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

Ou seja:

$$\boxed{|S(j\omega)| \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)} \quad (H_\infty)$$

Alternativamente :

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_d(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

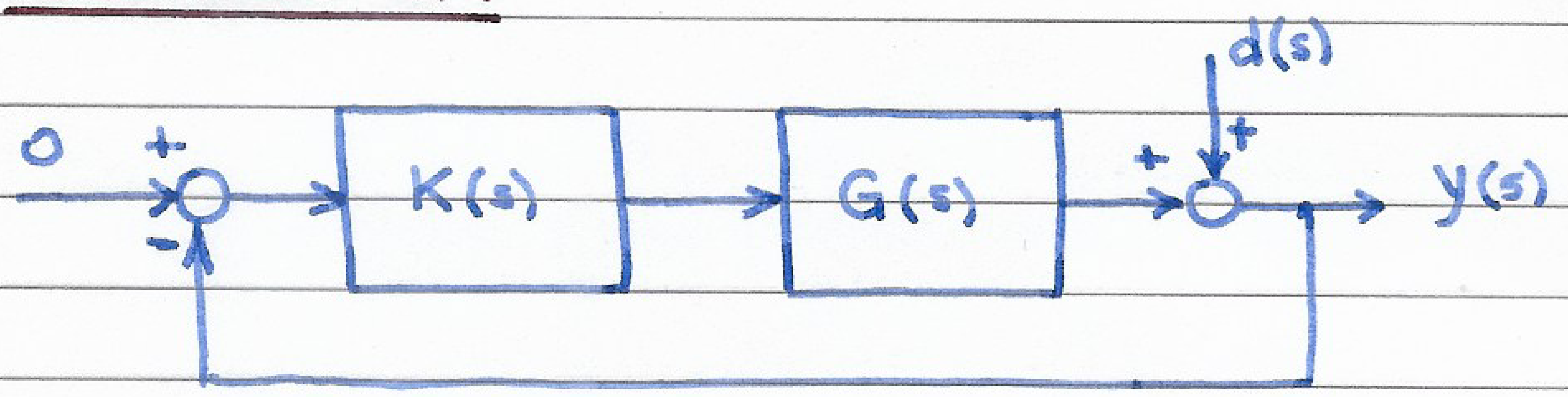
Se $\delta_d(\omega) \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta_d(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d)$

e, portanto, podemos aproximar :

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_d(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d)}$$ (Loop shaping)

Essas são as Condições de Rejeição de Perturbações para o caso nominal.

EXEMPLO 2.4



$G(s) = \frac{1}{s+1}$

$K(s) = 100$

- Estabilidade interna → ok!

  Ver exemplo 2.3.

- Resposta em frequência de malha aberta

  Ver novamente o exemplo 2.3.

- Para $\omega \leq \underbrace{1\ rad/s}_{\omega_d} \Rightarrow |G(j\omega)K(j\omega)| \geq \underbrace{100}_{1/\delta_d(\omega)}$ (aproxim//)

  $\therefore \Omega_d = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \leq \omega_d\}$

  $$\frac{1}{\delta_d(\omega)} = 100 \Rightarrow \delta_d(\omega) = 0{,}01 \quad (\omega \in \Omega_d)$$

- Ou seja, as perturbações são atenuadas na saída com no máximo 1% de ganho para sinais senoidais com frequências até 1 rad/s.

