Capítulo 6

Variáveis Aleatórias Discretas

6.1 Introdução

No capítulo anterior introduzimos alguns modelos probabilísticos por meio de espaços amostrais bem simples. Isso facilitou bastante a compreensão do conceito de probabilidade e a obtenção de algumas propriedades. Mas, para atender a situações práticas mais gerais, necessitamos ampliar esses conceitos para que tenhamos modelos probabilísticos que representem todos os tipos de variáveis definidas no Capítulo 2. Muito do que foi apresentado naquele capítulo para tratamento descritivo das variáveis terá o seu correspondente no modelo teórico.

Para as variáveis qualitativas, a descrição de probabilidades associadas a eventos construída no capítulo precedente adapta-se muito bem. Dada a sua simplicidade, trataremos aqui de variáveis quantitativas discretas. Já os modelos para variáveis contínuas necessitarão de um artifício matemático, baseado em uma generalização do conceito de histograma, definido na seção 2.3, e esse será o objetivo do próximo capítulo. A extensão dos modelos para várias variáveis será tratada no Capítulo 8.

Por outro lado, quando estudamos a descrição de dados, vimos que os recursos disponíveis para a análise das variáveis quantitativas são muito mais ricos do que para as variáveis qualitativas. Isso sugere o uso de artifícios para transformar essas últimas variáveis naquelas do primeiro tipo. Por exemplo, considere o caso de um questionário em que uma pessoa é indagada a respeito de uma proposição, e as respostas possíveis são *sim* ou *não*. Podemos associar ao problema uma variável que toma dois valores, 1 ou 0, por exemplo, correspondentes às respostas *sim* ou *não*, respectivamente. Esse tipo de variável será estudado neste capítulo.

O conhecimento de modelos probabilísticos para variáveis quantitativas é muito importante, e grande parte do restante deste livro será dedicada à construção desses modelos e inferências sobre seus parâmetros. Essas variáveis, para as quais iremos construir modelos probabilísticos, serão chamadas de *variáveis aleatórias* (v.a.).

6.2 O Conceito de Variável Aleatória Discreta

O conceito de v.a. discreta será introduzido por meio de um exemplo.

Exemplo 6.1. Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma idéia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto. Esses valores estão na Tabela 6.1.

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, como seria a distribuição de freqüências da variável X: lucro por conjunto montado?

Tabela 6.1: Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Produto		Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações	bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações	longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações	curto (C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas *A* e *B*.

A construção dessa distribuição de freqüências vai depender de certas *suposições* que faremos sobre o comportamento do sistema considerado. Com base nessas suposições, estaremos trabalhando com um *modelo* da realidade, e a distribuição que obtivermos será uma distribuição teórica, tanto mais próxima da distribuição de freqüências real quanto mais fiéis à realidade forem as suposições.

Primeiramente, vejamos a construção do espaço amostral para a montagem dos conjuntos segundo as características de cada componente e suas respectivas probabilidades. Como os componentes vêm de fábricas diferentes, vamos supor que a classificação dos cilindros e a da esfera, segundo suas características, sejam eventos independentes. Obteremos a configuração da Figura 6.1.

Uma representação do espaço amostral em questão está apresentada na Tabela 6.2 e foi obtida da Figura 6.1.

Figura 6.1: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.1.

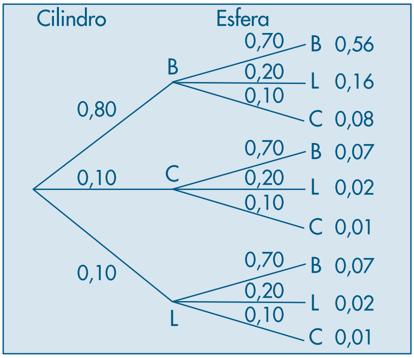


Tabela 6.2: Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens.

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	–5
LB	0,07	10
LL	0,02	5
LC	0,01	–5
CB	0,07	–5
CL	0,02	–5
CC	0,01	–5

Fonte: Figura 5.1 e informações no texto.

A última coluna da Tabela 6.2 foi construída com base nas informações sobre preços. Por exemplo, obtendo uma montagem LB (cilindro longo e esfera boa), do preço de venda $25,00 devemos descontar: $10,00 dos custos dos componentes e $5,00 para recuperar o cilindro longo. Portanto, o lucro X desse conjunto será $10,00. Verifique os lucros das demais montagens.

Com os dados da Tabela 6.2, vemos que X pode assumir um dos seguintes valores:

$$\begin{aligned} 15&, \text{ se ocorrer o evento } A_1 = \{BB\}; \\ 10&, \text{ se ocorrer o evento } A_2 = \{BL, LB\}; \\ 5&, \text{ se ocorrer o evento } A_3 = \{LL\}; \\ -5&, \text{ se ocorrer o evento } A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\}. \end{aligned}$$

Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$$P(A_1) = 0{,}56, \quad P(A_2) = 0{,}23,$$
$$P(A_3) = 0{,}02, \quad P(A_4) = 0{,}19,$$

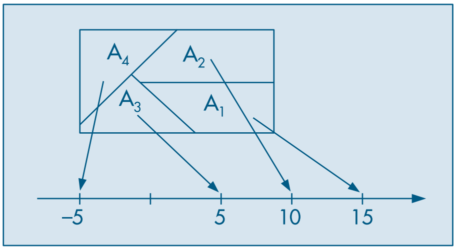
o que nos permite escrever a função $(x, p(x))$ da Tabela 6.3, que é um modelo teórico para a distribuição da variável X, que o empresário poderá usar para julgar a viabilidade econômica do projeto que ele pretende realizar. Aqui, x é o valor da v.a. X e $p(x)$ é a probabilidade de X tomar o valor x. Voltaremos a esse problema mais adiante.

Tabela 6.3: Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

A função $(x, p(x))$ é chamada *função de probabilidade* da v.a. X. Esquematicamente teremos a situação da Figura 6.2.

Figura 6.2: Função de probabilidade da v.a. X = lucro por montagem.



É evidente que, ao mesmo espaço amostral da Tabela 6.2, podemos associar outras variáveis aleatórias, como veremos a seguir.

Exemplo 6.2. Se considerarmos Y como sendo a variável "custo de recuperação de cada conjunto produzido", verificaremos que Y irá assumir os valores

$$\begin{aligned} &0, \text{ se ocorrer o evento } B_1 = \{BB, BC, LC, CB, CL, CC\};\\ &5, \text{ se ocorrer o evento } B_2 = \{BL, LB\};\\ &10, \text{ se ocorrer o evento } B_3 = \{LL\}. \end{aligned}$$

A função de probabilidade da v.a. Y está representada na Tabela 6.4 e a Figura 6.3 representa a situação esquematicamente.

Figura 6.3: Função de probabilidade da v.a. Y = custo de recuperação.

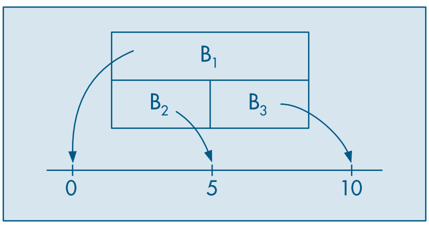


Tabela 6.4: Distribuição da v.a. Y.

y	$p(y)$
0	0,75
5	0,23
10	0,02
Total	1,00

Deduz-se do exposto que uma v.a. X, do tipo discreto, estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores x_1, x_2, ..., x_n, ... que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$, ..., ou seja, se conhecermos a sua função de probabilidade $(x, p(x))$. Também usaremos a notação $p(x) = P(X = x)$.

Em algumas situações, a determinação da função de probabilidade (f.p.) é bem mais simples. Isso pode ser verificado pelos dois exemplos seguintes.

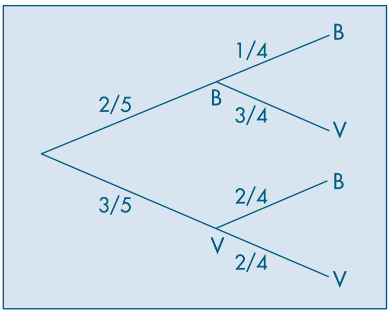
Exemplo 6.3. Voltemos à situação do Exemplo 5.10, em que consideramos duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Definamos a v.a. X: número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações. Obtemos a Tabela 6.5 e a Figura 6.4.

Tabela 6.5: Extrações sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Resultados	Probabilidades	X
BB	1/10	0
BV	3/10	1
VB	3/10	1
VV	3/10	2

Fonte: Figura 6.4.

Figura 6.4: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.3.



Vemos, pois, que a cada resultado do experimento está associado um valor da v.a. X, a saber, 0, 1 ou 2.

