

Geometria Analítica

1º Semestre de 2021

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Cronograma do curso

20/04 (terça-feira)	Aula 1 – Introdução ao curso. Segmentos orientados e vetores
22/04 (quinta-feira)	Aula 2 – Multiplicação por escalar e soma de vetores
27/04 (terça-feira)	Aula 3 – Combinação linear, LI e LD
29/04 (quinta-feira)	Aula 4 – Vetores no plano, base do plano e plano coordenado
04/05 (terça-feira)	Aula 5 – Vetores no espaço, base e mudança de base
06/05 (quinta-feira)	Aula 6 – Norma e produto interno
11/05 (terça-feira)	Aula 7 – Medida angular e projeção ortogonal
13/05 (quinta-feira)	Aula 8 – Reta no plano (equação vetorial, paramétrica e simétrica)
18/05 (terça-feira)	Aula 9 – Reta no plano (equação reduzida, medida angular...)
20/05 (quinta-feira)	
25/05 (terça-feira)	P₁ (AVALIAÇÃO)
27/05 (quinta-feira)	Aula 10 – Seções cônicas (lugar geométrico, parábola, elipse, hipérbole)
01/06 (terça-feira)	Vista de prova
03/06 (quinta-feira)	Não haverá aula (Corpus Christi)
08/06 (terça-feira)	Aula 11 – Equação da elipse e hipérbole, translação
10/06 (quinta-feira)	Aula 12 – Rotação
15/06 (terça-feira)	Aula 13 – Rotação e coordenadas polares
17/06 (quinta-feira)	Aula 14 – Curvas paramétricas
22/06 (terça-feira)	Aula 15 – Produto vetorial
24/06 (quinta-feira)	Aula 16 – Produto misto
29/06 (terça-feira)	Aula 17 – Equação da reta no espaço
01/07 (quinta-feira)	Aula 18 – Equação do plano
06/07 (terça-feira)	Aula 19 – Distâncias
08/07 (quinta-feira)	Aula 20 – Superfícies quádricas
13/07 (terça-feira)	Aula 21 – Superfícies quádricas
15/07 (quinta-feira)	Aula 22 – Superfícies cilíndricas
20/07 (terça-feira)	
22/07 (quinta-feira)	P₂ (AVALIAÇÃO)
27/07 (terça-feira)	Vista de prova
29/07 (quinta-feira)	
03/08 (terça-feira)	
05/08 (quinta-feira)	RECUPERAÇÃO
10/08 (terça-feira)	Vista de Prova

Método de avaliação

$$\text{Nota Final} = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Disponibilização de todo o material didático

Todo o material didático será disponibilizado na internet.

- Slides utilizados nas aulas
- Listas de exercícios
- Avaliação e frequência dos alunos
- Cronograma de aulas
- Horário de atendimento
- Monitoria

<http://edisciplinas.usp.br>

lucasarno@usp.br

Geometria Analítica

Grandezas Vetoriais

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Introdução às grandezas escalares e vetoriais

Grandezas físicas são classificadas em três categorias:

- **Escalares** (1 informação)
- **Vetoriais** (3 informações)
- **Tensoriais** (maior que 3 informações)

Qual a classificação dessas grandezas?



Representação

Grandezas Escalares:

E (energia), T (temperatura), d (distância), M (massa)

Grandezas Vetoriais:

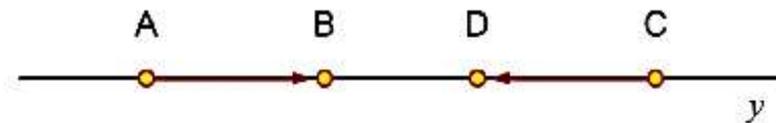
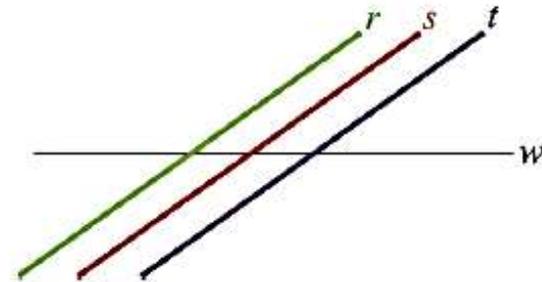
\vec{r} (o vetor posição), \vec{v} (o vetor velocidade), \vec{a} (o vetor aceleração), \vec{F} (o vetor força)

Representação de Vetores

Norma: é o atributo que caracteriza a intensidade da grandeza física.

