Decomposição Singular

X matriz $n \times p$ $(n \geq p)$.

$$\underset{n\times p}{X} = \underset{n\times p}{U}\,\underset{p\times p}{D}\,\underset{p\times p}{T'}$$

U - matriz $n \times p$ colunas são autovetores de XX' associados às p raízes características $\neq 0$ de XX'.

T' - matriz $p \times p$ colunas são autovetores de $X'X$.

D - matriz diagonal elementos da diagonal principal $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_p > 0$ valores singulares de X.

$\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ λ_j - j-ésima raiz característica de $X'X$.

Exercício

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$. Decompor $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$.

$$X'X - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{bmatrix} \quad \det(X'X - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow$$

$(11-\lambda)^2 - 1 = 0$ $\quad \lambda_1 = 12$ $\quad \lambda_2 = 10$

Para $\lambda_1 = 12$ $\quad \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Tomando $x_1 = x_2 = 1$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

Vetor característico normalizado $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 10$

$$\begin{bmatrix} 11-10 & 1 \\ 1 & 11-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1 = -x_2$. Tomando $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

Vetor característico normalizado $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

$$\therefore T' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}$$

U - matriz 3×2 colunas = autovetores de XX' associados às $p = 2$ raízes características $\neq 0$ de XX'

Resultado: As raízes características diferentes de zero de XX' são as mesmas da matriz $X'X$.

raízes características de $X'X$: 12 e 10

raízes características de XX' : 12, 10 e 0.
(verifique)

$X'X : p \times p \quad 2\times 2$ $\qquad$ $XX' : 3\times 3$

$r(X'X) = 2$ $\qquad$ $r(XX') = 2$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

posto completo $\qquad$ posto incompleto $3-2 \quad rc=0$

$$XX' = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(XX') = 0 \qquad r(XX') = 2$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$XX' - 12I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[XX' - 12I_3\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = x_3 = 1 \qquad x_2 = 2$

Vetor característico normalizado $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 10$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0.$$

Tomando $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$,

vetor característico normalizado $\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{T'}$$

2- Variáveis Aleatórias Multidimensionais

A variável aleatória p-dimensional X é o vetor

$$X' = [X_1, X_2 \dots X_p]$$

cujos elementos são variáveis aleatórias unidimensionais.

Similarmente X é uma matriz aleatória se

$X = \{X_{ij}\}$, $i = 1, 2 \dots n$, $j = 1, 2 \dots p$ com X_{ij} variáveis aleatórias unidimensionais.

$$X' = [X_1, X_2 \dots X_p].$$

i) A função distribuição conjunta de X é definida como

$$F(x_1, x_2 \dots x_p) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \dots X_p \leq x_p).$$

ii) Se $X_1, X_2 \dots X_p$ são independentes $\Leftrightarrow$

$$F(x_1, x_2 \dots x_p) = F_1(x_1)\, F_2(x_2) \dots F_p(x_p),$$

com $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i)$.

iii) Se $F(x_1, \dots x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(u_1, \dots u_p)\, du_1 \dots du_p$,

X' é um vetor aleatório contínuo e $f(x_1, x_2 \dots x_p)$ é sua densidade conjunta.

$$f(x_1, x_2 \dots x_p) = f(\mathbf{x})$$

Nos modelos multivariados, de modo geral, $X_1, X_2 \dots X_p$ não são independentes.

iv) Com relação às densidades, $X_1, X_2 \dots X_p$ são independentes $\Leftrightarrow f(x_1, x_2 \dots x_p) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \dots \times f_p(x_p)$,

$f_j(x_j)$ = densidade da v. a. X_j.

X' será um vetor aleatório discreto se

$$P(X_1 = x_1 \quad X_2 = x_2 \dots X_K = x_K) = p(x_1, x_2 \dots x_K)$$

para todos os possíveis $x_1, x_2 \dots x_K$, valores de $X_1, X_2 \dots X_K$

Nesse caso

$p(x_1, x_2 \dots x_K)$ é a função de probabilidade associada ao vetor aleatório X'

Se $X' = [X_1, X_2 \dots X_p]$ é um vetor aleatório contínuo, com função densidade $f(x_1, x_2 \dots x_p)$ a densidade conjunta de $x_1, x_2 \dots x_q$, $q < p$ é dada por

$$g(x_1, x_2 \dots x_q) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2 \dots x_q, x_{q+1} \dots x_p) \, dx_{q+1} \dots dx_p$$

$g(x_1, x_2 \dots x_q)$ é denominada densidade marginal de $x_1, X_2 \dots X_q$.