Temos que $X = 0$, com probabilidade 1/10, pois $X = 0$ se, e somente se, ocorre o resultado BB; $X = 1$ com probabilidade $3/10 + 3/10 = 6/10$, pois $X = 1$ se, e somente se, ocorrem os resultados BV ou VB, que são mutuamente exclusivos; finalmente, $X = 2$ com probabilidade 3/10, pois $X = 2$ se, e somente se, ocorre o resultado VV. Resumidamente,

$$p(0) = P(X = 0) = P(BB) = 1/10,$$
$$p(1) = P(X = 1) = P(BV \text{ ou } VB) = 6/10,$$
$$p(2) = P(X = 2) = P(VV) = 3/10.$$

Na Tabela 6.6 apresentamos a distribuição de probabilidades da v.a. X.

Tabela 6.6: Distribuição de probabilidades da v.a. X = número de bolas vermelhas.

x	$p(x)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Fonte: Tabela 6.5.

Exemplo 6.4. Retomemos o Exemplo 5.3, em que consideramos o lançamento de uma moeda duas vezes. Definamos a v.a. Y: número de caras obtidas nos dois lançamentos. Temos, então:

$$p(0) = P(Y = 0) = P(RR) = 1/4,$$
$$p(1) = P(Y = 1) = P(CR \text{ ou } RC) = 1/4 + 1/4 = 1/2,$$
$$p(2) = P(Y = 2) = P(CC) = 1/4.$$

Na Tabela 6.7 e Figura 6.5 temos esquematizado o que ocorre e na Tabela 6.8 apresentamos a distribuição de probabilidades de Y.

Tabela 6.7: Lançamento de duas moedas.

Resultados	Probabilidades	Y
CC	1/4	2
CR	1/4	1
RC	1/4	1
RR	1/4	0

Fonte: Figura 6.5.

Figura 6.5: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.4.

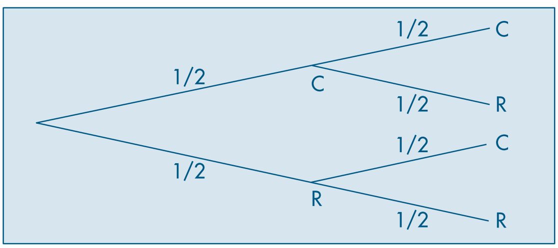


Tabela 6.8: Distribuição da v.a. Y = número de caras.

y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

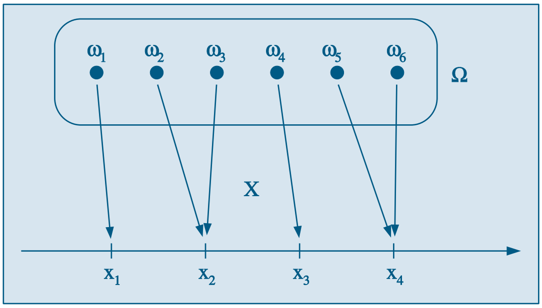
Fonte: Tabela 6.7.

Dos exemplos apresentados, vemos que, a cada ponto do espaço amostral, a variável sob consideração associa um valor numérico, o que corresponde em Matemática ao conceito de função, mais precisamente, a uma função definida no espaço amostral Ω e assumindo valores reais.

Definição. Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta.

Esquematicamente, teremos a situação da Figura 6.6.

Figura 6.6: Definição de uma v.a.



Vimos, também, como associar a cada valor x_i da v.a. X sua probabilidade de ocorrência. Ela é dada pela probabilidade do evento A de Ω, cujos elementos correspondem ao valor x_i (veja Figuras 6.2 e 6.3). Matematicamente, podemos escrever

$$P(X = x_i) = P(A),$$

onde

$$A = \{\omega_1, \omega_2, ...\} \subset \Omega$$

é tal que $X(\omega_i) = x_i$, se $\omega_i \in A$ e $X(\omega_i) \neq x_i$, se $\omega_i \in A^c$.

Definição. Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, a função $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, ...\}$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \; i = 1, 2, ...$$

Problemas

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a v.a. X igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de X.
2. Repita o problema anterior, mas considerando extrações com reposição.
3. Suponha que uma moeda perfeita é lançada até que cara apareça pela primeira vez. Seja X o número de lançamentos até que isso aconteça. Obtenha a distribuição de X. (Observe que, nesse problema, pelo menos teoricamente, X pode assumir um número infinito de valores.) Veja também o Problema 55.
4. Uma moeda perfeita é lançada quatro vezes. Seja Y o número de caras obtidas. Calcule a distribuição de Y.
5. Repita o problema anterior, considerando agora que a moeda é viciada, sendo a probabilidade de cara dada por p, $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$.
6. Generalize o Problema 5, para n lançamentos da moeda.

6.3 Valor Médio de uma Variável Aleatória

Vamos introduzir o conceito de valor médio por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 6.5. Uma pergunta que logo ocorreria ao empresário do Exemplo 6.1 é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir. Da Tabela 6.3, observamos que 56% das montagens devem produzir um lucro de 15 reais, 23% um lucro de dez reais, e assim por diante. Logo, o lucro esperado por montagem será dado por

$$\text{lucro médio} = (0{,}56)(15) + (0{,}23)(10) + (0{,}02)(5) + (0{,}19)(-5) = 9{,}85.$$

Isto é, caso sejam verdadeiras as suposições feitas para determinar a distribuição da v.a., o empresário espera ter um lucro de 9,85 reais por conjunto montado.

Definição. Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores x_1, ..., x_n, chamamos valor médio ou esperança matemática de X ao valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (6.1)$$

A expressão (6.1) é semelhante àquela utilizada para a média, introduzida no Capítulo 3, onde no lugar das probabilidades p_i tínhamos as freqüências relativas f_i. A distinção entre essas duas quantidades é que a primeira corresponde a valores de um modelo teórico pressuposto, e a segunda, a valores observados da variável. Como p_i e f_i têm a mesma interpretação, todas as medidas e gráficos discutidos no Capítulo 2, baseados na distribuição das f_i, possuem um correspondente na distribuição de uma v.a. Além do valor médio, ou simplesmente *média*, definido acima, podemos considerar também outras medidas de posição e variabilidade, como a mediana e o desvio padrão. Veja a seção 6.8 para a definição da mediana de uma v.a. discreta. Vamos considerar agora a definição de variância.

Definição. Chamamos de *variância* da v.a. X o valor

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i. \tag{6.2}$$

O desvio padrão de X, $\mathrm{DP}(X)$, é definido como a raiz quadrada positiva da variância.

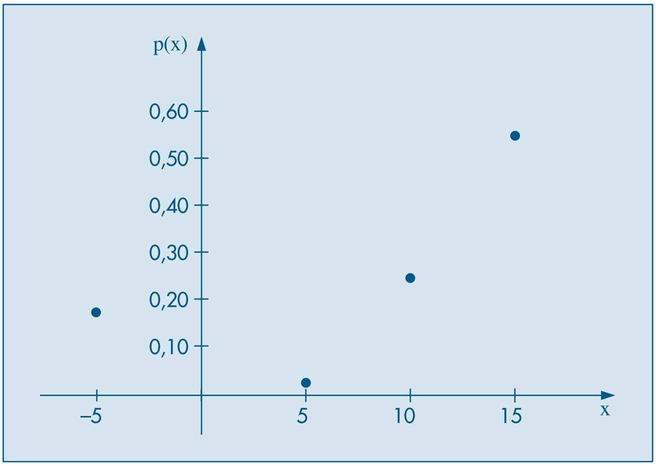
Exemplo 6.6. Deixamos a cargo do leitor verificar que, no caso do problema do empresário, teremos:

(i) $\mathrm{Var}(X) = 57{,}23$;

(ii) $DP(X) = 7{,}57$;

(iii) gráfico de $(x, p(x))$: Figura 6.7.

Figura 6.7: Gráfico de $p(x)$: distribuição da v.a. X = lucro por montagem.



Observação. Até agora, consideramos o caso em que a v.a. X pode assumir um número *finito* de valores. Mas uma v.a. discreta X pode assumir um número *infinito*, porém *enumerável*, de valores, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, com probabilidades $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, tal que cada $p_i > 0$ e a soma de todos os p_i seja 1, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Veja o Problema 3. Nesse caso, a definição de esperança deve ser modificada. A soma na expressão (6.1) é uma "soma infinita", que temos de supor que seja "convergente".

Problemas

7. Obtenha a média e a variância da v.a. X dos Problemas 1 e 2.

8. Obter a média e a variância da v.a. Y do Problema 4.

6.4 Algumas Propriedades do Valor Médio

Retomemos o Exemplo 6.1 para ilustrar algumas propriedades da média de uma v.a.

Exemplo 6.7. Suponha que todos os preços determinados pelo empresário do Exemplo 6.1 estivessem errados. Na realidade, todos os valores deveriam ser duplicados, isto é, custos e preços de venda. Isso corresponde à transformação $Z = 2X$. As probabilidades associadas à v.a. Z serão as mesmas da v.a. X, pois cada valor de X irá corresponder a um único valor de Z. Na Tabela 6.9 temos a distribuição de Z.

