

2 - Distribuição Normal Multivariada

Rao - Capítulo 8

Pasta 1

03/03

I

Def

Um vetor aleatório p -dimensional $\underline{U}$ tem distribuição normal p -variada se e somente se toda combinação linear dos elementos de $\underline{U}$ tem distribuição normal univariada.

$$\underline{U} \sim N_p \iff \underline{t}' \underline{U} \sim N_1, \forall \underline{t} \in \mathbb{R}^p$$

Consequências

1 - $E(\underline{U})$ e $\text{Var}(\underline{U})$ existem.

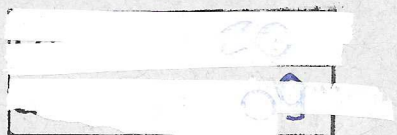
Induando $E(\underline{U}) = \underline{\mu}$ e $\text{Var}(\underline{U}) = \underline{\Sigma}$, então

$$\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}).$$

Fixado $\underline{t} \in \mathbb{R}^p$, vetor de constantes, $\underline{t}' \underline{U} \sim N_1(\underline{t}' \underline{\mu}, \underline{t}' \underline{\Sigma} \underline{t})$

2 - A função geradora de momentos de $\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ é

$$m_{\underline{U}}(\underline{t}) = E(e^{\underline{t}' \underline{U}}) = \exp \left[\underline{t}' \underline{\mu} + \frac{1}{2} \underline{t}' \underline{\Sigma} \underline{t} \right]$$



S/A

Teorema

II

Se $\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ e $r(\underline{\Sigma}) = p$, então, a função densidade de probabilidades de $\underline{U}$ é

$$f(\underline{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\underline{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{u} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{u} - \underline{\mu}) \right\}$$

$$\underline{u} \in \mathbb{R}^p$$

Obs: Se $r(\underline{\Sigma}) < p$, $|\underline{\Sigma}| = 0$, $\nexists \underline{\Sigma}^{-1}$, $f(\underline{u})$ não é definida desta forma ($\underline{U}$ tem distribuição normal singular).

dearle pag 66

Rao pag 527

Resultados

$$1 - \underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}), \quad \underline{U}' = (U_1, U_2, \dots, U_p)$$

Se $\underline{\Sigma} = \Delta$ matriz diagonal, $U_1, U_2, \dots, U_p$ são variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição normal univariada.

Reciprocamente, se $U_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, p$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

onde $\underline{\mu}' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ e

III

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$$

2- sejam $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ dois subvetores de $\underline{U}$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \text{Var}(\underline{U}) = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{U}_1) & \text{Cov}(\underline{U}_1, \underline{U}_2) \\ \text{Cov}(\underline{U}_2, \underline{U}_1) & \text{Var}(\underline{U}_2) \end{bmatrix}$$

Nestas condições, $\underline{U}_1$ e $\underline{U}_2$ são independentes se e somente

se $\Sigma_{12} = 0$.

3- se $\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_k \end{pmatrix}$ e $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_k$ são dois a dois indepen-

dentes então eles são mutuamente independentes.

4- se $\underline{U} \sim N_p$, a distribuição marginal de qualquer subconjunto de q componentes de $\underline{U}$ é N_q (normal q -variada).

Assim, se

IV

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

$\underline{U}_1, \underline{\mu}_1$ vetores $q \times 1$, $\underline{\Sigma}_{11}$ matriz $q \times q$, então

$$\underline{U}_1 \sim N_q(\underline{\mu}_1, \underline{\Sigma}_{11})$$

5. Se $\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ e A é uma matriz de constantes $m \times p$,
 $r(A) = m \leq p$, então

$$\underline{Y} = A \underline{U} \sim N_m(A \underline{\mu}, A \underline{\Sigma} A')$$

$\underline{Y}$ contém m combinações lineares dos elementos de $\underline{U}$

6. Sejam $\underline{U}_i \sim N_p(\underline{\mu}_i, \underline{\Sigma}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ vetores aleatórios independentes e $a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes. Nestas condições,

$$\underline{Y} = a_1 \underline{U}_1 + a_2 \underline{U}_2 + \dots + a_n \underline{U}_n \sim N_p\left(\sum a_i \underline{\mu}_i, \sum a_i^2 \underline{\Sigma}_i\right)$$

Consequências: $\underline{U}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ independentes e identicamente distribuídos $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$. Então

$$\bar{\underline{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{U}_i \sim N_p\left(\underline{\mu}, \frac{1}{n} \underline{\Sigma}\right)$$

7- Se $\underline{U}_1$ e $\underline{U}_2$ são dois vetores aleatórios p-dimensionais independentes tais que

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \sim N_p$$

então $\underline{U}_1$ e $\underline{U}_2 \sim N_p$.

