Sequências em $\mathbb{R}^n$:

Definição: Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$

$$k \mapsto x(k) = x_k$$

notação: (x_k), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ onde $x_k \in \mathbb{R}^n$

Para cada $i = 1, \dots, n$, indicamos com x_{ki} a i-ésima coordenada de x_k.

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$$

Logo, determinar a sequência (x_k) significa determinar n sequências de números reais $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definição: Dizemos que uma sequência $(x_k)_k$ é limitada quando existe uma bola em $\mathbb{R}^n$ que contém todos os termos x_k. $(\exists\, c > 0 \mid \|x_k\| < c, \ \forall k \in \mathbb{N})$.

Ser limitada é uma propriedade da sequência, independe da norma escolhida.

Resultado: Uma sequência $(x_k)_k$ é limitada $\iff$ todas as n sequências reais $(x_{ki})_k$ formadas pelas coordenadas de x_k são também limitadas.

De fato,

como $|x_{ki}| \leq \|x_k\| = \|(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn})\|$, se $\|x_k\| \leq c$ então $|x_{ki}| \leq c$, $i = 1, \dots$

Por outro lado,

se $\|x_K\| = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_{Ki}|\}$ e $|x_{Ki}| \leq c_i$, $i = 1, \dots, n$,

considerando $c = \max\{c_1, \dots, c_n\}$, $\|x_K\| \leq c$.

Como independe da norma, (x_K) é limitada.

Definição: Uma subsequência de $(x_K)_{K \in \mathbb{N}}$ é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{K_1 < \dots < K_m < \dots\} \subset \mathbb{N}$.

Notações: $(x_K)_{K \in \mathbb{N}'}$, $(x_{K_m})_{m \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{K_1}, \dots, x_{K_m}, \dots)$.

Definição: Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x_K) quando, para todo $\varepsilon > 0$, é possível obter $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K > K_0 \Rightarrow \|x_K - a\| < \varepsilon$.

$(K > K_0 \Rightarrow x_K \in B(a; \varepsilon))$

Notação: $\lim_{K \to \infty} x_K = a$, $\lim_{K \in \mathbb{N}} x_K = a$ ou $\lim x_K = a$ $(x_K \to a)$.

Quando existe tal a, dizemos que a sequência é convergente, caso contrário, será divergente.

OBS: $\lim_{K \to \infty} x_K = a \iff \lim_{K \to \infty} \|x_K - a\| = 0$

• Dizer que $\lim x_K = a$ significa afirmar que qualquer bola de centro em a contém todos os x_K exceto, possivelmente, um número finito de valores de K. $(1, \dots, K_0)$

• Desta observação, podemos concluir que toda sequência (x_K) convergente é também limitada. ((x_K) pode ser limitada mas não ser convergente)

• Também, toda subsequência $(x_{K_m})_m$ de (x_K) é convergente se (x_K) for convergente, com mesmo limite.

• Também é fácil ver que o limite de uma sequência é único

Basta ver que

$$0 < \|a - b\| \leq \|x_K - a\| + \|x_K - b\|$$

• A noção de limite permanece a mesma, independente da norma.

Teorema: A sequência (x_K) em $\mathbb{R}^n$ converge para $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $\lim\limits_{K \to \infty} x_{Ki} = a_i$, isto é, cada coordenada de x_K converge para a coordenada correspondente de a.

Demonstração: Para cada $i = 1, \dots, n$, temos que

$$|x_{Ki} - a_i| \leq \|x_K - a\|$$

assim, se $\lim\limits_{K \to \infty} x_K = a$ então $\lim\limits_{K \to \infty} x_{Ki} = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Por outro lado, se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ K_i \in \mathbb{N}$ / $K > K_i$ então $|x_{Ki} - a_i| < \varepsilon$, para $i = 1, \dots, n$, considerando $K_0 = \max\{K_1, \ldots, K_n\}$, temos que se $K > K_0$, $|x_{K_i} - a_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Assim, $\|x_K - a\| = \max_i \{|x_{K_i} - a_i|\} < \varepsilon$ se $K > K_0$ e $\lim_{K \to \infty} x_K = a$.

Corolário: Se $\lim x_K = a$, $\lim y_K = b$ em $\mathbb{R}^n$ e $\lim \alpha_K = \alpha$ em $\mathbb{R}$, então

1) $\lim (x_K + y_K) = a + b$
2) $\lim (\alpha_K \cdot x_K) = \alpha \cdot a$
3) $\lim \|x_K\| = \|a\|$
4) $\lim \langle x_K, y_K \rangle = \langle a, b \rangle$

Demonstração:

1) Temos que:

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \bar{K} \ /\ K > \bar{K}$, $\|x_K - a\| < \varepsilon$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \bar{\bar{K}} \ /\ K > \bar{\bar{K}}$, $\|y_K - a\| < \varepsilon$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado e considere em i) $\bar{K} = \bar{K}(\varepsilon/2)$, isto é, se $K > \bar{K}$, $\|x_K - a\| < \varepsilon/2$, e também considere em ii) $\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{K}}(\varepsilon/2)$, isto é, se $K > \bar{\bar{K}}$, $\|y_K - b\| < \varepsilon/2$.