O valor médio da v.a. Z é obtido por

$$E(Z) = \sum z_i p(z_i) = \sum (2x_i)p(x_i) = 19{,}70.$$

Suponha, agora, que queiramos a distribuição da v.a. $W = X^2$. Baseados na Tabela 6.3, obtemos a Tabela 6.10.

Tabela 6.9: Distribuição da variável aleatória $Z = 2X$.

x	$z = 2x$	$p(z) = p(x)$	$z \cdot p(z)$
15	30	0,56	16,80
10	20	0,23	4,60
5	10	0,02	0,20
–5	–10	0,19	–1,90
Total	—	1,00	19,70

Fonte: Tabela 6.3.

Tabela 6.10: Distribuição da variável aleatória $W = X^2$.

w	$p(w)$	$w \cdot p(w)$
225	0,56	126,00
100	0,23	23,00
25	0,21	5,25
Total	1,00	154,25

Fonte: Tabela 6.3.

Observe que o evento $\{W = 25\}$ ocorre quando $\{X = 5 \text{ ou } X = -5\}$, portanto $P(W = 25) = P(X = 5) + P(X = -5) = 0{,}02 + 0{,}19 = 0{,}21$. Segue-se que a média de W é

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum w_i p(w_i) = (225)(0{,}56) + (100)(0{,}23) + (25)(0{,}21) \\ &= (225)(0{,}56) + (100)(0{,}23) + \{(25)(0{,}02) + (25)(0{,}19)\} \\ &= \sum x_i^2 p(x_i) = 154{,}25. \end{aligned}$$

Quanto às esperanças de Z e W, transformadas de X, é fácil ver que elas podem ser escritas através da f.p. de X.

Definição. Dada a v.a. discreta X e a respectiva função de probabilidade $p(x)$, a esperança matemática da função $h(X)$ é dada por

$$E[h(X)] = \sum h(x_i)p(x_i). \tag{6.3}$$

As seguintes propriedades podem ser facilmente demonstradas (veja o Problema 45):

(a) Se $h(X) = aX + b$, onde a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \tag{6.4}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X). \tag{6.5}$$

(b) $\text{Var}(X) = E(X^2) - [(E(X)]^2 = \sum x_i^2 p(x_i) - [\sum x_i p(x_i)]^2.$ (6.6)

A fórmula (6.6) deve ser usada para facilitar o cálculo da variância.

Observação. A propriedade (6.4) não vale, em geral, para funções não-lineares. Veja o Problema 58.

Exemplo 6.8. Usando os resultados dos exemplos 6.5 e 6.7, obtemos

$$\text{Var}(X) = 154{,}25 - (9{,}85)^2 = 57{,}23.$$

Observação. Usaremos os símbolos abaixo para indicar a média e a variância de uma v.a. X:

$$E(X) = \mu(X),$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X),$$

ou, simplesmente, μ e σ^2, respectivamente, se não houver possibilidade de confusão.

6.5 Função de Distribuição Acumulada

No Capítulo 2 demos a definição de função de distribuição acumulada ou empírica para um conjunto de n observações. O equivalente teórico para variáveis aleatórias é definido a seguir.

Definição. Dada a variável aleatória X, chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a.), ou simplesmente função de distribuição (f.d.) $F(x)$ à função

$$F(x) = P(X \leqslant x). \tag{6.7}$$

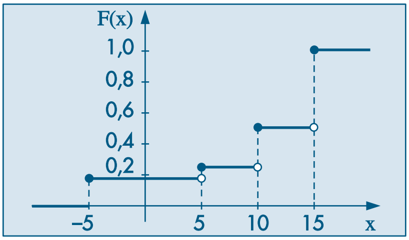
Observe que o domínio de F é todo o conjunto dos números reais, ao passo que o contradomínio é o intervalo [0,1].

Exemplo 6.9. Voltando ao problema do empresário e usando a f.p. de X definida na Tabela 6.3, a f.d.a. de X será dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -5 \\ 0{,}19, & \text{se } -5 \leqslant x < 5 \\ 0{,}21, & \text{se } 5 \leqslant x < 10 \\ 0{,}44, & \text{se } 10 \leqslant x < 15 \\ 1, & \text{se } x \geqslant 15, \end{cases}$$

cujo gráfico está na Figura 6.8.

Figura 6.8: f.d.a. para a v.a. X = lucro por montagem.



Observe que $P(X = x_i)$ é igual ao salto que a função $F(x)$ dá no ponto x_i; por exemplo, $P(X = 10) = 0{,}23 = F(10) - F(10-)$. De modo geral, $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-)$, onde lembramos que $F(a-) = \lim_{x \to a_-} F(x)$. Observe, também, que o conhecimento de $F(x)$ é equivalente ao conhecimento da f.p. de X.

Problemas

9. No Problema 1, obtenha as distribuições das v.a. $3X$ e X^2.

10. Considere o lançamento de três moedas. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma *seqüência*, ao passo que se ocorre o evento CRC temos *três seqüências*. Defina a v.a. X = número de caras obtidas e Y = número de seqüências, isso para cada resultado possível. Assim, $X(CRR) = 1$ e $Y(CRR) = 2$. Obtenha as distribuições de X e Y. Calcule $E(X)$, $E(Y)$, Var(X) e Var(Y).

11. Suponha que a v.a. V tem a distribuição seguinte:

v	0	1
$p(v)$	q	$1 - q$

Obtenha $E(V)$ e Var(V).

12. Seja X com distribuição dada abaixo; calcule $E(X)$. Considere a v.a. $(X - a)^2$ e calcule $E(X - a)^2$ para $a = 0$, 1/4, 1/2, 3/4, 1. Obtenha o gráfico de $E(X - a)^2 = g(a)$. Para qual valor de a, $g(a)$ é mínimo?

x	0	1	2
$p(x)$	1/2	1/4	1/4

13. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de 1/3 ou 2/3, respectivamente. De cada contato, pode resultar a venda de um equipamento por \$50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10). Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

14. Calcule a variância da v.a. Y definida no Problema 13.

15. Obter a *f.d.a.* para a v.a. V do Problema 11. Faça seu gráfico.

16. Calcule a *f.d.a.* da v.a. Y do Problema 10 e faça seu gráfico.

17. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade.

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

(*a*) Calcule o tempo médio de processamento.
Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$2,00, mas, se ele processa a peça em menos de seis minutos, ganha \$0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de \$1,00.

(*b*) Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em \$ ganha por peça.

18. Sabe-se que a v.a. X assume os valores 1, 2 e 3 e que sua *f.d.a.* $F(x)$ é tal que

$$F(1) - F(1-) = 1/3,$$
$$F(2) - F(2-) = 1/6,$$
$$F(3) - F(3-) = 1/2.$$

Obtenha a distribuição de X, a *f.d.a.* $F(x)$ e os gráficos respectivos.

19. Obtenha a *f.d.a.* $F(t)$ da v.a. T do Problema 17.

6.6 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Discretas

Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos. Portanto, um estudo pormenorizado dessas variáveis é de grande importância para a construção de modelos probabilísticos para situações reais e a conseqüente estimação de seus parâmetros. Para algumas dessas distribuições existem tabelas que facilitam o cálculo de probabilidades, em função de seus parâmetros. Nesta seção iremos estudar alguns desses modelos, procurando enfatizar as condições em que eles aparecem, suas funções de probabilidade, parâmetros e como calcular probabilidades.

6.6.1 Distribuição Uniforme Discreta

Este é o caso mais simples de v.a. discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

Definição. A v.a. discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_k$, tem *distribuição uniforme* se, e somente se,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{k}, \tag{6.8}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

É fácil verificar que

$$E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \tag{6.9}$$

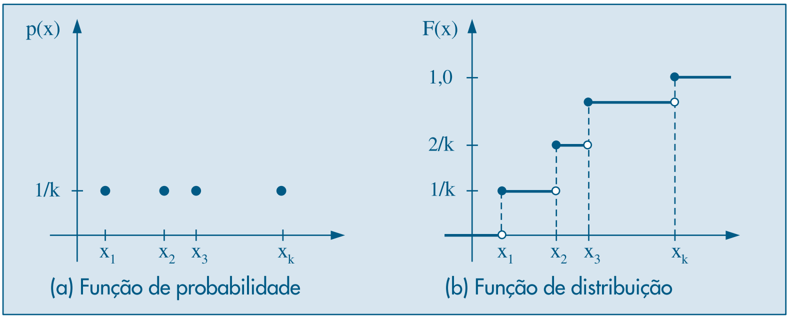
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{k}\left\{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{k}\right\}, \tag{6.10}$$

e que a função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \sum_{(x_i \leqslant x)} \frac{1}{k} = \frac{n(x)}{k}, \tag{6.11}$$

onde $n(x)$ é o número de $x_i \leqslant x$ (veja a Figura 6.9).