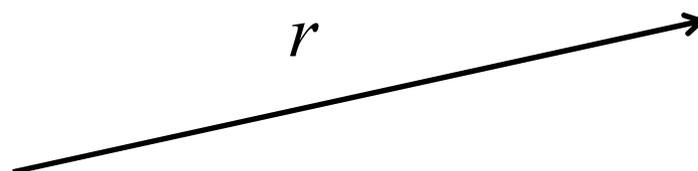
Direção: é o atributo que existe em comum num feixe de retas paralelas.

Sentido: podemos percorrer uma direção em dois sentidos.



Reta orientada

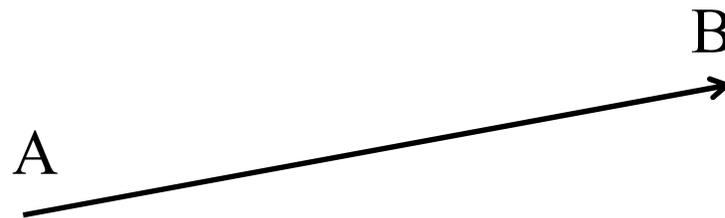
Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado positivo e indicado por uma seta.



- O sentido oposto é negativo.
- Uma reta orientada é denominada eixo.

Segmento orientado

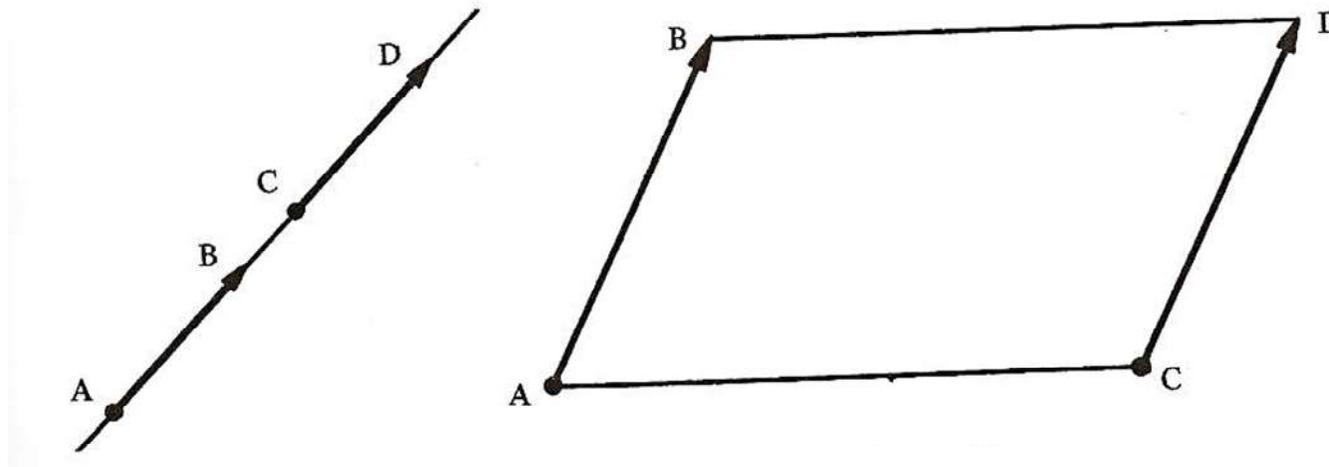
Um segmento orientado é um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento (A), o segundo chamado *extremidade* (B).



- Segmento nulo
- Segmentos opostos
- Medida de um segmento
- Direção e sentido

Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.



