

1.4. Distribuições de Formas Quadráticas (aleatórias)

1

Definição

O vetor aleatório p -dimensional $\underline{X}$ tem distribuição normal p -variada com média $\underline{\mu}$ e matriz de covariância Σ , positiva definida ($\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$) se $r(\Sigma) = p$

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right\}$$

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p$

Teorema 1

$$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma), \quad \underbrace{\underline{X}' A \underline{X}}_{p \times p} \sim \chi^2_{r(A)}, \quad \frac{1}{2} \underline{\mu}' A \underline{\mu} \quad \text{se e somente se}$$

$A\Sigma$ é idempotente. ($A\Sigma A\Sigma = A\Sigma$)

Teorema 2 (Independência entre Forma Quadrática e Linear)

$$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma), \quad \underbrace{\underline{X}' A \underline{X}}_{q \times p} \text{ e } \underbrace{B \underline{X}}_{q \times 1} \text{ são independentes se e}$$

$$\text{somente se } \underbrace{B \Sigma A}_{q \times p} = \underbrace{O}_{q \times p}.$$

$A \Sigma B$ pode nem ser possível

Obs: $\underline{X}' A \underline{X}$ não precisa ter distribuição χ^2 para o Teorema ser aplicado

Teorema 3 (Independência entre duas formas quadráticas)

$$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

As formas quadráticas $\underline{X}'\underline{A}\underline{X}$ e $\underline{X}'\underline{B}\underline{X}$ são independentes se e somente se $\underline{A}\underline{B} = \underline{0}$ (ou equivalentemente $\underline{B}\underline{A} = \underline{0}$).

Obs: Não é necessário que as formas quadráticas tenham distribuições χ^2 .

Teorema 4 (Teorema de Cochran e Fisher)

Sejam $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{I}_p)$ e A_i matrizes simétricas com $r(A_i) = n_i$, $i = 1, 2, \dots, K$ e $\sum_{i=1}^K A_i = \underline{I}_p$ de modo que

$$\underline{X}'\underline{X} = \underline{X}'A_1\underline{X} + \underline{X}'A_2\underline{X} + \dots + \underline{X}'A_K\underline{X}.$$

Nestas condições, $\underline{X}'A_i\underline{X}$, $i = 1, 2, \dots, K$, são independentes e $\underline{X}'A_i\underline{X} \sim \chi_{n_i, \lambda_i}^2$ com $\lambda_i = \frac{1}{2} \underline{\mu}'A_i\underline{\mu}$

se e somente se

$$\sum_{i=1}^K n_i = p.$$

Este teorema é consequência do Teorema 5. a pag 62, Searle.

Momentos de Formas Quadráticas

$\underline{X}$ vetor aleatório p -dimensional com $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ e

$$\text{Var}(\underline{X}) = \underline{\Sigma}$$

$$1 - E(\underline{X}' A \underline{X}) = \text{tr}(A \underline{\Sigma}) + \underline{\mu}' A \underline{\mu}$$

Este resultado é importante para calcular esperança de somas de quadrados.

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ então

$$2 - \underset{p \times 1}{\text{Cov}}(\underset{1 \times p}{\underline{X}}, \underset{1 \times p \times p \times p}{\underline{X}' A \underline{X}}) = 2 \underset{p \times p}{\underline{\Sigma}} \underset{p \times p}{A} \underset{p \times 1}{\underline{\mu}}$$

$$3 - \text{Var}(\underline{X}' A \underline{X}) = 2 \text{tr}[(A \underline{\Sigma})^2] + 4 \underline{\mu}' A \underline{\Sigma} A \underline{\mu}.$$

Com relação aos Teoremas 1, 2 e 3 observem que as formas lineares e quadráticas são sempre relativas a um vetor aleatório $\underline{X}$, p -dimensional tal que $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

$\underline{X}' A \underline{X}$ é uma variável aleatória unidimensional.

Nal pois $\underline{X}' = 1 \times p$ $A = p \times p$ $\underline{X} = p \times 1$ $\underbrace{1 \times p \quad p \times p \quad p \times 1}_{1 \times 1}$

Já, $B \underline{X}$ é um vetor aleatório q -dimensional

pois $B = q \times p$ $\underline{X} = p \times 1$ $B \underline{X} = q \times p \quad p \times 1$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{q \times 1}$

Dois interessantes exemplos de aplicações dos Teoremas 1 e 2: Em cursos de Inferência Estatística (geralmente do 2º ano do Bacharelado em Estatística) são apresentados os seguintes resultados:

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição normal com média μ e variância σ^2 então

$$1) \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

[distribuição qui-quadrado com $n-1$ gl]

5

2) $\bar{X}$ e S^2 são variáveis aleatórias independentes.