Figura 6.9: Distribuição uniforme discreta.



Exemplo 6.10. Seja X a v.a. que indica o "número de pontos marcados na face superior de um dado", quando ele é lançado. Obtemos na Tabela 6.11 a distribuição de X. Temos, também,

$$E(X) = 1/6\ \{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\} = 21/6 = 3{,}5,$$
$$\text{Var}(X) = 1/6\ \{(1 + 4 + \ldots + 36) - (21)^2/6\} = 35/12 = 2{,}9.$$

Tabela 6.11: Número de pontos no lançamento de um dado.

x	1	2	3	4	5	6	Total
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1,0

6.6.2 Distribuição de Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados apresentam ou não uma determinada característica. Por exemplo:

(1) uma moeda é lançada: o resultado ou é cara, ou não (ocorrendo, então, coroa);

(2) um dado é lançado: ou ocorre face 5 ou não (ocorrendo, então, uma das faces 1, 2, 3, 4 ou 6);

(3) uma peça é escolhida ao acaso de um lote contendo 500 peças: essa peça é defeituosa ou não;

(4) uma pessoa escolhida ao acaso dentre 1.000 é ou não do sexo masculino;

(5) uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade e verifica-se se ela é favorável ou não a um projeto municipal.

Em todos esses casos, estamos interessados na ocorrência de *sucesso* (cara, face 5 etc.) ou *fracasso* (coroa, face diferente de 5 etc.). Essa terminologia (sucesso e fracasso) será usada freqüentemente.

Para cada experimento acima, podemos definir uma v.a. X, que assume apenas dois valores: 1, se ocorrer sucesso, e 0, se ocorrer fracasso. Indicaremos por p a probabilidade de sucesso, isto é, $P(\text{sucesso}) = P(S) = p$, $0 < p < 1$.

Definição. A variável aleatória X, que assume apenas os valores 0 e 1, com função de probabilidade $(x, p(x))$ tal que

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p,$$
$$p(1) = P(X = 1) = p,$$

é chamada *variável aleatória de Bernoulli.*

Então, segue-se facilmente que

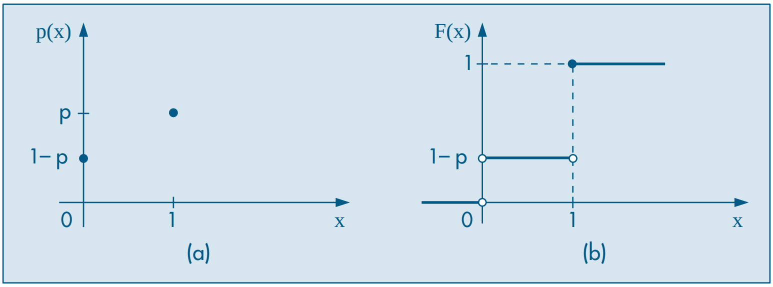
$$E(X) = p; \tag{6.12}$$

$$\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p), \tag{6.13}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - p, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Na Figura 6.10 temos representadas as f.p. e f.d.a. de X.

Figura 6.10: Distribuição de Bernoulli (a) f.p. (b) f.d.a.



Exemplo 6.11. Vamos supor o caso do experimento (2). Supondo o dado perfeito, teremos $P(X = 0) = 5/6$, $P(X = 1) = 1/6$,

$$E(X) = 1/6, \text{Var}(X) = (1/6)\ (5/6) = 5/36.$$

Observação. Experimentos que resultam numa v.a. de Bernoulli são chamados *ensaios de Bernoulli*. Usaremos a notação

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

para indicar uma v.a. com distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

6.6.3 Distribuição Binomial

Imagine, agora, que repetimos um ensaio de Bernoulli n vezes, ou, de maneira alternativa, obtemos uma amostra de tamanho n de uma distribuição de Bernoulli. Suponha ainda que as repetições sejam *independentes*, isto é, o resultado de um ensaio não tem influência nenhuma no resultado de qualquer outro ensaio. Uma amostra particular será constituída de uma seqüência de sucessos e fracassos, ou, alternativamente, de uns e zeros. Por exemplo, repetindo um ensaio de Bernoulli cinco vezes ($n = 5$), um particular resultado pode ser *FSSFS* ou a quíntupla ordenada (0, 1, 1, 0, 1). Usando a notação da seção 6.6.2, com $P(S) = p$, a probabilidade de tal amostra será

$$(1 - p)pp(1 - p)p = p^3(1 - p)^2.$$

O número de sucessos nessa amostra é igual a 3, sendo 2 o número de fracassos. Considere agora as seguintes situações, obtidas de (1) a (5) da seção anterior:

(1') uma moeda é lançada três vezes; qual é a probabilidade de se obter duas caras?

(2') um dado é lançado cinco vezes; qual é a probabilidade de se obter face 5 no máximo três vezes?

(3') dez peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças; qual é a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?

(4') cinco pessoas são escolhidas ao acaso entre 1.000; qual é a probabilidade de que duas sejam do sexo masculino?

(5') sabe-se que 90% das pessoas de uma cidade são favoráveis a um projeto municipal. Escolhendo-se 100 pessoas ao acaso entre os moradores, qual é a probabilidade de que pelo menos 80 sejam favoráveis ao projeto?

Observe que, nos casos (4') e (5'), o fato de estarmos extraindo indivíduos de um conjunto muito grande implica que podemos supor que as extrações sejam praticamente independentes.

Exemplo 6.12. Consideremos a situação (1'), supondo que a moeda seja "honesta", isto é, $P(\text{sucesso}) = P(\text{cara}) = 1/2$. Indiquemos o sucesso (cara) por S e fracasso (coroa), por F. Então, estamos interessados na probabilidade do evento

$$A = \{SSF, SFS, FSS\},$$

ou, em termos da notação anterior, na probabilidade de

$$A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

É claro que $P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$ e, devido à independência dos ensaios,

$$P(SSF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(SFS) = P(FSS),$$

e, portanto,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

Se a probabilidade de sucesso for p, $0 < p < 1$, e $P(F) = 1 - p = q$, então

$$P(SSF) = p \times p \times q = p^2 \times q = P(SFS) = P(FSS),$$

de modo que

$$P(A) = 3p^2q.$$

Uma característica interessante dos experimentos considerados é que estamos interessados apenas no *número total* de sucessos e não na ordem em que eles ocorrem. Podemos construir a Tabela 6.12 para $n = 3$ lançamentos da moeda, com $P(S) = p$, $P(F) = 1 - p = q$, a partir da Figura 6.11.

Figura 6.11: Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$.

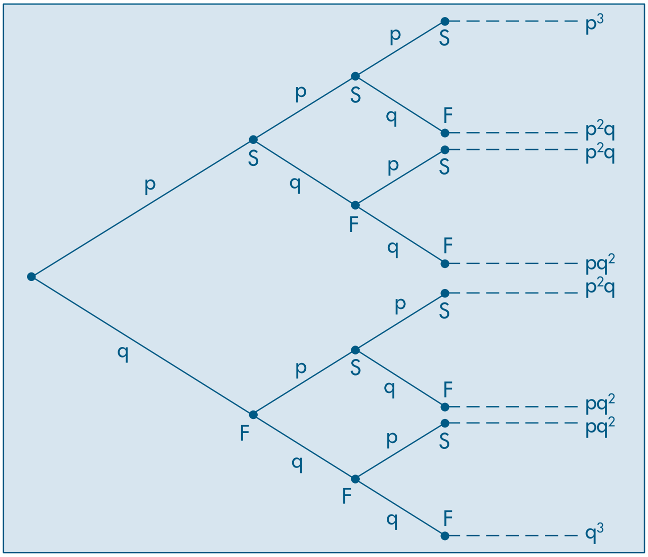


Tabela 6.12: Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$.

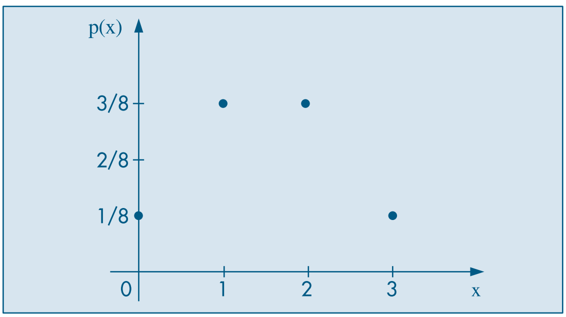
Número de sucessos	Probabilidades	$p = 1/2$
0	q^3	1/8
1	$3pq^2$	3/8
2	$3p^2q$	3/8
3	p^3	1/8

Fonte: Figura 6.11.