- A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por:
 $AB \sim CD$

Propriedades da Equipolência

A relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, quaisquer que sejam os segmentos orientados AB, CD e EF:

I) $AB \sim AB$ (reflexiva)

II) Se $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$ (simétrica)

III) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ (transitiva)

IV) Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$

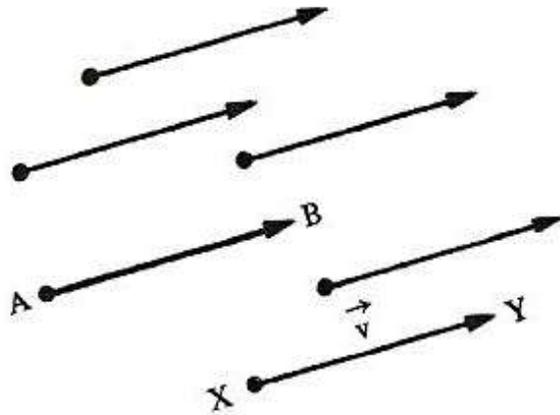
Pensando um pouco...

- Qual seria o equipolente a um segmento orientado nulo?
- Mostre que $AB \sim CD \Rightarrow AC \sim BD$.

Definição:

Dado o segmento orientado AB , a **classe de equipolência** de AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . O segmento orientado AB é chamado **representante da classe**.

Vetores



Uma classe de equipolência de segmento orientados é representada por um **vetor**.

$$\vec{v} = \{XY \mid XY \sim AB\}$$

Representação:

\vec{v}

\overrightarrow{AB}

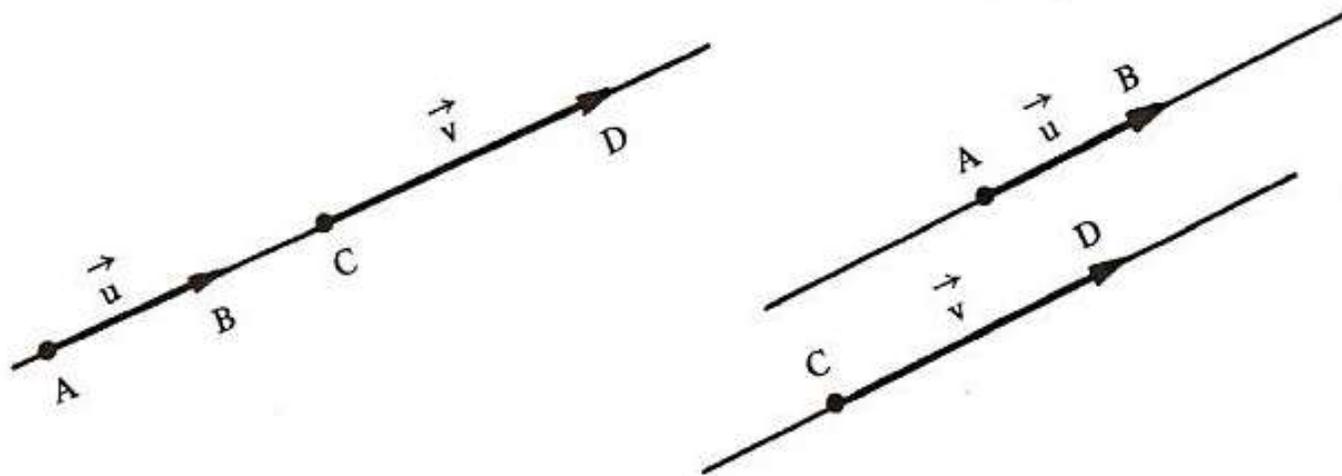
$B - A$

Casos particulares:

- *Vetores iguais*
- *Vetor nulo*
- *Vetores opostos*
- *Vetor unitário*
- *Versor*

