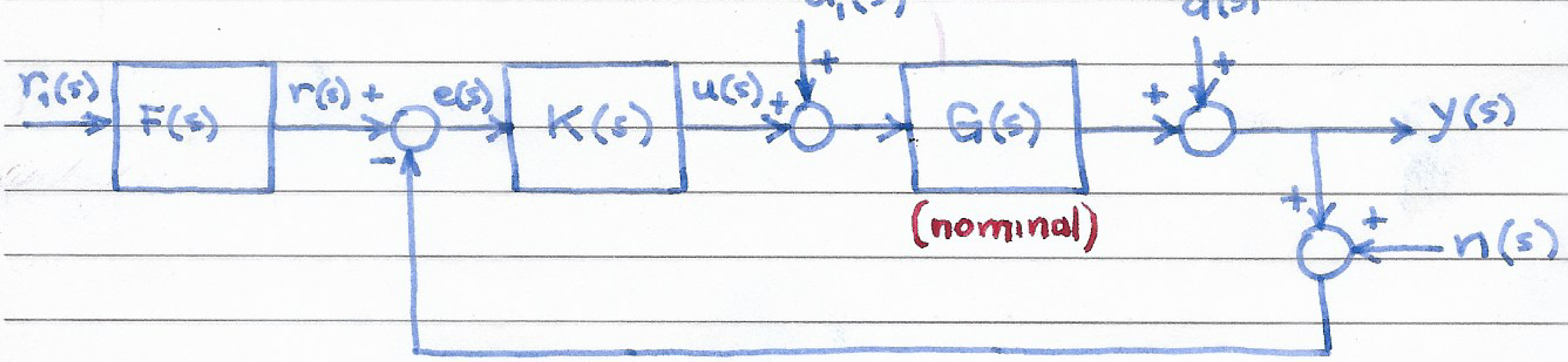
CAP. 2 - ESTABILIDADE E DESEMPENHO NOMINAIS

2.1 - INTRODUÇÃO

- Estudo da estabilidade e do desempenho para o modelo nominal (sem erros de modelagem)
- Estabilidade → interna
- Desempenho
  - Acompanhamento do sinal de referência
  - Rejeição de perturbações
  - Rejeição do erro de medida
  - Limitação do esforço de controle
  - Erro estacionário
  - Sistemas com especificações temporais
- Diagrama de blocos mais geral



• Problema de projeto:

$$K(s) = ?$$

$$F(s) = ? \quad \text{(eventualmente)}$$

• Sistema linear ⇒ vale T. Superposição

∴ uma entrada considerada por vez

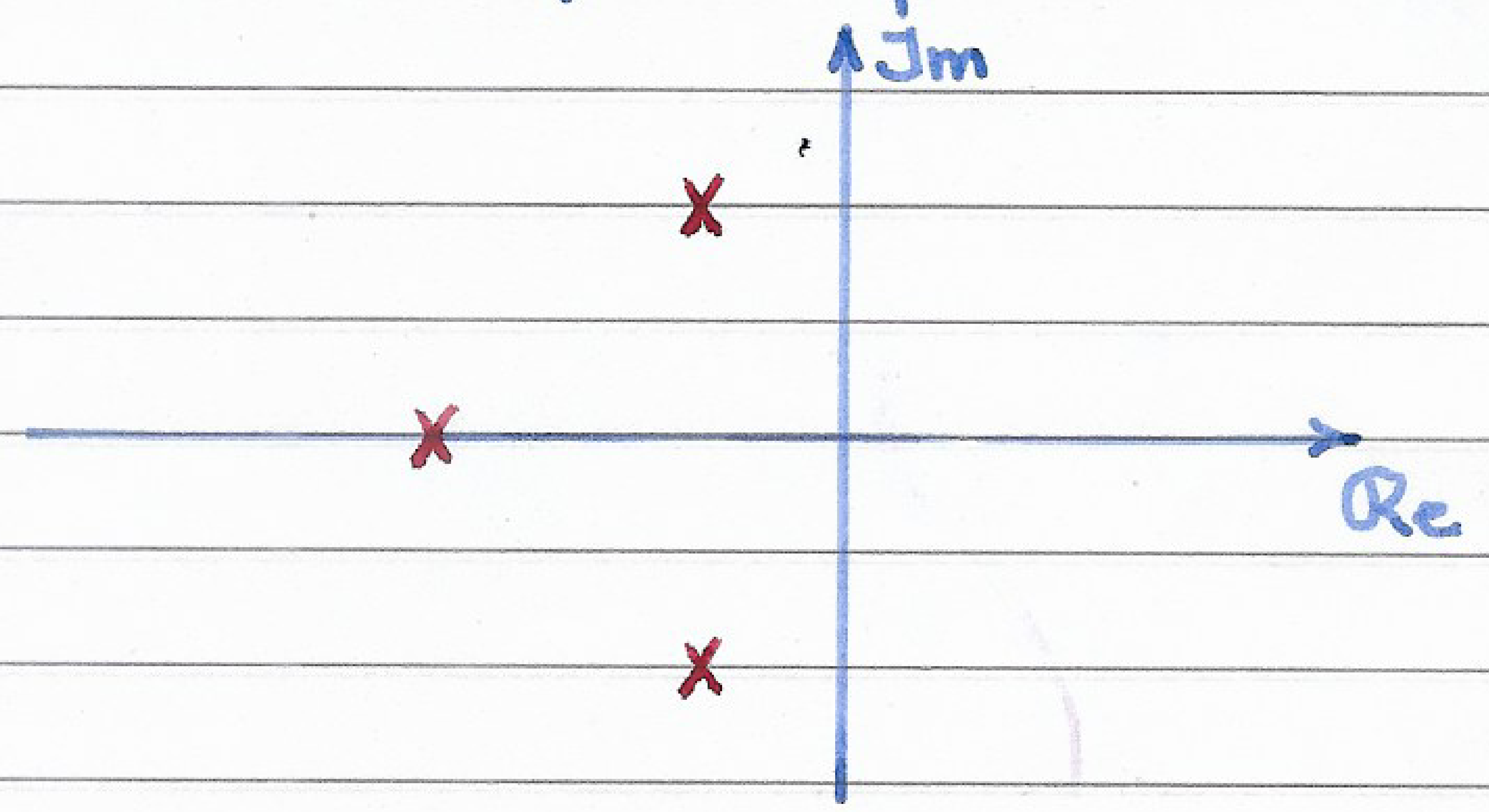
2.2 - ESTABILIDADE NOMINAL

- Sistemas descritos por funções de transferência (f.t.)

• **Estabilidade assintótica de uma f.t.**

- Uma f.t. é assintoticamente estável se e apenas se todos os seus polos pertencem ao S.P.E. aberto

excluído o eixo imaginário



- Equivalente à estabilidade BIBO

- **Estabilidade interna de um sistema**

- No diagrama de blocos mais geral:

  - 4 entradas: $r_1(s)$, $d_i(s)$, $d(s)$, $n(s)$
  - 3 saídas: $y(s)$, $e(s)$, $u(s)$
  - Portanto: 12 f.t.'s

- O sistema é internamente estável se e apenas se essas 12 f.t.'s são assintoticamente estáveis.

- **Teorema** - Estabilidade interna

"Supondo $F(s)$ assintoticamente estável, o sistema representado pelo diagrama de blocos mais geral é internamente estável se as duas condições abaixo se verificam:

i) $T(s)$ é assintoticamente estável

ii) não há cancelamento entre polos e zeros de $G(s)$ e $K(s)$ no S.P.D. fechado"

inclui o eixo imaginário

Obs: O problema não está na impossibilidade do cancelamento exato na prática!

EXEMPLO - $F(s) = 1$

$$\left.\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ K(s) &= \frac{(s-1)}{(s+3)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(s)K(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

- T(s) é estável?

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} = \frac{1}{s^2+4s+4} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$\therefore$ T(s) é estável

- Sistema é internamente estável?

  - testar cada uma das 12 f.t.'s ... !!!

1) $\dfrac{y(s)}{r(s)} = T(s) \rightarrow$ ok!