Vamos designar por X o número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, $0 < p < 1$. Os possíveis valores de X são 0, 1, 2, ..., n e os pares $(x, p(x))$, onde $p(x) = P(X = x)$, constituem a chamada *distribuição binomial*.

Para o exemplo (1') acima, $n = 3$ e $p = 1/2$, obtemos a distribuição dada pela primeira e terceira colunas da Tabela 6.12 e o gráfico da Figura 6.12.

Figura 6.12: Gráfico da f.p. $p(x)$ para $n = 3$ e $p = 1/2$.



Obtenhamos, agora, $P(X = k)$, ou seja, numa seqüência de n ensaios de Bernoulli, a probabilidade de obter k sucessos (e portanto $n - k$ fracassos), $k = 0,1,2, ..., n$, com $P(S) = p$, $P(F) = 1 - p = q$. Uma particular seqüência é

$$SSS \ldots SFF \ldots F,$$

onde temos k sucessos seguidos por $n - k$ fracassos. A probabilidade de tal seqüência é

$$p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}, \tag{6.14}$$

devido à independência dos ensaios. Mas *qualquer* seqüência com k sucessos e $n - k$ fracassos terá a mesma probabilidade (6.14). Portanto resta saber quantas seqüências com a propriedade especificada podemos formar. É fácil ver que existem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

tais seqüências, de modo que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.15}$$

As probabilidades (6.15) também serão indicadas por $b(k; n, p)$ e, quando a v.a. X tiver distribuição binomial com parâmetros n e p, escreveremos

$$X \sim b(n, p).$$

Exemplo 6.13. Vamos considerar a situação (3′) acima. Temos $n = 10$ ensaios de Bernoulli, cada um com $P(S) = P(\text{peça defeituosa}) = p = 0{,}1$. Se X indicar o número de peças defeituosas na amostra, queremos calcular $P(X = 10) = b(10; 10, 1/10)$. Por (6.15), obtemos

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(1/10)^{10}(9/10)^0 = (1/10)^{10} = 1/10^{10}.$$

A média e a variância de uma v.a. binomial, com parâmetros n e p são dadas, respectivamente, por

$$E(X) = np, \tag{6.16}$$

$$\mathrm{Var}(X) = npq. \tag{6.17}$$

Veja o Problema 41 e as seções 8.3 e 8.4.

Para o Exemplo 6.13 temos

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1,$$

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{10}.$$

As probabilidades binomiais $b(k; n, p)$ são facilmente calculadas em programas estatísticos, como o Minitab e o SPlus, ou planilhas, como o Excel, ou então são dadas por tabelas especialmente construídas, para diferentes valores de n e p. A Tabela I fornece essas probabilidades para valores de $n = 2, 3, ..., 19$ e alguns valores de p.

Exemplo 6.14. Usando (6.15) e a Tabela I, ou com a ajuda de um computador, obtemos

$$b(17;\ 20;\ 0{,}9) = \binom{20}{17}(0{,}9)^{17}\ (0{,}1)^{3} = 0{,}19.$$

No Capítulo 7 e seção 6.6.5 abaixo veremos duas maneiras de calcular valores aproximados para as probabilidades binomiais para n grande.

Para finalizar, vamos formalizar os principais pontos apresentados nesta seção.

Definição. Chama-se de *experimento binomial* ao experimento

(a) que consiste em n ensaios de Bernoulli;
(b) cujos ensaios são independentes; e
(c) para o qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual a p, $0 < p < 1$.

Definição. A variável aleatória X, correspondente ao número de sucessos num experimento binomial, tem distribuição binomial $b(n, p)$, com função de probabilidade

$$b(k;\ n,\ p) = P(X = k|n,\ p) = \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k},\ \ k = 0,\ 1,\ ...,\ n. \tag{6.18}$$

Na seção 6.9 veremos como podemos obter os valores $b(k;\ n,\ p)$, para n e p dados, usando um pacote estatístico.

6.6.4 Distribuição Hipergeométrica

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas *sem reposição* de uma população dividida segundo dois atributos. Para ilustrar, considere uma população de N objetos, r dos quais têm o atributo A e $N - r$ têm o atributo B. Um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, sem reposição. Estamos interessados em calcular a probabilidade de que esse grupo contenha k elementos com o atributo A. Pode-se ver facilmente, utilizando o princípio multiplicativo, que essa probabilidade é dada por

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \tag{6.19}$$

onde $\max(0,\ n - N + r) \leqslant k \leqslant \min(r,\ n)$.

Os pares $(k,\ p_k)$ constituem a *distribuição hipergeométrica de probabilidades*. Se definirmos a v.a. X como sendo o número de elementos na amostra que têm o atributo A, então $P(X = k) = p_k$.

Exemplo 6.15. Em problemas de controle de qualidade, lotes com N itens são examinados. O número de itens com defeito (atributo A), r, é desconhecido. Colhemos uma amostra de n

itens e determinamos k. Somente para ilustrar, suponha que num lote de $N = 100$ peças, $r = 10$ sejam defeituosas. Escolhendo $n = 5$ peças sem reposição, a probabilidade de não se obter peças defeituosas é

$$p_0 = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \simeq 0{,}584,$$

enquanto a probabilidade de se obter pelo menos uma defeituosa é

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_5 = 1 - p_0 \simeq 0{,}426.$$

Pode-se demonstrar que a v.a. X definida acima tem esperança e variância dadas por

$$E(X) = np, \tag{6.20}$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)\,\frac{N-n}{N-1}, \tag{6.21}$$

respectivamente, onde $p = r/N$ é a probabilidade de se obter uma peça defeituosa numa única extração. Se N for grande, quando comparado com n, então extrações com ou sem reposição serão praticamente equivalentes, de modo que as probabilidades dadas por (6.19) serão aproximadamente iguais às dadas pela fórmula (6.15), isto é, $p_k \simeq b(k; n, p)$. Do mesmo modo, os resultados (6.20) e (6.21) serão aproximadamente iguais aos valores correspondentes da distribuição binomial (note que $N - n \simeq N - 1$, se $n << N$). Denotaremos uma v.a. com distribuição hipergeométrica por

$$X \sim \mathrm{hip}(N, r, n).$$

6.6.5 Distribuição de Poisson

A Tabela I fornece os valores de $b(k; n, p)$ para $n = 2, \ldots, 19$. Para n grande e p pequeno, podemos aproximar essas probabilidades por

$$\frac{e^{-np}(np)^k}{k!},\quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.22}$$

As probabilidades (6.22), calculadas agora para todos os valores inteiros não negativos $k = 0, 1, 2, \ldots$, constituem a chamada *distribuição de Poisson*, tabelada na Tabela II, para alguns valores de $\lambda = np$. A aproximação

$$b(k; n, p) \simeq \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \tag{6.23}$$

é boa se n for grande e p pequeno e de tal sorte que $np \leqslant 7$. Ver o Problema 43 para uma sugestão de como provar (6.23).

As probabilidades dadas por (6.23) podem, também, ser obtidas em aplicativos estatísticos ou planilhas, assim como a binomial.

Exemplo 6.16. Consideremos aproximar $b(2;\ 1.000,\ 0{,}0001)$, usando (6.23). Temos que $np = 0{,}1$, logo

$$b(2;\ 1.000,\ 0{,}0001) \simeq \frac{e^{-0{,}1}(0{,}1)^2}{2!} = 0{,}0045.$$

Observemos que as probabilidades (6.23) estão definidas para qualquer inteiro não negativo k. Contudo, observando a Tabela II, vemos que essas probabilidades decaem à medida que k cresce e, normalmente, são desprezíveis para k maior do que 5 ou 6.

A distribuição de Poisson é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, ou superfície ou volume. São exemplos:

(a) número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos;
(b) número de falhas de um computador num dia de operação; e
(c) número de relatórios de acidentes enviados a uma companhia de seguros numa semana.

De modo geral, dizemos que a v.a. N tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ se

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.24}$$

É fácil verificar que $E(N) = \text{Var}(N) = \lambda$ (veja o Problema 46); logo, λ representa o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado.

Uma suposição que se faz usualmente em relação à distribuição de Poisson é que a probabilidade de se obter mais de um evento num intervalo muito pequeno é desprezível.

Exemplo 6.17. Uma situação prática de interesse na qual a distribuição de Poisson é empregada diz respeito à desintegração de substâncias radioativas. Considere o urânio 238 (U^{238}), por exemplo. Cada núcleo de U^{238} tem uma probabilidade muito pequena, $4{,}9 \times 10^{-18}$ de se desintegrar, emitindo uma partícula α, em um segundo. Considere, agora, um número grande n de núcleos e a v.a. N = número de núcleos que se desintegram. Admitindo-se que a desintegração de um núcleo não afeta a probabilidade de desintegração de qualquer outro núcleo (independência), a v.a. N tem uma distribuição binomial, com parâmetros n e p, este dado pelo valor acima. Logo, estamos numa situação em que podemos usar (6.23), ou seja, aproximar probabilidades binomiais por probabilidades de Poisson.