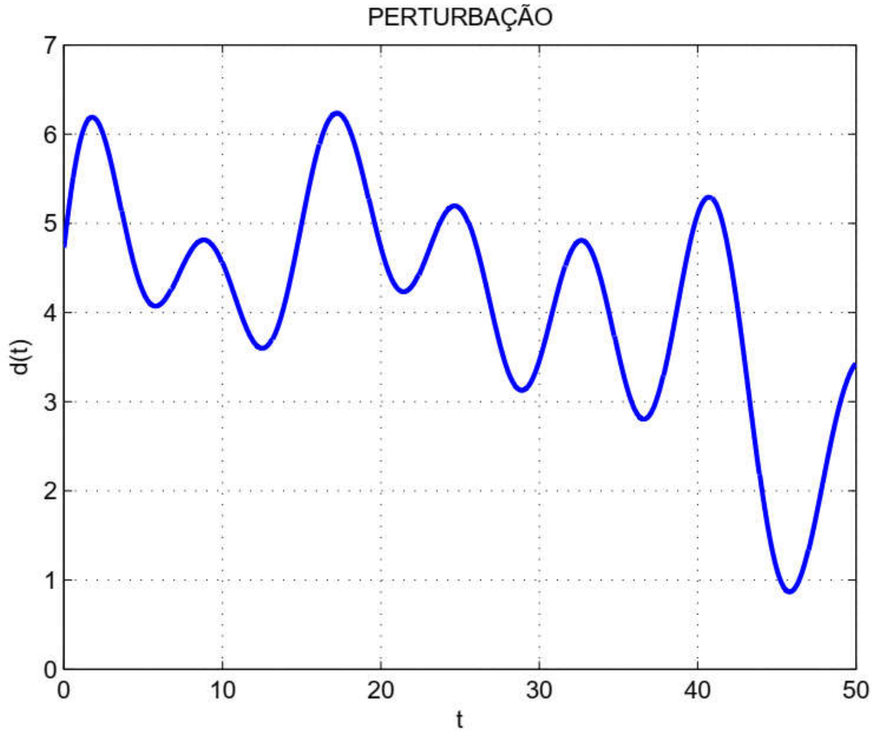
- **Simulações**

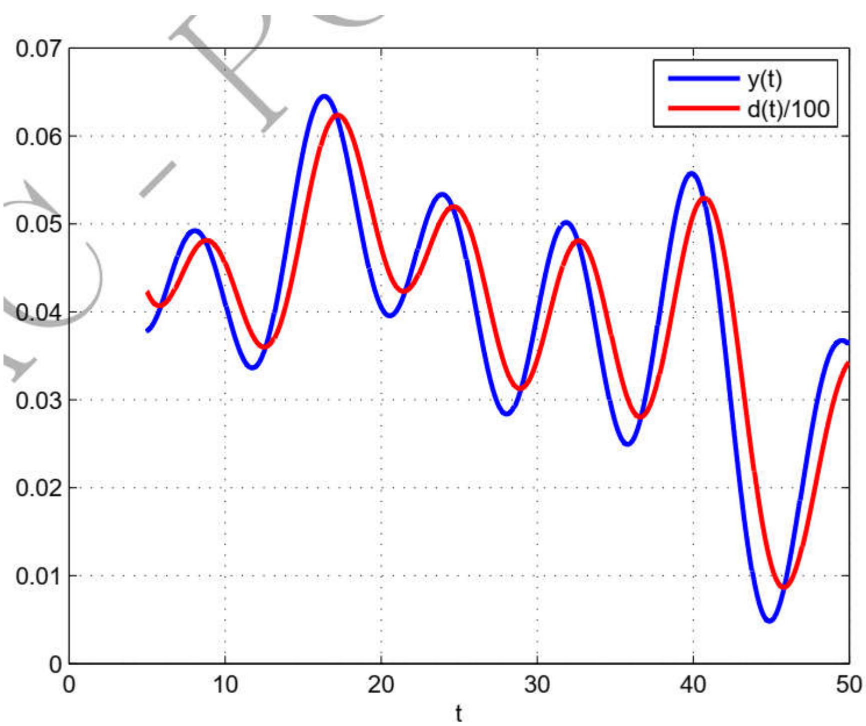
Nas mesmas condições do Exemplo 2.3 :

- soma de 20 senóides
- amplitudes aleatórias no intervalo $[0, 1]$
- fases aleatórias no intervalo $[0, 2\pi]$
- frequências distribuídas uniformemente em escala logarítmica no intervalo $[10^{-2}, 1]$ rad/s