Assim, se $K_0 = \max\{\bar{K}, \bar{\bar{K}}\}$ e $K > K_0$ temos

$$\|(x_K + y_K) - (a + b)\| \leq \|x_K - a\| + \|y_K - b\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2) Consideremos $a \neq 0$. Como (α_K) é convergente, é limitada, dessa forma, existe $m > 0$ / $|\alpha_K| \leq m$, $\forall K$.

Sabemos que:

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \bar{k} \in \mathbb{N}$ / $k > \bar{k}$, $|\alpha_k - \alpha| < \varepsilon$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \bar{\bar{k}} \in \mathbb{N}$ / $k > \bar{\bar{k}}$, $\|x_k - a\| < \varepsilon$

Seja $\varepsilon > 0$ dado.

$$\|\alpha_k x_k - \alpha a\| = \|\alpha_k x_k - \alpha_k a + \alpha_k a - \alpha a\| \leq$$

$$\leq |\alpha_k|\,\|x_k - a\| + |\alpha_k - \alpha|\,\|a\|$$

Em i) considere $\bar{k} = \bar{k}(\varepsilon/2\|a\|)$ e em ii) considere $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{k}}(\varepsilon/2M)$, assim, se $k_0 = \max\{\bar{k}, \bar{\bar{k}}\}$ e $k > k_0$, então

$$|\alpha_k|\,\|x_k - a\| + |\alpha_k - \alpha|\,\|a\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \|a\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|a\|} = \varepsilon$$

Logo, $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k x_k = \alpha a$.

O caso $\|a\| = 0$ fica como exercício

3) e 4) Exercício.

Teorema (Bolzano - Weierstrass) Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.

Demonstração :

Seja (x_k) uma seqüência limitada em $\mathbb{R}^n$. Todas suas "seqüências coordenadas" são limitadas.

Sendo $(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$ limitada, (x_{k1}) possui uma subseqüência convergente (usando este resultado p/ seqüências reais); digamos $(x_{k1})_{k\in N_1}$, com $N_1 \subset \mathbb{N}$ sendo um subconjunto infinito dos naturais. $\left(\lim\limits_{k\in N_1} x_{k1} = a_1\right)$

Agora, $(x_{k2})_{k\in N_1}$ é uma seq. limitada e possui uma subseqüência convergente, digamos $(x_{k2})_{k\in N_2}$, onde $N_2 \subset N_1 \subset \mathbb{N}$ é também um subconjunto infinito dos números naturais. Seja $a_2 = \lim\limits_{k\in N_2} x_{k2}$. Obviamente, $\lim\limits_{k\in N_2} x_{k1} = a_1$.

Continuando com o mesmo raciocínio, obtemos n subconjuntos infinitos,

$$N_n \subset N_{n-1} \subset \dots \subset N_2 \subset N_1 \subset \mathbb{N}$$

com $\lim\limits_{k\in N_n} x_{ki} = a_i$, $i = 1,\dots,n$.

Assim, $\lim\limits_{k\in N_n} x_k = a = (a_1,\dots,a_n)$.

Definição: Uma sequência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^n$ chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, r > k_0 \Rightarrow \| x_k - x_r \| < \varepsilon$$

Teorema: Toda sequência de Cauchy é limitada

Demonstração:

Consideramos $\varepsilon = 1$ temos, para $k > k_0 = k_0(1)$, $\| x_k - x_{k_0+1} \| < 1$

Assim, se $k > k_0$, $x_k \in B(x_{k_0+1}; 1)$, de tal forma que apenas uma quantidade finita de elementos da sequência estão fora dessa bola.

Conseguimos, assim, $r > 0 \mid x_k \in B(0; r)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, o que implica que (x_k) é limitada.

Teorema (Critério de Cauchy): Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Demonstração: Se (x_k) é convergente, digamos $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, então, como $\| x_k - x_r \| \leq \| x_k - a \| + \| x_r - a \|$, temos que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}} \| x_k - x_r \| = 0$, isto é, (x_k) é de Cauchy.

Agora, consideremos (x_k) uma sequência de Cauchy e vamos mostrar que ela é convergente. Já sabemos que (x_k) é limitada, logo, possui uma subsequência convergente, digamos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$, com $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}_1} x_k = a$.

Desta forma, i) existe $K_1 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N} \mid K \in \mathbb{N}_1$ e $K > K_1 \Rightarrow \|x_K - a\| < \varepsilon/2$

ii) Como (x_K) é de Cauchy, $\exists\, K_0 \in \mathbb{N} \mid K, n > K_0 \Rightarrow \|x_K - x_n\| < \varepsilon/2$

Considerando $\varepsilon > 0$ dado, considere $\tilde{K} \in \mathbb{N}_1$ com $\tilde{K} > K_1$ e $\tilde{K} > K_0$ de tal forma que i) e ii) estão satisfeitas. Daí,

$$\|x_K - a\| = \|x_K - x_{\tilde{K}}\| + \|x_{\tilde{K}} - a\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ se } K > K_0.$$

Exercício 2 (Entregar)

a) Sejam $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ e $\|x\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Prove que existem constantes A e B tais que

$$A\|x\|_m \leq \|x\| \leq B\|x\|_m$$

b) Se $|\cdot|$ é qualquer norma em $\mathbb{R}^n$, mostre que existem constantes A e B positivos tais que

$$A\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$