8- Sejam $\underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$ duas combinações lineares de n vetores aleatórios p-dimensionais $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_n$,

$$\underline{V}_1 = a_1 \underline{U}_1 + a_2 \underline{U}_2 + \dots + a_n \underline{U}_n,$$

$$\underline{V}_2 = b_1 \underline{U}_1 + b_2 \underline{U}_2 + \dots + b_n \underline{U}_n.$$

Se $\underline{A}' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\underline{B}' = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, então

a) $\underline{U}_i$ são indep e identicamente distribuídos $\sim N_p$

e $\underline{A}' \underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$ são independentes

b) $\underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$ são independentes $\Rightarrow \underline{U}_i \sim N_p$ para todo

i tal que $a_i b_i \neq 0$

Exemplo de a)

$$(p=1) \quad Y_1 = X_1 + X_2$$

$$n=2 \quad Y_2 = X_1 - X_2$$

X_1 e X_2 indep, $\sim N_1 \Rightarrow Y_1$ e Y_2 são independentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

9- Se $\underline{U}_1$ e $\underline{U}_2$ são independentes,

$$\underline{U}_1 \sim N_{q_1}(\underline{\mu}_1, \underline{\Sigma}_{11}) \text{ e } \underline{U}_2 \sim N_{q_2}(\underline{\mu}_2, \underline{\Sigma}_{22})$$

$$\text{então } \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \sim N_{q_1+q_2} \left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \right)$$

10- Sejam $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ vetores aleatórios independentes, p -dimensionais, com $\underline{X}_j \sim N_p(\underline{\mu}_j, \underline{\Sigma})$, $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Se } \underline{V}_1 = c_1 \underline{X}_1 + c_2 \underline{X}_2 + \dots + c_n \underline{X}_n \text{ e}$$

$$\underline{V}_2 = b_1 \underline{X}_1 + b_2 \underline{X}_2 + \dots + b_n \underline{X}_n, \text{ então}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} \sim N_{2p} \left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_j \underline{\mu}_j \\ \sum_{j=1}^n b_j \underline{\mu}_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_j^2 \underline{\Sigma} & \underline{b}' \underline{c} \underline{\Sigma} \\ \underline{b}' \underline{c} \underline{\Sigma} & \sum_{j=1}^n b_j^2 \underline{\Sigma} \end{bmatrix} \right)$$

$$\underline{b}' = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \underline{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Obs: $\underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$ são independentes se e somente se $\underline{b}' \underline{c} = 0$.

Distribuições Condicionais na Normal Multivariada
graybill - Cap 3

VII⁵

$$\underline{U} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}) \quad r(\underline{\Sigma}) = p$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$\underline{U}_1$ e $\underline{\mu}_1$ vetores $q \times 1$, $0 < q < p$

Σ_{11} matriz $q \times q$

A distribuição condicional de $\underline{U}_1$ dado $\underline{U}_2 = \underline{c}_2$, onde $\underline{c}_2$ é um vetor de constantes é Normal q -variada com média $\underline{\mu}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underline{c}_2 - \underline{\mu}_2)$ e matriz de covariância $\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$.

Obs.

- A matriz de covariância da distribuição condicional não depende de $\underline{c}_2$.
- A média desta distribuição condicional depende de $\underline{c}_2$, a menos que $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$, caso em que $\underline{U}_1$ e $\underline{U}_2$ são independentes.

VIII
9

- A matriz de covariância da distribuição condicional não depende de $\underline{z}_2$.

Os elementos da matriz de covariância $\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$ são chamados variâncias e covariâncias parciais pois medem a variabilidade e a dependência entre as variáveis presentes em $\underline{V}_1$ fixados os valores de $\underline{V}_2$.

Se $\sigma_{ij, q+1, \dots, p}$ é o elemento i, j desta matriz, o coeficiente de correlação parcial entre a i -ésima e a j -ésima variável de $\underline{V}_1$ fixadas todas as variáveis de $\underline{V}_2$ é definido como

$$\rho_{ij, q+1, q+2, \dots, p} = \frac{\sigma_{ij, q+1, q+2, \dots, p}}{\sqrt{\sigma_{ii, q+1, \dots, p} \times \sigma_{jj, q+1, \dots, p}}}$$

IX

$$E[\underline{U}_1 | \underline{U}_2 = \underline{c}_2] = \underline{\mu}_1 + \underline{\Sigma}_{12} \underline{\Sigma}_{22}^{-1} (\underline{c}_2 - \underline{\mu}_2)$$

$E[\underline{U}_1 | \underline{U}_2 = \underline{c}_2]$ - regressão de $\underline{U}_1$ em $\underline{U}_2$

$$\begin{aligned} E[\underline{U}_1 | \underline{U}_2 = \underline{c}_2] &= \underbrace{\underline{\mu}_1 - \underline{\Sigma}_{12} \underline{\Sigma}_{22}^{-1} \underline{\mu}_2}_{\underline{B}_0} + \underbrace{\underline{\Sigma}_{12} \underline{\Sigma}_{22}^{-1}}_{\underline{B}_1} \underline{c}_2 \\ &= \underline{B}_0 + \underline{B}_1 \underline{c}_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Na normal multivariada, a regressão de $\underline{U}_1$ em $\underline{U}_2$ é linear em $\underline{B}_1$ e $\underline{B}_0$ (parâmetros)

$\underline{B}_0$ - vetor $q \times 1$

$\underline{B}_1$ - matriz $q \times (p-q)$

$q=1 \rightarrow$ Regressão de U_1 (escalar) em $\underline{U}_2$ (vetor com $p-q$ variáveis) : Regressão Univariada (uma v. resposta)

$q > 1$ Regressão Multivariada ($q > 1$ variáveis respostas)