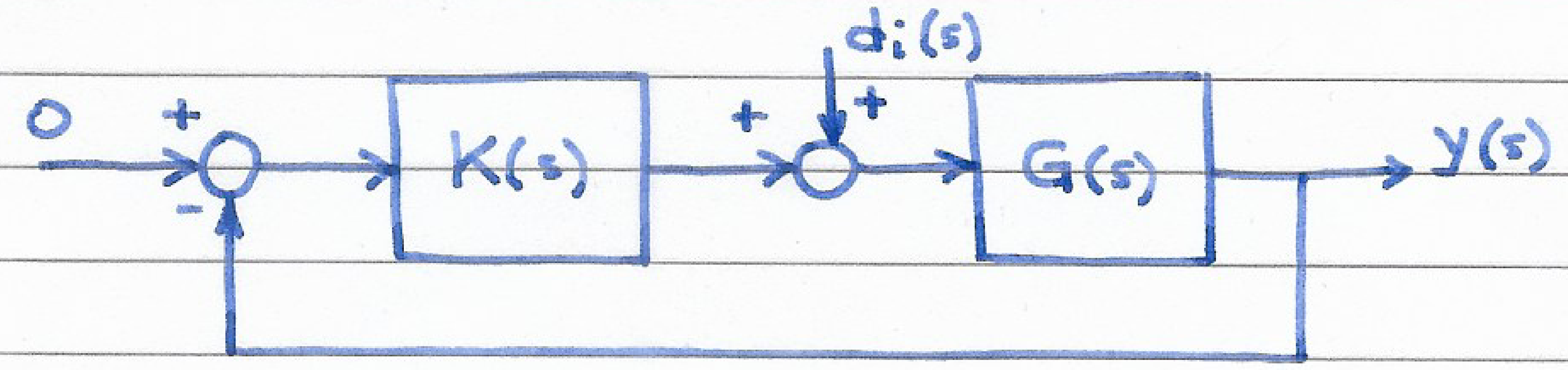
Resultados :

- ver figuras 2.8 e 2.9 da Apostila
- $y(t)$ é, de fato, da ordem de $d(t)/100$, isto é, de 1% da perturbação


PERTURBAÇÃO
d(t)
t


y(t)
d(t)/100
t

NOTA - REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES NA ENTRADA DA PLANTA



- Objetivo:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|d_i(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

- Mas:

$$\frac{y(j\omega)}{d_i(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)}$$

- Portanto:

$$\frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

- Ou seja:

$$\frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \frac{\delta_d(\omega)}{|G(j\omega)|} \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

- Definindo:

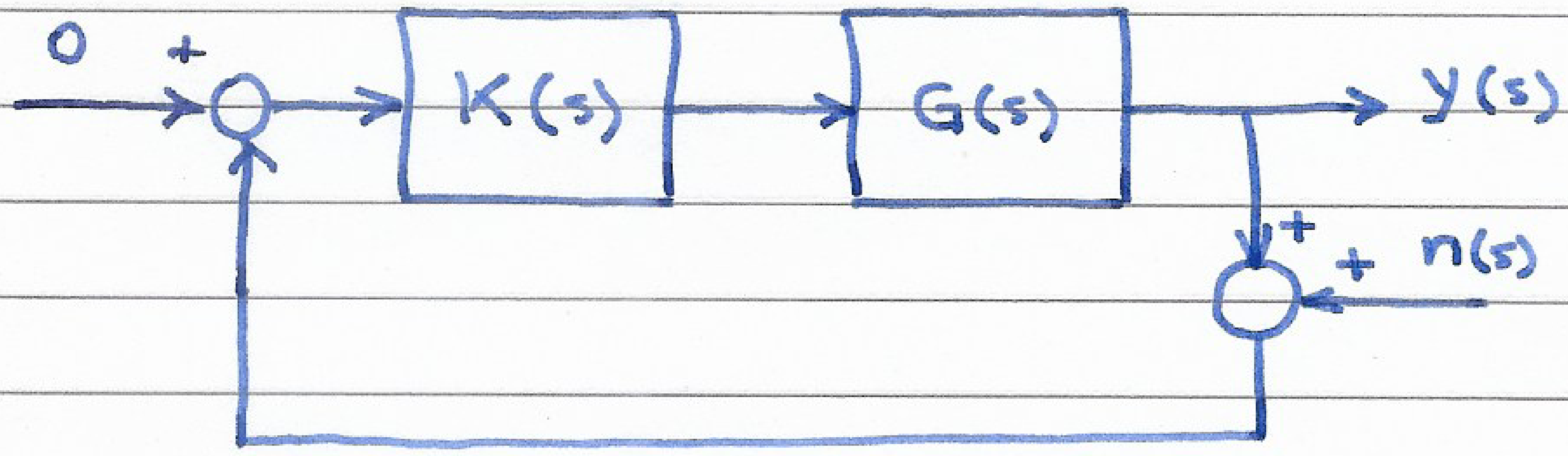
$$\frac{\delta_d(\omega)}{|G(j\omega)|} = \delta'_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

