2a. Lista de Exercícios de MAT0206 e MAP0215

1^o. semestre de 2021

1. Use o princípio de indução para provar as seguintes igualdades, para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

   b)$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

   d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

   e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

   f) $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.

   g) $(1+x)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^n$.

   h) $(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$.

2. Demonstre o princípio de indução usando o princípio da boa ordem.

3. Seja A um subconjunto dos números naturais que é indutivo e suponha que $n_0 \in A$. Mostre que $A \supset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

4. Mostre que todo subconjunto finito e não vazio A de $\mathbb{N}$ tem um elemento máximo (isto é existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \geq n$, para todo $n \in A$).

5. Sejam A e B conjuntos finitos e $\mathcal{F}(A;B)$ o conjunto das funções de A em B. Mostre que, se $\operatorname{card}(A) = m$ e $\operatorname{card}(B) = n$ então $\operatorname{card}(\mathcal{F}(A;B)) = n^m$.

6. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A. Mostre que se $\operatorname{card}(A) = m$, então $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^m$.

7. Dada $f : A \to B$, prove:

   (a) Se A é infinito e f é injetora, então B é infinito.

   (b) Se B é infinito e f é sobrejetora, então A é infinito.

8. Mostre que a união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

9. Mostre que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$. seja $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N} \mid \sharp X = n\}$. Prove que $\mathcal{P}_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\mathcal{P}_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

11. Prove que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é não enumerável.