Existem inúmeras demonstrações desses resultados (principalmente do 2)) em artigos e livros.

Com a utilização do Teorema 1, provamos de forma rápida o resultado 1).

É importante observar que esses teoremas, em geral, não são dados em cursos básicos de Inferência a nível de graduação. Vamos desenvolver a demonstração do resultado 1), utilizando o Teorema 1, a título de ilustração. Os três teoremas serão úteis para o Tópico 3 do curso.

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então $X_1, X_2, \dots, X_n$ são v.a. independentes, cada uma delas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Portanto, a distribuição conjunta de $X_1, X_2, \dots, X_n$ é o produto das marginais. Calculando-se esse produto, identificamos essa conjunta como a densidade de um vetor aleatório $\tilde{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]'$ com distribuições Normal

6
 n -variada com vetor de médias

$$\underline{\mu} = [\mu \ \mu \ \dots \ \mu]'$$

e matriz de covariância $\sigma^2 I_n$.

Portanto, podemos utilizar o Teorema 1. Por esse teorema

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\underline{X}' A \underline{X}}{\sigma^2} \sim \chi^2 \Leftrightarrow \frac{A}{\sigma^2} \sigma^2 I_n \text{ é idempotente}$$

Verifica-se que $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \underline{X}' A \underline{X}$ para

$$A = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e A pode ser escrita como $\left[I_n - \frac{1}{n} \underline{1} \underline{1}' \right]$

onde $\underline{1}' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ vetor contendo 1 em todas as n posições. A matriz $\underline{1} \underline{1}'$ é a matriz

$n \times n$ contendo o valor 1 em todas as posições.

$\frac{A}{6^2} 6^2 I = A$ é idempotente pois

$$\begin{aligned} AA &= \left[I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right] \left[I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right] = \\ &= I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' + \frac{1}{n^2} \underbrace{\mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{1} \mathbf{1}'}_n = \\ &= I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' = A. \end{aligned}$$

Devemos agora calcular os parâmetros dessa distribuição qui-quadrado.

O número de graus de liberdade é $r\left(\frac{A}{6^2}\right) = r(A)$
 $= \text{posto}(A)$.

O parâmetro de não centralidade é

$$\frac{1}{2} \mathbf{M}' \frac{A}{6^2} \mathbf{M}.$$

Cálculo de $r(A)$

Se A é simétrica e idempotente verifica-se que

$$r(A) = \text{traço de } A,$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \left[I_n - \frac{1}{n} \underline{1} \underline{1}' \right] = \text{tr}(I_n) - \text{tr} \left(\frac{1}{n} \underline{1} \underline{1}' \right)$$

$$= n - \frac{1}{n} \text{tr}(\underline{1} \underline{1}') = n - \frac{1}{n} \times n = n - 1$$

$\therefore$ a distribuição é qui-quadrado com $n-1$ gl.

Cálculo do parâmetro de não centralidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\underline{\mu}' A \underline{\mu}}{s^2} &= \frac{1}{2s^2} [\underline{\mu} \ \underline{\mu} \ \dots \ \underline{\mu}] \left[I - \frac{1}{n} \underline{1} \underline{1}' \right] \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\mu} \\ \vdots \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2s^2} \left[n\mu^2 - \frac{1}{n} n\mu n\mu \right] = \frac{1}{2s^2} [n\mu^2 - n\mu^2] = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{(n-1)s^2}{s^2} \sim \chi_{n-1}^2$ (central porque o parâmetro de não centralidade é zero). $\square$

O resultado 2) é o exercício 23 da lista de exercícios 2

2- Distribuição Normal Multivariada

9

O assunto deste tópico, distribuição normal multivariada, faz parte do programa, mas nem tudo o que está no arquivo é imprescindível para o curso.

A definição da página I é a definição mais sofisticada de distribuição normal multivariada.

O teorema da página II é consequência desta definição e só a partir daí, temos a função densidade do vetor aleatório p -dimensional com distribuição normal p -variada.

A situação em que $|\Sigma| = 0$ surge basicamente do caso em que existem relações lineares entre as variáveis aleatórias presentes no vetor aleatório V . Neste caso, a matriz de covariância Σ não é positiva definida, é positiva semi-definida e a distribuição normal associada é a distribuição normal singular.

Esta distribuição não será usada nesse curso. Se necessário, consultar as referências Searle e Rao.

As propriedades mais importantes são as de 1) a 6).

As propriedades de 1) a 8) foram retiradas do livro do Rao.

Já as propriedades 9) e 10) são do livro de Análise Multivariada - Johnson and Wichern.

Para distribuições condicionais na normal multivariada, página VII em diante, utilizei o livro do Graybill.