δ'_d é conhecida!

recaímos no caso anterior:

$$\frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta'_d(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_d)$$

2.5 - REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA



i) Rejeição do erro de medida

ii) Em que região de frequências o erro do sensor é significativo

2.5.1 - CONDIÇÃO DE REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

- Do diagrama de blocos:

$$y(j\omega) = -\frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)}\, n(j\omega)$$

- Conjunto de frequências onde $n(j\omega)$ é mais significativa:

$$\Omega_n = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \geq \underbrace{\omega_n}_{\text{dado}}\}$$

- Altas frequências

- Especificação de rejeição do erro de medida:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \leq \underbrace{\delta_n(\omega)}_{\text{dado}} \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

spiral

$$\therefore \frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|} = \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \right| = |T(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n)$$

Ou seja:

$$\boxed{|T(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n)} \; (H_\infty)$$

COND. DE REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

- Aproximação

Tipicamente:

$$\delta_n(\omega) << 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$\left| \frac{1+G(j\omega)K(j\omega)}{G(j\omega)K(j\omega)} \right| \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)K(j\omega)} + 1 \right| \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

Aproximando:

$$\frac{1}{|G(j\omega)K(j\omega)|} \geq \frac{1}{\delta_n(\omega)} >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_n)$$

Ou seja:

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \delta_n(\omega) << 1 \quad (\omega \in \Omega_n)} \; (\text{Loop Shaping})$$