Um caso particular importante é para $q = 1$, que é a densidade de X

vi) A densidade condicional de $X_1, X_2, \ldots X_q$ dado $X_{q+1} = x_{q+1} \ldots X_p = x_p$ é dada por

$$h(x_1, x_2 \ldots x_q \mid x_{q+1} \ldots x_p) = \frac{f(x_1, x_2 \ldots x_p)}{g(x_{q+1} \ldots x_p)}.$$

Quando X' for um vetor aleatório discreto, substitui-se as densidades por funções de probabilidade.

Momentos de Variáveis Aleatórias Multidimensionais

$$X' = [X_1 \quad X_2 \ldots X_p]$$

O valor esperado do vetor aleatório X' é o vetor de esperanças de seus elementos

$$E(X') = [E(X_1) \quad E(X_2) \ldots E(X_p)]$$

$$E(X_i) = \mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i)\, dx_i & \text{se } X_i \text{ é contínua com densidade } f(x_i) \\ \sum x_i p(x_i) & \text{se } X_i \text{ é discreta com função de prob } p(x_i). \end{cases}$$

Para matrizes aleatórias,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2p} \\ & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(x_{11}) & \cdots & E(x_{1p}) \\ E(x_{21}) & & E(x_{2p}) \\ \vdots & & \\ E(X_{n1}) & & E(X_{np}) \end{bmatrix}$$

Resultado

Se X e Y são matrizes aleatórias de mesmas dimensões e A e B matrizes de constantes tais que o produto AXB é possível, então

a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

b) $E(AXB) = A\,E(X)\,B$

A covariância entre dois elementos de X, X_i e X_j é definida como

$$Cov(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

Verifica-se que

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j - E(X_i)E(X_j)$$

onde f_{ij} é a densidade conjunta de X_i e X_j.

Notação $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$

Se $i = j$, $\sigma_{ii} = Cov(X_i, X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = Var(X_i)$

$= \sigma_i^2$.

1) X_i e X_j variáveis aleatórias independentes $\Rightarrow Cov(X_i, X_j) = 0$

$Cov(X_i, X_j) = 0 \not\Rightarrow X_i$ e X_j são independentes

2) $X' = [X_1 \;\; X_2 \ldots X_p]$

Temos p variâncias σ_{ii} e

$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ covariâncias σ_{ij}, $i < j$,

$i, j = 1, 2, \ldots, p$. Estes elementos podem ser dispostos na matriz

$$\Sigma = Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

ou

$Var(X)$

denominada matriz de variâncias e covariâncias de X ou matriz de covariância de X.

Esta matriz tem as seguintes propriedades

i) Σ é simétrica, $p \times p$.

$(\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i) = \sigma_{ji}, \forall i, j,$

$i \neq j)$

ii) $\Sigma = E\left[(X-\mu)(X-\mu)'\right]$,

onde $\mu' = [E(X_1) \ E(X_2) \dots E(X_p)] = [\mu_1 \ \mu_2 \dots \mu_p]$

$$(X-\mu) = \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \qquad (X-\mu)' = [X_1 - \mu_1 \ \ X_2 - \mu_2 \dots X_p - \mu_p]$$

$$(X-\mu)(X-\mu)' = \begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & (X_1-\mu_1)(X_p \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$E\left[(X-\mu)(X-\mu)'\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2p} \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

iii) Σ é não negativa definida (positiva definida ou semi definida)

Exemplo

① Obter a matriz de covariância de $X' = [X_1 \quad X_2]$ sendo que X_1 e X_2 têm função de probabilidades conjunta $p_{12}(x_1, x_2)$ na tabela abaixo.

$x_1 \backslash x_2$	0	1	$p_1(x_1)$
−1	0,24	0,06	0,30
0	0,16	0,14	0,30
1	0,40	0,00	0,40
$p_2(x_2)$	0,80	0,20	

$\mu_1 = E(X_1) = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 = 0,1$

$\mu_2 = E(X_2) = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 0,2$

$\sigma_{11} = Var(X_1) = (-1)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,4 - 0,1^2 = 0,69$

$\sigma_{22} = Var(X_2) = 0^2 \cdot 0,8 + 1^2 \cdot 0,2 - 0,2^2 = 0,16$

$$E(X_1 X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 \, p_{12}(x_1, x_2) =$$

$$0 \cdot 0{,}24 - 1 \cdot 0{,}06 + \overset{+0\times 0{,}24}{0 \cdot 0{,}16} + 0 \cdot 0{,}14 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}00 = -0{,}06$$

$$\sigma_{12} = -0{,}06 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = -0{,}08$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}69 & -0{,}08 \\ -0{,}08 & 0{,}16 \end{bmatrix}$$

Obs:

μ e Σ são o vetor de médias e a matriz de covariância populacionais de X.