Em 0,30 mg de U^{238} temos aproximadamente $n = 7{,}6 \times 10^{17}$ átomos (Helene e Vanin, 1981), logo $\lambda = np \approx 3{,}7$ e

$$P(N = k) \approx \frac{e^{-3{,}7}(3{,}7)^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$$

Por exemplo, $P(N = 0) = 0{,}025$ e $P(N = 2) = 0{,}169$. Pode-se ver que $P(N \geqslant 19)$ é muito pequena, menor do que 10^{-6}.

Seria interessante avaliar se a distribuição de Poisson realmente é um modelo razoável para essa situação. Um experimento devido a Rutherford e Geiger (veja Feller, 1964, pág. 149, para a referência completa sobre esse experimento) de fato comprova essa adequação. Eles observaram os números de partículas α emitidas por uma substância radioativa em $n = 2.608$ intervalos de 7,5 segundos. A Tabela 6.13 apresenta os números n_k de intervalos de 7,5 segundos contendo k partículas. Uma estimativa de λ = número médio de partículas emitidas durante um intervalo de 7,5 segundos é dada por

$$\lambda = \frac{\sum k n_k}{n} = \frac{10.094}{2.608} = 3{,}87.$$

As probabilidades de Poisson são dadas por

$$p_k = \frac{3{,}87^k e^{-3{,}87}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Segue-se que np_k é o número esperado de intervalos contendo k partículas, e esses valores também estão apresentados na Tabela 6.13. Vemos que há uma boa coincidência entre os valores das duas colunas. Um teste formal pode ser feito para verificar a adequação da distribuição de Poisson. Veja o Capítulo 14, Exemplo 14.5.

Tabela 6.13: Freqüências observadas e esperadas para o Exemplo 6.17.

k	n_k	np_k
0	57	54,399
1	203	210,523
2	383	407,361
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$\geqslant 10$	16	17,075
	2.608	2.608,000

Se considerarmos ocorrências de eventos em intervalos de tempo de comprimento t, no lugar de intervalo unitário de tempo, basta ajustar o parâmetro λ na fórmula (6.24). Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.18. Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Segue-se que $\lambda = 5$ e

$$P(N = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0{,}0067.$$

Por outro lado, se quisermos a probabilidade de obter no máximo duas chamadas em quatro minutos, teremos $\lambda = 20$ chamadas em quatro minutos, logo

$$P(N \leqslant 2) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = e^{-20}\,(1 + 20 + 200) = 221e^{-20},$$

que é um número muito próximo de zero.

Esse exemplo nos mostra que a probabilidade de k ocorrências num intervalo fixo de comprimento t pode ser escrita como

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.25}$$

onde λ representa o número médio de ocorrências naquele intervalo. Denotaremos uma v.a. N com distribuição de Poisson de parâmetro λ por

$$N \sim \text{Pois}(\lambda).$$

Apresentamos, na Tabela 6.14, um resumo das distribuições discretas estudadas neste capítulo. Para cada uma temos a fórmula que dá a probabilidade de assumir cada valor, os possíveis valores, os parâmetros que caracterizam cada distribuição, a média e a variância. Incluímos, também, a distribuição geométrica, tratada no Problema 55.

Tabela 6.14: Modelos para variáveis discretas.

Modelo	$P(X = x)$	Parâmetros	$E(X)$, Var(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$	p	p, $p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0, \ldots, n$	n, p	np, $np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$	λ	λ, λ
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$	p	$\frac{1}{p}$, $\frac{(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, $a \leqslant x \leqslant b^{(1)}$.	N, r, n	$\frac{nr}{N}$, $n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$

(1) $a = \max(0, n - N + r)$, $b = \min(r, n)$.

Problemas

20. Para os exercícios (a) a (e) abaixo, considere o enunciado:
    Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.

(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.

(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.

(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

21. Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

(a) n

(b) p

(c) $P(X < 12)$

(d) $P(X \geqslant 14)$

(e) $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, onde $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$

(f) $P(Y \geqslant 14/16)$, onde $Y = X/n$

(g) $P(Y \geqslant 12/16)$, onde $Y = X/n$

22. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

23. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2.000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 pés de fita magnética tenha:

(a) nenhum corte?

(b) no máximo dois cortes?

(c) pelo menos dois cortes?

24. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

25. Examinaram-se 2.000 ninhadas de cinco porcos cada uma, segundo o número de machos. Os dados estão representados na tabela abaixo.

Nº de Machos	Nº de Ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40
Total	2.000

(a) Calcule a proporção média de machos.

(b) Calcule, para cada valor de X, o número de ninhadas que você deve esperar se $X \sim b(5, p)$, onde p é a proporção média de machos calculada em (a).

26. Se X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 1/2$, faça os gráficos da distribuição de X e da f.d.a. $F(x)$.

27. Considere, agora, $n = 5$ e $p = 1/4$. Obtenha o gráfico da distribuição de X. Qual a diferença entre esse gráfico e o correspondente do Problema 26? O que ocasionou a diferença?

28. Refaça o Problema 26, com $n = 6$ e $p = 1/2$.

6.7 O Processo de Poisson

No Exemplo 6.17 acima vimos uma aplicação importante da distribuição de Poisson ao problema da desintegração radioativa. Lá tratamos da emissão de partículas alfa em intervalos de 7,5 segundos. Ou seja, estamos contando o número de ocorrências de um evento ao longo do tempo. Na realidade, consideramos o que se chama um *processo estocástico*. Designando-se por N_t o número de partículas emitidas no intervalo $[0, t)$, obteremos o que se chama de *processo de Poisson*, para todo $t \geqslant 0$. Nesta seção iremos partir de algumas suposições que consideramos plausíveis sobre tal processo e mostrar que a distribuição da variável aleatória N_t, para cada $t = 0$, é dada pela fórmula (6.25).

As suposições que iremos admitir como válidas são as seguintes.

(S1) $N_0 = 0$, ou seja, o processo começa no instante zero com probabilidade um: $P(N_0 = 0) = 1$.

(S2) Os números de eventos em intervalos de tempo disjuntos são v.a. independentes. Considere $0 < t < t + s$, N_t como antes e $N_{t+s} - N_t$ o número de eventos no intervalo $[t, t + s)$. Então, estamos supondo que as v.a. N_t e $N_{t+s} - N_t$ são independentes. Dizemos que o processo tem *incrementos independentes*.

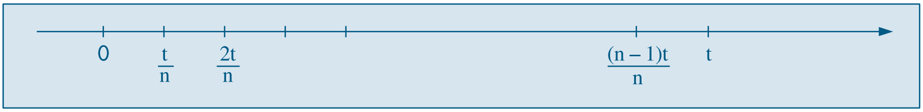
(S3) Considere os intervalos $[0, t)$ e $[s, s + t)$, de mesmo comprimento t e as v.a. N_t como antes e M_t = número de eventos no intervalo $[s, s + t)$. Então, para todo $s > 0$, as v.a. N_t e M_t têm a mesma distribuição de probabilidades. Ou seja, a distribuição do número de eventos ocorridos num intervalo depende somente do comprimento do intervalo, e não de sua localização. Dizemos que o processo tem *incrementos estacionários*.

(S4) Para h suficientemente pequeno, $P(N_h = 1) \approx \lambda h$, com $\lambda > 0$, constante. Ou seja, num intervalo pequeno, a probabilidade de ocorrência de um evento é proporcional ao comprimento do intervalo.

(S5) Para h como em (S4), $P(N_h \geqslant 2) \approx 0$. Isso nos diz que a probabilidade de se ter dois ou mais eventos num intervalo suficientemente pequeno é desprezível.

Considere o intervalo $[0, t)$ e o divida em subintervalos de comprimento t/n, como na Figura 6.13.

Figura 6.13: Divisão de intervalo $[0, t)$ em subintervalos de comprimentos t/n.



Chamemos de Y a v.a. que dá os números de subintervalos com um evento. Então, Y é uma v.a. com distribuição binomial, de parâmetros n (número total de subintervalos) e $p = P$ (um evento) $= \lambda(t/n)$. Para n grande, usando a aproximação da seção anterior, temos que essa variável pode ser aproximada por uma v.a. com distribuição de Poisson com parâmetro $np = n\lambda(t/n) = \lambda t$. Note que aqui usamos as suposições S2 (cada subintervalo contém um evento, independentemente dos demais intervalos) e S3 (com a mesma probabilidade).

Pela suposição S5, a probabilidade de que cada subintervalo contenha dois ou mais eventos tende a zero, quando n cresce. Logo, N_t é uma v.a. com distribuição de Poisson, com parâmetro λt.