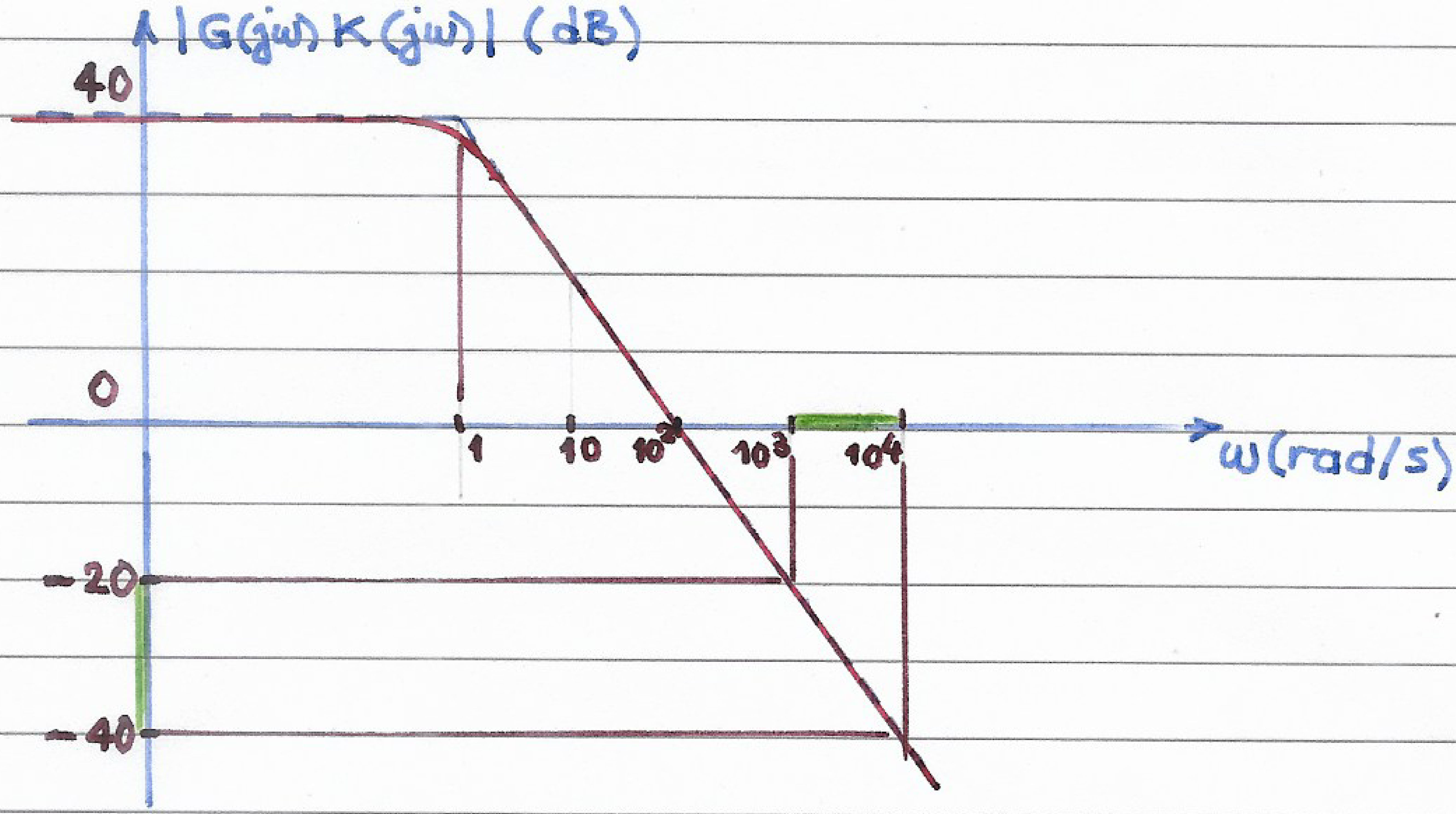
COND. DE REJEIÇÃO DO ERRO DE MEDIDA

Obs.: $|G(j\omega)K(j\omega)| << 1 \Rightarrow T(j\omega) \simeq G(j\omega)K(j\omega)$

$$S(j\omega) \simeq 1$$

EXEMPLO 2.5

$G(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad K(s) = 100$



$n(t)$:

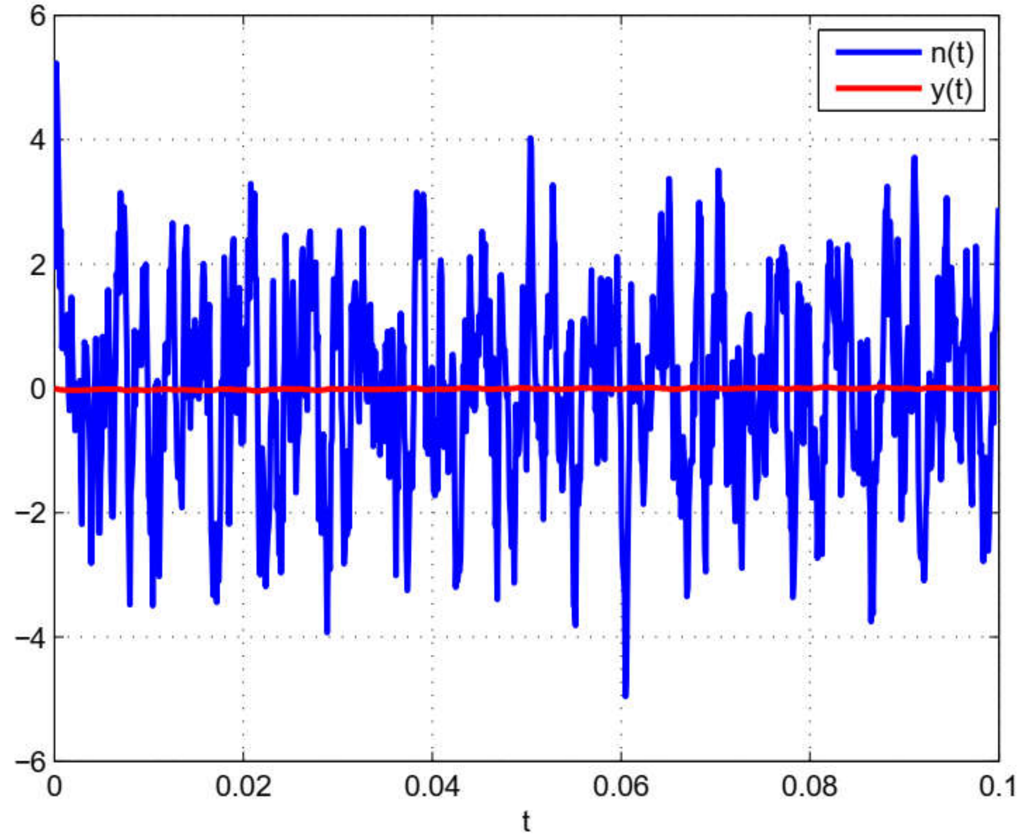
- componentes senoidais : 10
  - amplitudes aleatórias $\in [0, 1]$
  - fases aleatórias $\in [0, 2\pi]$
  - frequências $\in [10^3, 10^4]$, uniformemente espaçadas em escala logarítmica
- ruído :
  - gaussiano, 25% da amplitude de cada senóide como variância, média nula