$$\mu = E(X) \qquad \Sigma = Var(X)$$

Seja $\rho_{ij} = Corr(X_i, X_j)$. Temos que

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}}$$

A matriz de correlação populacional do vetor aleatório X é definida como

$$\rho = \{ Corr(X_i, X_j) \}_{i,j = 1, 2 \ldots p}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{2p} \\ \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{simétrica}$$

Verifica-se que

$$\rho = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\right) \Sigma \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\right)$$

~~Resolto~~

Exemplo

$$\rho_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} =$$

$$= \frac{-0,08}{\sqrt{0,69}\sqrt{0,16}} = -0,24$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & -0,24 \\ -0,24 & 1 \end{bmatrix}$$

Vetor de Médias e Matriz de Covariância para combinações Lineares de Variáveis Aleatórias

Para variáveis aleatórias unidimensionais; X_1, X_2

$$E(kX_1) = kE(X_1) = k\mu_1 \qquad a, b, k \text{ constantes}$$

$$Var(kX_1) = k^2 Var(X_1) = k^2 \sigma_{11}$$

$$E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2) = a\mu_1 + b\mu_2$$

$$Cov(aX_1, bX_2) = E[(aX_1 - a\mu_1)(bX_2 - b\mu_2)] =$$

$$= ab\,E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] = ab\,Cov(X_1, X_2) = ab\,\sigma_{12}$$

$$Var(aX_1 + bX_2) = E\{[aX_1 + bX_2 - (a\mu_1 + b\mu_2)]^2\}$$

$$= E\{[(aX_1 - a\mu_1) + (bX_2 - b\mu_2)]^2\} =$$

$$= E\{a^2(X_1-\mu_1)^2 + b^2(X_2-\mu_2)^2 + 2ab(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\}$$

$$= a^2 E[(X_1-\mu_1)^2] + b^2 E[(X_2-\mu_2)^2] + 2ab\,E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]$$

$$= a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2) + 2ab\,Cov(X_1, X_2)$$

$$= a^2\sigma_{11} + b^2\sigma_{22} + 2ab\,\sigma_{12}$$

↑ Estes fatos não são novos

$$aX_1 + bX_2 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = c'X$$

$$c' = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$E(c'X) = E(aX_1 + bX_2) = a\mu_1 + b\mu_2$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = c'\mu \quad \text{onde} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$

$\therefore E(c'X) = c'E(X)$

Se $\Sigma = Var(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$, então

$Var(c'X) = Var(aX_1 + bX_2) = a^2\sigma_{11} + b^2\sigma_{22} + 2ab\sigma_{12}$

pode ser escrita como $c'\Sigma c$ pois

$$c'\Sigma c = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2\sigma_{11} + 2ab\sigma_{12} + b^2\sigma_{22}$$

$\therefore Var(c'X) = c' Var(X) c$

Generalizando para $X_1, X_2 \dots X_p$, Se $a'X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p$, então

$$E(a'X) = a' E(X) = \underbrace{a' \mu}_{1 \times 1}$$

$$Var(a'X) = a' \, Var(X) \, a = \underbrace{a' \Sigma a}_{1 \times 1}$$

onde $\mu = E(X)$ e $\Sigma = Var(X)$.

No caso geral de q combinações lineares

Para

$$Z_1 = c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \dots + c_{1p} X_p$$

$$Z_2 = c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \dots + c_{2p} X_p$$

$$\vdots$$

$$Z_q = c_{q1} X_1 + c_{q2} X_2 + \dots + c_{qp} X_p$$

$$Z = \underset{q \times 1}{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix}} = \underset{q \times p}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ & & & \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qp} \end{bmatrix}} \underset{p \times 1}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}} = \underbrace{C X}_{q \times 1}$$

$$\mu_Z = E(Z) = E(CX) = C E(X) = C \mu_X$$

e

$$\Sigma_Z = Var(Z) = Var(CX) = \underbrace{\underset{q \times p}{C} \underset{p \times p}{\Sigma_X} \underset{p \times q}{C'}}_{q \times q}$$

$$\Sigma_X = Var(X)$$

Exemplo

$$X' = [X_1 \quad X_2] \qquad \mu'_X = [\mu_1 \quad \mu_2] \qquad \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Obter o vetor de médias e a matriz de covariância de $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ com $Z_1 = X_1 - X_2$ e $Z_2 = X_1 + X_2$,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = C\,X$$

$$\mu_Z = E(Z) = C\,\underbrace{E(X)}_{\mu_X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_Z = Var(Z) = C\,Var(X)\,C' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} & \sigma_{11} + 2\sigma_{12} + \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} \Rightarrow X_1 - X_2$ e $X_1 + X_2$ são v.a. não correlacionadas