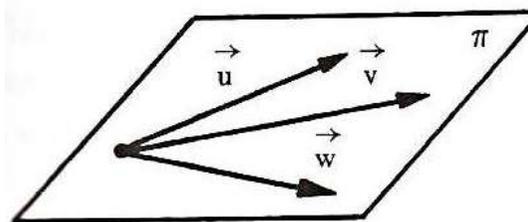
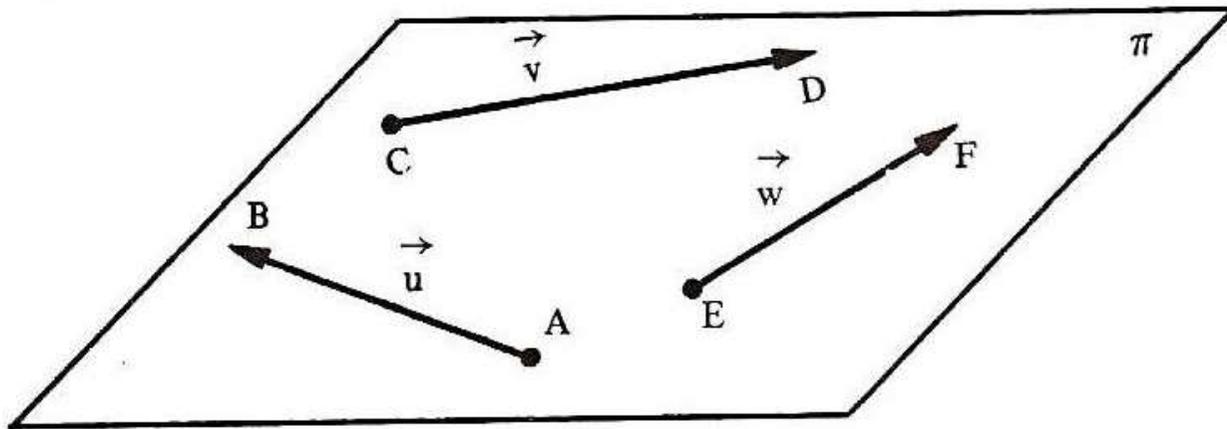
Vetores colineares

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são colineares se tiverem a mesma direção.

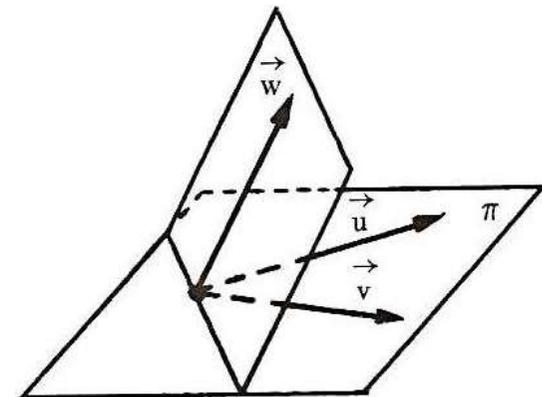


Vetores coplanares

Se os vetores não nulos \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} pertencem a um mesmo plano π .



\vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares



\vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não são coplanares

Operações com vetores

- Multiplicação por um escalar
- Adição
- Diferença

Operações com Vetores

Multiplicação por um escalar:

Podemos multiplicar um vetor \vec{v} por um número x . Dessa operação resulta um novo vetor (o vetor resultante \vec{R}):

$$\vec{R} = x\vec{v}$$

Norma: $\|\vec{R}\| = |x| \|\vec{v}\|$

Direção: é a mesma de \vec{v} .

Sentido: o mesmo $x > 0$
sentido oposto $x < 0$

$$\vec{R} = 2\vec{v}$$

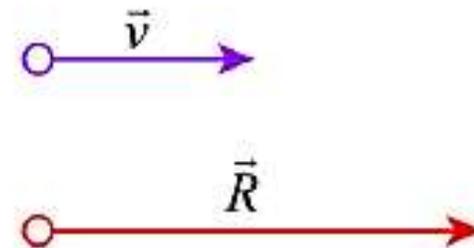


Figura 1.4: Multiplicando um vetor por dois.

Definição

Sejam α um número real e \vec{v} um vetor.

(a) Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ caracteriza-se por:

- $\alpha\vec{v} // \vec{v}$;
- $\alpha\vec{v}$ e \vec{v} são de mesmo sentido se $\alpha > 0$, e de sentido contrário se $\alpha < 0$;
- $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$.

