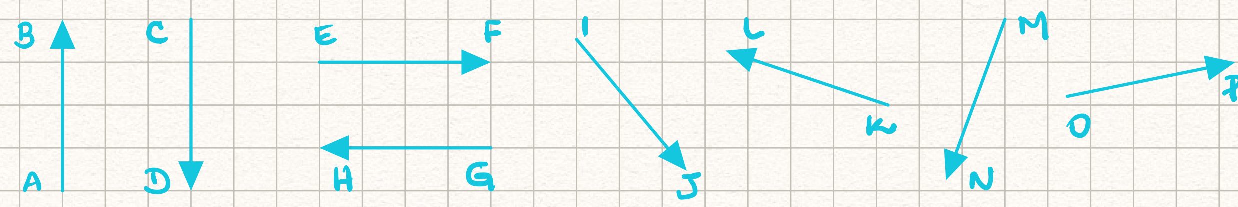
23/04/2021

SEGMENTO ORIENTADO (SO)

Módulo: tamanho de um SO ou distância entre origem e extremidade do mesmo.

→ SOs podem ter o mesmo módulo, independente de sua direção e sentido.



$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{IJ} = \overline{KL} = \overline{MN} = \overline{OP}$

Direção: mesma da reta orientada suporte de onde foi definido o SO.

Sentido: (+) ou (-), de acordo com a direção definida para o SO.

SOs Equipolentes:

Mesmos $\begin{cases} \text{módulo} \\ \text{direção} \\ \text{sentido} \end{cases}$

OBS: não são iguais, pois são determinados por pontos diferentes.

Notação: $AB \sim CD$

2. VETORES

Slides 08 e 09

1) Comutativa

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, pela proposição é possível escolher um ponto E tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$ e, portanto, $\vec{u} = \overrightarrow{EC}$. Desta forma:

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

2) Associativa

Escolhendo os representantes para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \text{ e } \vec{w} = \overrightarrow{CD}$$

tem-se:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$$

3) Definindo o representante de $\vec{v}$ como $\overrightarrow{AB}$, tem-se que:

* Se $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$: $\vec{v} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$
* Se $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$: $\vec{0} + \vec{v} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$

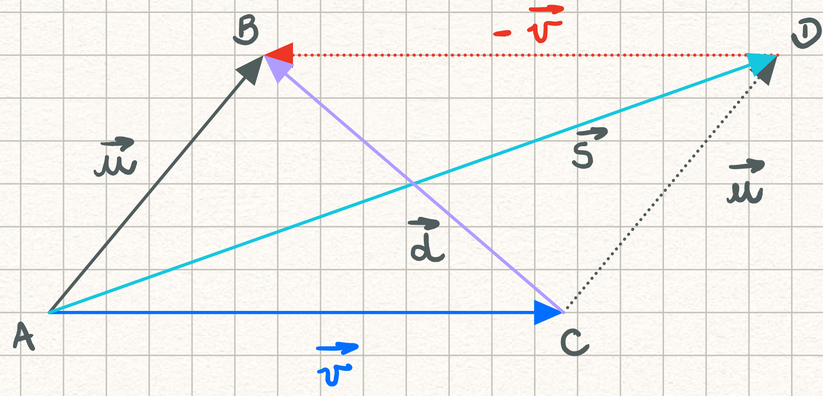
→ Essa propriedade apresenta o elemento neutro da operação soma entre vetores: o vetor nulo, $\vec{0}$.

4) Exercício.

Slide 10

No caso em que dois vetores têm a mesma origem $\longrightarrow$ Regra do Paralelogramo.

↳ SOs equipolentes



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ $(AB \sim CD)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{v}$ $(AC \sim BD)$

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DB}$

$\vec{s} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$

↳ $\vec{u} + (-\vec{v})$

Slide 13

4) Identidade

Provar que $1\vec{u} = \vec{u}$ implica provar que os dois vetores, $1\vec{u}$ e $\vec{u}$, têm:

MESMO MÓDULO: $|1\vec{u}| = |1|\,|\vec{u}| = 1\,|\vec{u}| = |\vec{u}|$

MESMA DIREÇÃO: Da definição de multiplicação de vetor por escalar, os dois vetores têm mesma direção.

MESMO SENTIDO: $\vec{p} = 1\vec{u}$, portanto, $K = 1 > 0$; logo, $1\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido.