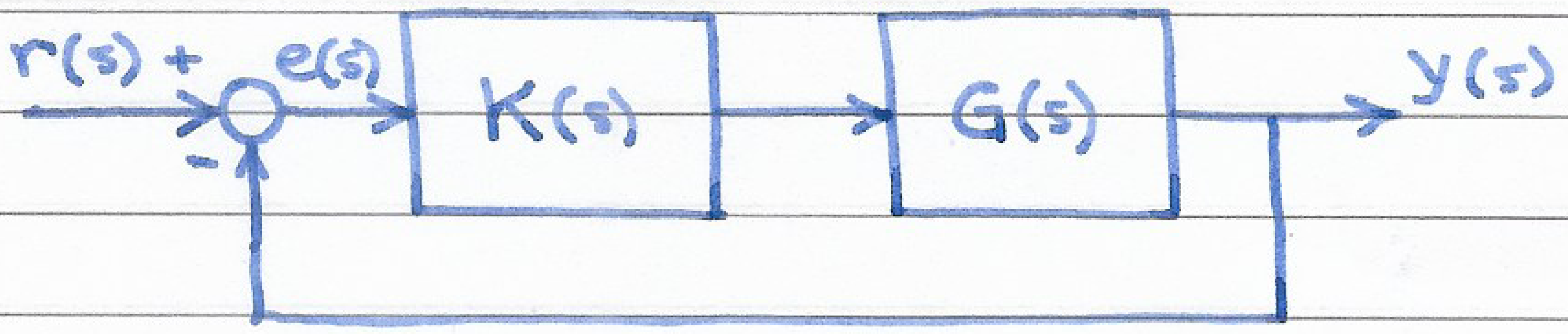
2) $\dfrac{y(s)}{d_i(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)K(s)} = \dfrac{\frac{1}{(s+1)(s-1)}}{1+\frac{1}{(s+1)\cancel{(s-1)}}\cdot\frac{\cancel{(s-1)}}{(s+3)}} \Rightarrow$

$$\frac{y(s)}{d_i(s)} = \frac{(s+3)}{\underline{\underline{(s-1)}}(s+2)^2} \Rightarrow \text{Instável!}$$

- - -

- Muito trabalhoso!

2.3 - Acompanhamento do sinal de referência



$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \Rightarrow \boxed{y(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)}\, r(j\omega)}$$

$r(j\omega)$ tem energia significativa em Ω_r:

$$\Omega_r = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \leq \underbrace{\omega_r}_{\text{dado}}\}$$

- **Qualitativamente**

$$\therefore \boxed{\text{se } |G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \Rightarrow y(j\omega) \simeq r(j\omega)}$$

Obs: Como vimos, se $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$, então:

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \Rightarrow T(j\omega) = 1$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \Rightarrow |S(j\omega)| \ll 1$$

- **Quantitativamente**

$$\frac{|e(j\omega)|}{|r(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

$\delta_r(\omega)$: dado (especificação de projeto)

Tipicamente: $\delta_r(\omega) \ll 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$

Mas:

$$\frac{e(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)}$$

Portanto:

$$\frac{|e(j\omega)|}{|r(j\omega)|} = \frac{1}{|1+G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

Ou seja:

$$\boxed{|S(j\omega)| \leq \delta_r(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)} \qquad (H_\infty)$$

Alternativamente:

$$|1+G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

Se $\delta_r(\omega) << 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta_r(\omega)} >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_r)$

Portanto, podemos aproximar:

$$\boxed{|G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} >> 1 (\omega \in \Omega_r)} \text{ (Loop Shaping)}$$

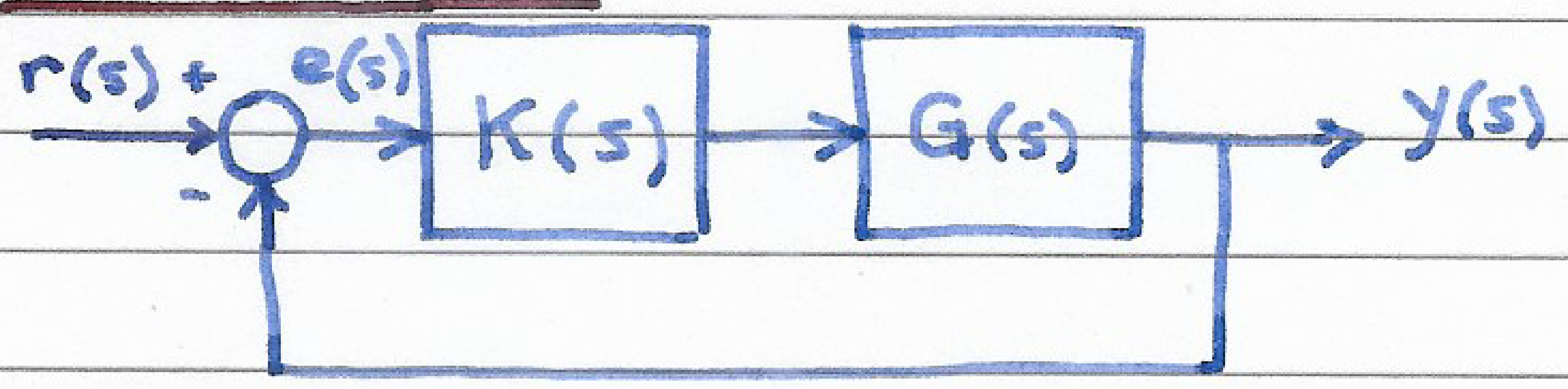
Essas são as Condições de Acompanhamento do Sinal de Referência para o caso nominal.