Uma prova um pouco mais rigorosa, usando derivadas, pode ser dada. Veja Meyer (1965).

6.8 Quantis

No Capítulo 3 estudamos os quantis associados a um conjunto de dados. Esses poderiam ser chamados de quantis empíricos, pois podemos agora considerar quantis associados à distribuição de uma v.a. discreta, os quais poderíamos denominar quantis teóricos.

Definição. O valor $Q(p)$ satisfazendo

$$P(X \leqslant Q(p)) \geqslant p \text{ e } P(X \geqslant Q(p)) \geqslant 1 - p, \tag{6.26}$$

para $0 < p < 1$, é chamado o *p-quantil* de X.

A interpretação do p-quantil é similar à que foi dada no caso de um conjunto de dados: $Q(p)$ é o valor tal que a soma das probabilidades dos valores menores do que ele, é p. Então, por que não defini-lo por $F(Q(p)) = P(X \leqslant Q(p)) = p$, onde $F(x)$ é a f.d.a. de X? A resposta será dada acompanhando os exemplos a seguir.

Para determinados valores de p teremos, como antes, denominações especiais. Por exemplo:

$Q_1 = Q(0{,}25)$: primeiro quartil
$Q_2 = Q(0{,}5)$: mediana ou segundo quartil
$Q_3 = Q(0{,}75)$: terceiro quartil.

Vejamos o caso da mediana, $Q(0{,}5) = Md$. Por (6.26) devemos ter

$$P(X \leqslant Md) \geqslant 0{,}5 \text{ e } P(X \geqslant Md) \geqslant 0{,}5. \tag{6.27}$$

Suponha a v.a. X com a distribuição:

x	0	1
$p(x)$	1/3	2/3

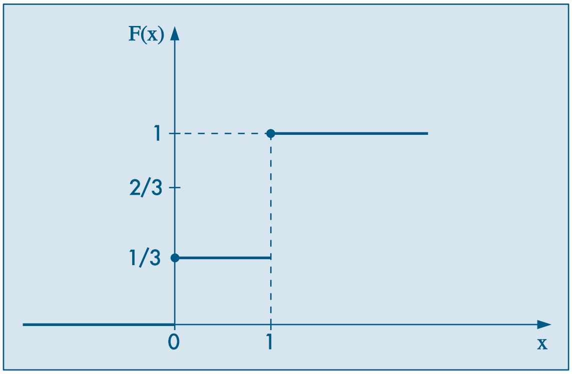
Então $Md = 1$, pois $P(X \leqslant 1) = 1/3 + 2/3 = 1 > 1/2$ e $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) = 2/3 > 1/2$.

Na Figura 6.14 temos a f.d.a. de X. Sabemos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

de modo que não existe algum valor x tal que $F(x) = 0{,}5$, o que ilustra por que não podemos definir a mediana por meio de $F(Md) = 0{,}5$.

Figura 6.14: f.d.a. da v.a. X



Por outro lado, considere a v.a. Y com a distribuição da tabela abaixo:

Y	–1	0	1
$p(y)$	1/4	1/4	1/2

Então, qualquer valor Md entre 0 e 1 é uma mediana, pois

$$P(Y \leqslant Md) = P(Y = -1) + P(Y = 0) = 1/2 \geqslant 1/2 \text{ e}$$
$$P(Y \geqslant Md) = P(Y = 1) = 1/2 \geqslant 1/2.$$

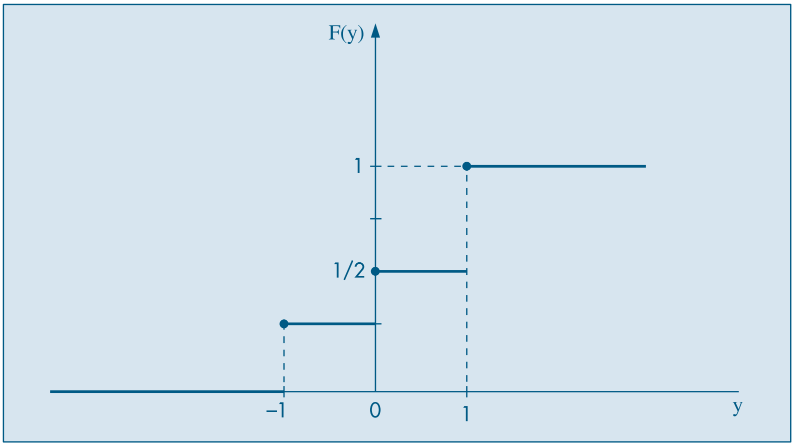
A f.d.a. de Y está na Figura 6.15. Observe que 0 e 1 também são medianas. Observe, também, que $Q(0{,}75) = 1$, pois

$$P(X \leqslant 1) = 1 \geqslant p = 0{,}75,$$

$$P(X \geqslant 1) = 0{,}5 \geqslant 1 - p = 0{,}25.$$

Novamente, não há nenhum valor de y tal que $F(y) = 0{,}75$. Mostre que $Q(0{,}90)$ também é igual a 1.

Figura 6.15: f.d.a. da v.a. Y



6.9 Exemplos Computacionais

Usando programas e planilhas computacionais é possível gerar probabilidades e probabilidades acumuladas para os modelos mais importantes discutidos neste capítulo. Por exemplo, o Minitab usa os comandos PDF para gerar probabilidades e CDF para gerar probabilidades acumuladas (f.d.a.).

Exemplo 6.19. Temos, no Quadro 6.1, as probabilidades $P(X = x)$ e $P(X \leqslant x)$ para uma v.a. $X \sim b(14;\ 0{,}3)$, ou seja, $n = 14$ e $p = P(\text{sucesso}) = 0{,}3$.

Quadro 6.1 Probabilidades binomiais geradas pelo Minitab.

MTB > PDF;
SUBC> Binomial 14 0.3.
Probability Density Function
Binomial with n = 14 and p = 0.300000

x	P(X = x)	x	P(X = x)
0	0.0068	7	0.0618
1	0.0407	8	0.0232
2	0.1134	9	0.0066
3	0.1943	10	0.0014
4	0.2290	11	0.0002
5	0.1963	12	0.0000
6	0.1262		

MTB > CDF;
SUBC> Binomial 14 0.3.
Cumulative Distribution Function
Binomial with n = 14 and p = 0.300000

x	P(X <= x)	x	P(X <= x)
0	0.0068	6	0.9067
1	0.0475	7	0.9685
2	0.1608	8	0.9917
3	0.3552	9	0.9983
4	0.5842	10	0.9998
5	0.7805	11	1.0000

Ainda, usando o Minitab, temos no Quadro 6.2 as probabilidades e probabilidades acumuladas para uma v.a. com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 5{,}2$.

Quadro 6.2 Probabilidades de Poisson geradas pelo Minitab.

MTB > PDF;
SUBC> Poisson 5.2.
Probability Density Function
Poisson with mu = 5.20000

x	P(X = x)	x	P(X = x)
0	0.0055	9	0.0423
1	0.0287	10	0.0220
2	0.0746	11	0.0104
3	0.1293	12	0.0045
4	0.1681	13	0.0018
5	0.1748	14	0.0007
6	0.1515	15	0.0002
7	0.1125	16	0.0001
8	0.0731	17	0.0000

MTB > CDF;
SUBC> Poisson 5.2.
Cumulative Distribution Function
Poisson with mu = 5.20000

x	P(X <= x)	x	P(X <= x)
0	0.0055	9	0.9603
1	0.0342	10	0.9823
2	0.1088	11	0.9927
3	0.2381	12	0.9972
4	0.4061	13	0.9990
5	0.5809	14	0.9997
6	0.7324	15	0.9999
7	0.8449	16	1.0000
8	0.9181		

Na planilha Excel podem ser usadas funções específicas dentro da categoria Estatística. Por exemplo, para cálculos com a distribuição binomial, usar a função DISTRBINOM; para a distribuição de Poisson, usar a função POISSON.

6.10 Problemas e Complementos

29. Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa \$0,50 e que ele vende a \$1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela tabela abaixo.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Quantas flores deveria o florista ter em estoque a fim de maximizar a média (valor esperado) do seu lucro?

30. As cinco primeiras repetições de um experimento custam \$10,00 cada. Todas as repetições subseqüentes custam \$5,00 cada. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro sucesso ocorra. Se a probabilidade de sucesso de uma repetição é igual a 0,9, e se as repetições são independentes, qual é o custo esperado da operação?

31. Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:
(a) nenhum defeituoso?
(b) exatamente um defeituoso?
(c) exatamente dois defeituosos?
(d) não mais do que dois defeituosos?

32. Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

33. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:
    (a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;
    (b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade; e
    (c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

34. O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a três petroleiros por dia. Se mais de três aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.
    (a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?
    (b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?
    (c) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia?