EXERCÍCIOS

2) $\vec{w} = ?$ tal que $2\vec{w} - 3\vec{u} = 10(\vec{w} + \vec{v})$

Aplicar Propriedades de Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar para resolver:

Dist. relação à adição de vetores: $2\vec{w} - 3\vec{u} = 10\vec{w} + 10\vec{v}$

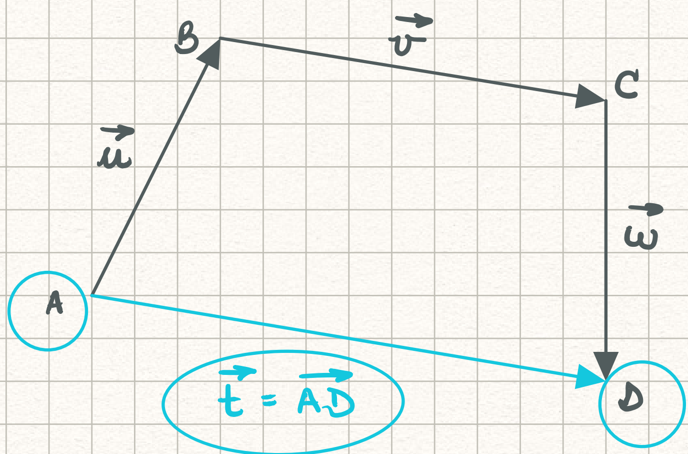
Isolando $\vec{w}$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$: $2\vec{w} - 10\vec{w} = 3\vec{u} + 10\vec{v}$

Dist. relação à adição escalar: $(2 - 10)\,\vec{w} = 3\vec{u} + 10\vec{v}$

Dividindo por (-8):

$$\vec{w} = -\frac{3}{8}\vec{u} - \frac{5}{4}\vec{v}$$

3) Esquematicamente:



Soma de $\underline{\underline{n}}$ vetores:

* origem do 1º vetor (A)
* extremidade do n-ésimo vetor (D)

Algebricamente:

$$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{t} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$\vec{t} = \vec{AB} + \vec{BD}$$

$$\therefore \quad \vec{t} = \vec{AD}$$

4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$

$1\vec{v} + (-1\vec{v}) = -1\vec{v} + 1\vec{v} = \vec{0}$

$(1-1)\,\vec{v} = (-1+1)\,\vec{v} = \vec{0}$

$0\,\vec{v} = 0\,\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{0} = \vec{0} = \vec{0}$

dist. soma escalar

5) $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$

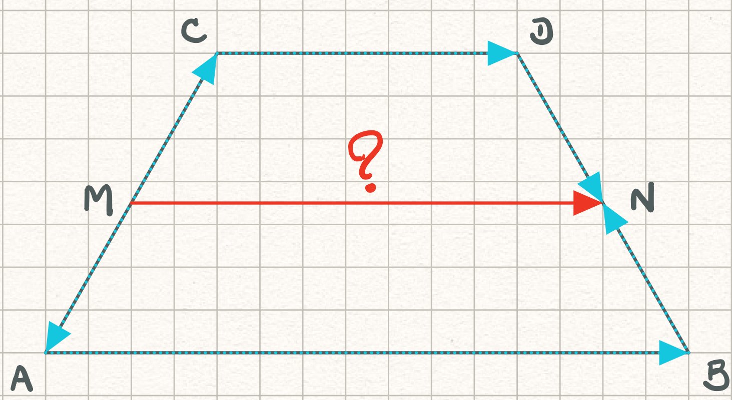
$1\vec{v} + 1\vec{v} = 2\vec{v}$

$(1+1)\,\vec{v} = 2\vec{v}$

$2\vec{v} = 2\vec{v}$

dist. soma escalar

6)



$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CD} + \vec{DN}$

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}$ (+)

$$2\,\vec{MN} = \underbrace{\vec{MC} + \vec{MA}}_{=\vec{0}\text{ (vetores opostos)}} + \vec{CD} + \vec{AB} + \underbrace{\vec{DN} + \vec{BN}}_{=\vec{0}\text{ (vetores opostos)}}$$

$\therefore\ 2\,\vec{MN} = \vec{CD} + \vec{AB}$

$\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{CD}\right)$

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ pois são as bases maior e menor do trapézio, respectivamente.

Logo:

$\vec{MN} = k(\vec{AB} + \vec{CD})$ é paralelo às bases, pois o vetor resultante do produto de outro vetor por um escalar é paralelo a esse vetor, por definição.

$$|\vec{MN}| = \frac{1}{2}\,|\vec{AB} + \vec{CD}| = \frac{1}{2}\left(|\vec{AB}| + |\vec{CD}|\right)$$