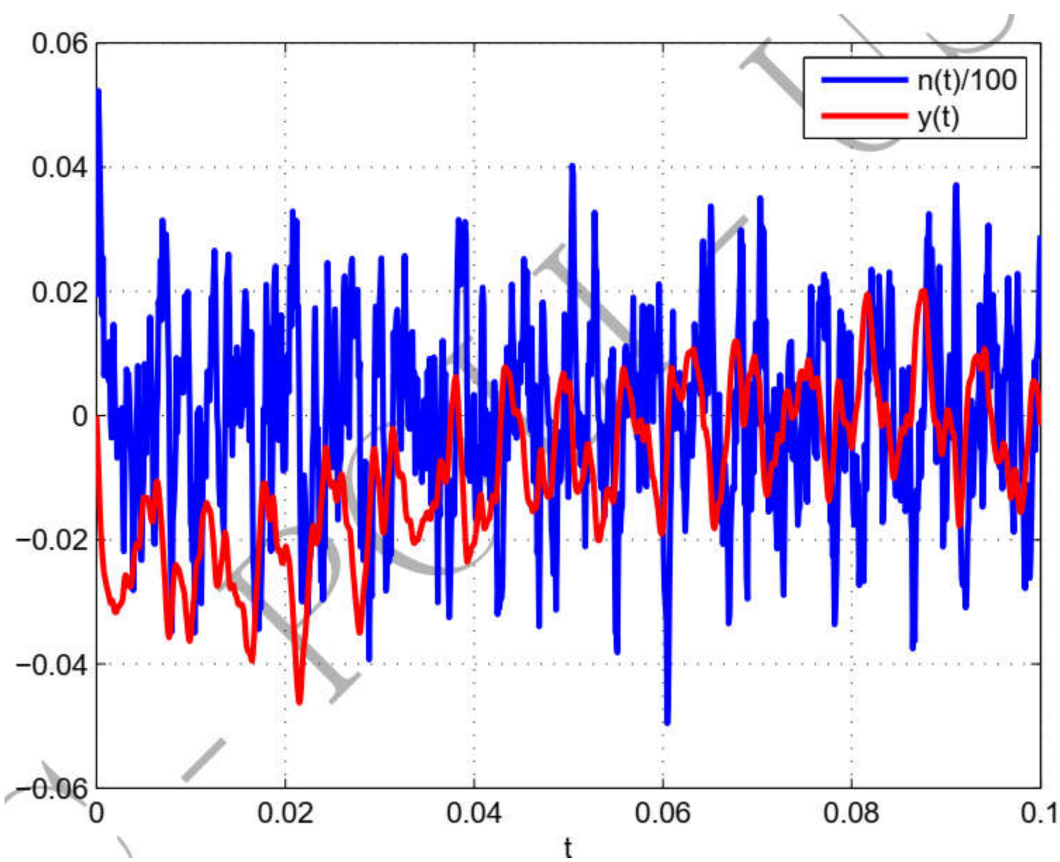
Para $\omega = 10^3$ rad/s $\Rightarrow |G(j\omega)K(j\omega)| = -20\,dB = 0{,}1$

$$\therefore \delta_n = 0{,}1$$

$$\Omega_n = \{ \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq \underbrace{10^3 \text{ rad/s}}_{\omega_n} \}$$

- Ver figuras 2.11 e 2.12 da Apostila.


n(t)
y(t)
t


n(t)/100
y(t)
t