Propriedades da multiplicação por um número real

Se \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

I) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ (associativa)

II) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de escalares)

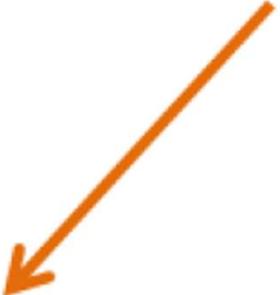
III) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de vetores)

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade)

Exemplo:

(Multiplicação de vetor por escalar)

Represente os vetores da coluna da esquerda:

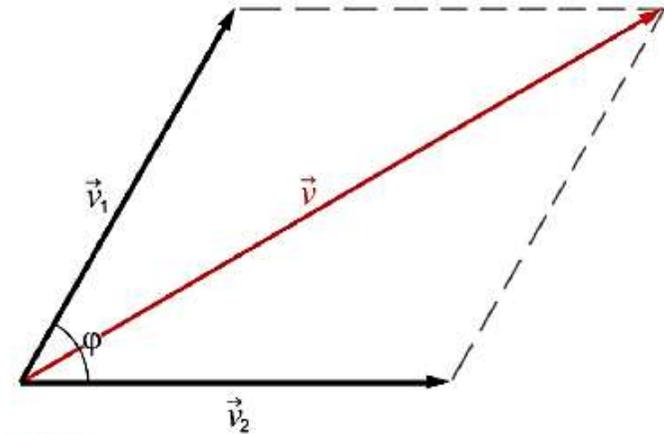
a) \vec{a}		$2\vec{a}$	
b) \vec{b}		$\frac{\vec{b}}{2}$	
c) \vec{c}		$-3\vec{c}$	
d) \vec{d}		$-\vec{d}$	

Soma de vetores

Sejam \vec{v}_1 e \vec{v}_2 dois vetores. A soma desses vetores é um terceiro vetor, o vetor resultante \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Para determinarmos o módulo, a direção e o sentido desse vetor resultante, utilizamos a regra do paralelogramo. Primeiramente, desenhamos o paralelogramo definido a partir dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .



Propriedades da adição

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor \vec{v} se tem:

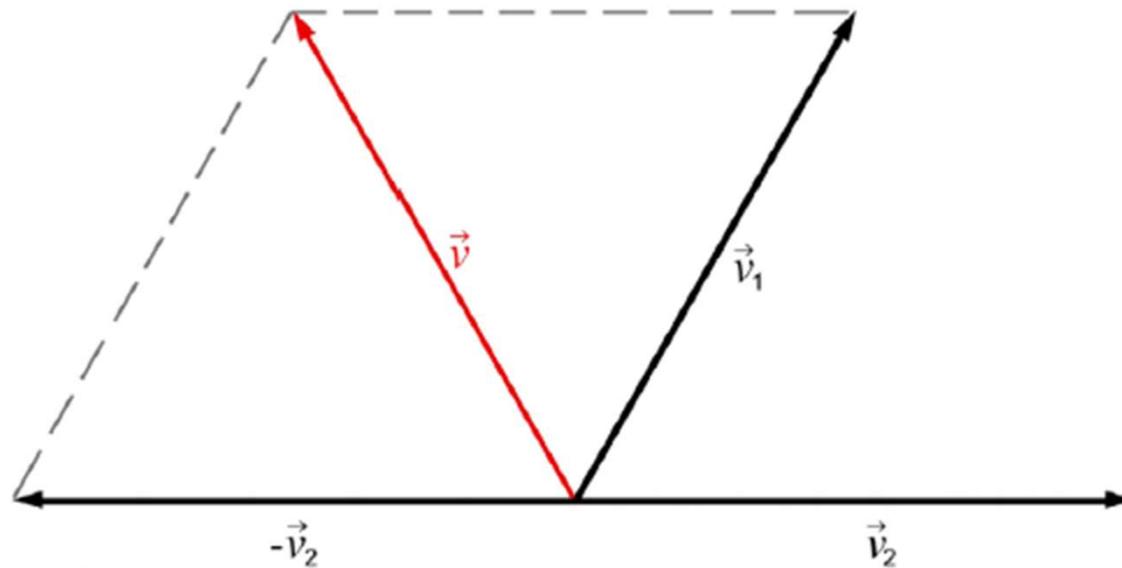
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