35. Na tabela abaixo, X significa número de filhos homens em famílias com 12 filhos. Calcule para cada valor da variável o número de famílias que você deveria esperar se $X \sim b(12; 0,5)$.

X	Nº observado de famílias
0	6
1	29
2	160
3	521
4	1.198
5	1.921
6	2.360
7	2.033
8	1.398
9	799
10	298
11	60
12	7
Total	10.690

Você acha que o modelo binomial é razoável para explicar o fenômeno?

36. Houve uma denúncia por parte dos operários de uma indústria de que, toda vez que ocorria um acidente em uma seção da indústria, ocorriam outros em outras seções mais ou menos no mesmo horário. Em outras palavras, os acidentes não estavam ocorrendo ao acaso. Para verificar essa hipótese, foi feita uma contagem do número de acidentes por hora durante um certo número de dias (24 horas por dia). Os resultados da pesquisa foram apresentados no quadro a seguir.

Nº de acidentes por hora	Nº de horas
0	200
1	152
2	60
3	30
4	13
5	9
6	7
7	5
8	4

(a) Calcule o número médio de acidentes por hora nessa amostra.

(b) Se o número de acidentes por hora seguisse uma distribuição de Poisson, com média igual à que você calculou, qual seria o número esperado de dias com $0, 1, 2, \ldots$ etc. acidentes?

(c) Os dados revelam que a suspeita dos operários é verdadeira?

37. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por $13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga $20,00; um ou dois defeituosos, ele paga $10,00; três ou mais defeituosos, ele paga $8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante? Justifique.

38. Uma certa região florestal foi dividida em 109 quadrados para estudar a distribuição de *Primula Simenses Selvagem*. *A priori*, supomos que esse tipo distribua-se aleatoriamente na região. O quadro abaixo indica o número de quadrados com X *Primula Simenses*; o número médio de plantas por quadrado foi de 2,2.

X plantas por quadrado	Nº de quadrados com X plantas
0	26
1	21
2	23
3	14
4	11
5	4
6	5
7	4
8	1
acima de 8	0

(a) Se as plantas realmente se distribuem aleatoriamente na região, qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos duas *Primulas*?

(b) Dê as freqüências esperadas para os valores de $X = 0$, $X = 1$ e $X = 2$.

(c) Apenas comparando os resultados de *(b)* com as freqüências observadas, qual a conclusão a que você chegaria?

(d) Quais as causas que você daria para a conclusão?

39. Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas com dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é \$10,00; tendo uma, o preço é \$8,00; duas ou três, o preço é \$6,00; mais do que três, o preço é \$2,00. Qual o preço médio de uma caixa?

40. Um industrial fabrica peças, das quais 1/5 são defeituosas. Dois compradores A e B, classificaram as partidas adquiridas em categorias I e II, pagando \$1,20 e \$0,80 respectivamente do seguinte modo:

    Comprador A: retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II.

    Comprador B: retira amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como II.

    Em média, qual comprador oferece maior lucro?

41. Se $X \sim b(n, p)$, prove que $E(X) = np$ e $\text{Var}(X) = npq$.
    (Sugestão: calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$ para $n = 1, 2, \ldots$ etc.)

42. Aceitação de um lote. Suponha que um comprador queira decidir se vai aceitar ou não um lote de itens. Para isso, ele retira uma amostra de tamanho n do lote e conta o número x de defeituosos. Se $x \leqslant a$, o lote é aceito, e se $x > a$, o lote é rejeitado; o número a é fixado pelo comprador. Suponha que $n = 19$ e $a = 2$. Use a Tabela I a fim de encontrar a probabilidade de aceitar o lote, ou seja, $P(X \leqslant 2)$ para as seguintes proporções de defeituosos no lote:

    (a) $p = 0{,}10$ (b) $p = 0{,}20$ (c) $p = 0{,}05$

43. Prove que, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mas de tal sorte que $np \to \lambda$, temos

$$\binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \to \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}.$$

    Sugerimos que você use o fato: $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ quando $n \to \infty$.

44. Suponha que X seja uma v.a. discreta, com f.p. $p(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, \ldots$ Calcule:

    (a) $P(X \text{ ser par})$ (b) $P(X \leqslant 3)$ (c) $P(X > 10)$

45. Prove (6.4), (6.5) e (6.6).

46. Prove que $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$, se a $P(X = k)$ for dada por (6.24).

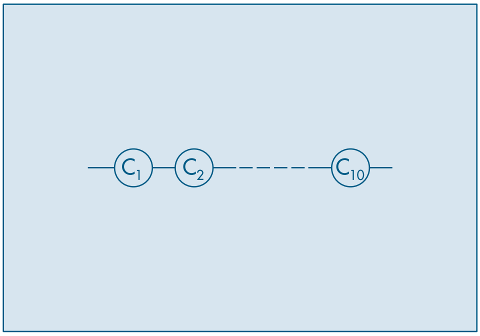
47. Prove a relação (6.19).

48. Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno acerte 80% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?

49. Repita o Problema 48, considerando cinco alternativas para cada questão.

50. Em um experimento binomial com três provas, a probabilidade de exatamente dois sucessos é 12 vezes a probabilidade de três sucessos. Encontre p.

51. No sistema abaixo, cada componente tem probabilidade p de funcionar. Supondo independência de funcionamento dos componentes, qual a probabilidade de:



(a) o sistema funcionar?
(b) o sistema não funcionar?
(c) exatamente dois componentes funcionarem?
(d) pelo menos cinco componentes funcionarem?

52. Prove que

$$b(k+1; n, p) = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \cdot b(k; n, p).$$

53. Encontre a mediana da v.a. Z com distribuição

Z	0	1	2	3
$p(Z)$	1/4	1/4	1/4	1/4

54. Encontre os quantis de ordens $p = 0{,}25$, $0{,}60$, $0{,}80$ da v.a. Z do exercício 53.

55. Distribuição Geométrica. Suponha que, ao realizar um experimento, ocorra o evento A com probabilidade p ou não ocorra A (ou seja, ocorre A^c com probabilidade $1-p$). Repetimos o experimento de forma independente até que o evento A ocorra pela primeira vez.

Seja $X =$ número de repetição do experimento até que se obtenha A pela primeira vez. Então,

$$P(X = j) = (1-p)^{j-1}.\ p, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

pois se $X = j$, nas primeiras $j-1$ repetições A não ocorre, ocorrendo na j-ésima.

(a) Prove que $\sum_{j=1}^{\infty} P(X = j) = 1$.

(b) Mostre que $E(X) = 1/\mathrm{p}$ e $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/\mathrm{p}^2$.

[Sugestão: $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p(X=j) = p \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot (1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^j$, com $1-p=q$.]

(c) Se s e t são inteiros positivos, então

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Essa propriedade nos diz que a distribuição geométrica não tem memória. Essa propriedade é compartilhada pela distribuição exponencial, a ser estudada no Capítulo 7.

56. (Meyer, 1965). O custo de realização de um experimento é \$1.000,00. Se o experimento falha, um custo adicional de \$300,00 tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada prova é 0,2, se as provas são independentes e continuadas até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento?

57. Distribuição de Pascal. Considere a mesma situação experimental do Problema 55, só que agora o experimento é continuado até que o evento A ocorra pela r-ésima vez. Defina a v.a. $Y =$ número de repetições necessárias para que A ocorra exatamente r vezes. Note que, se $r = 1$, obtemos a distribuição geométrica. Mostre que

$$P(Y = j) = \binom{j-1}{r-1} p^r q^{j-r}, \; j = r, \; r+1, \ldots$$

58. A Desigualdade de Jensen. Vimos, na fórmula (6.4), que se $h(x) = ax + b$, então $E[h(X)] = h[E(X)]$, ou seja, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
Esta fórmula pode não valer se $h(x)$ não for linear. O que vale é o seguinte resultado, denominado Desigualdade de Jensen. Se $h(x)$ for uma função convexa e X uma v.a., então

$$E[h(X)] \geqslant h[E(X)],$$

com igualdade se e somente se h for linear (ou se a variância de X for zero).
Por exemplo, se $h(x) = x^2$, então $E(X^2) \geqslant [E(X)]^2$, do que decorre que $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \geqslant 0$.
Lembremos que uma função h é convexa se $h((x+y)/2) \leqslant (h(x) + h(y))/2$, para todo par x, y no domínio de h. Em termos geométricos, h é convexa se o ponto médio da corda que une dois pontos quaisquer da curva representando h está acima da curva. A função h é côncava se $-h$ for convexa. Por exemplo, $\log x$ é uma função côncava.

59. Use o problema anterior para verificar as relações entre:
(a) $E(e^X)$ e $e^{E(X)}$;
(b) $E(\log X)$ e $\log[E(X)]$, para $X > 0$;
(c) $E(1/X)$ e $1/E\{X)$, para $X \neq 0$.