IV) Qualquer que seja o vetor \vec{v} , existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de \vec{v}) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

Diferença de vetores

Consideremos os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . A subtração de vetores resulta em um terceiro vetor \vec{v} chamado diferença, cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores \vec{v}_1 e $(-\vec{v}_2)$.



Extensão para muitos vetores

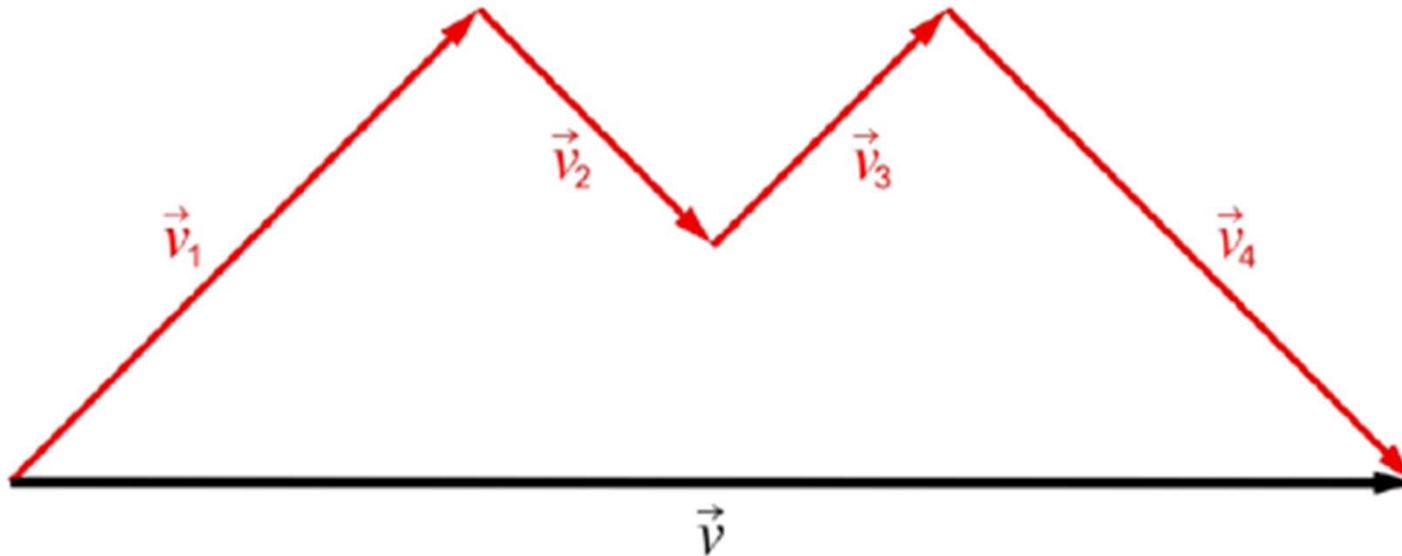


Figura 1.8: Posicionando-se os vetores, um em seguida ao outro, o vetor soma é aquele que fecha o polígono

Exercícios

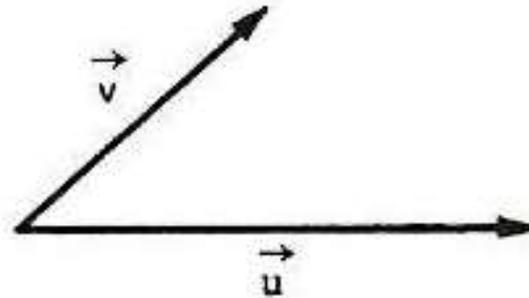
1) Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



2) Dados os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , como na figura, apresentar um representante de cada um dos vetores:

a) $4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

c) $2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