- Obs: Note que $|G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\delta_r(\omega)} >> 1 \qquad (\omega \in \Omega_r) \Rightarrow$

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \simeq 1 \qquad (\omega \in \Omega_r) \Rightarrow$$

$$y(j\omega) = T(j\omega)\, r(j\omega) \simeq r(j\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

EXEMPLO 2.2



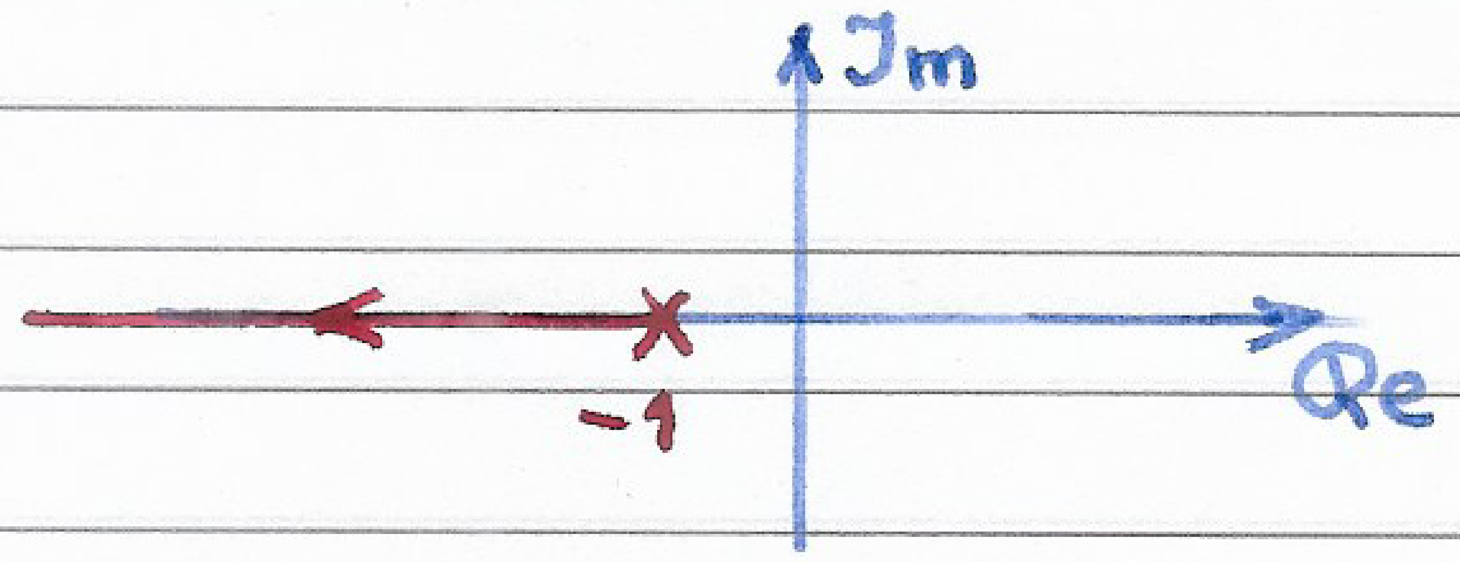
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$K(s) = 100$$

- Estabilidade interna

i) $T(s) = \dfrac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} = \dfrac{100}{s+101} \Rightarrow$ estável

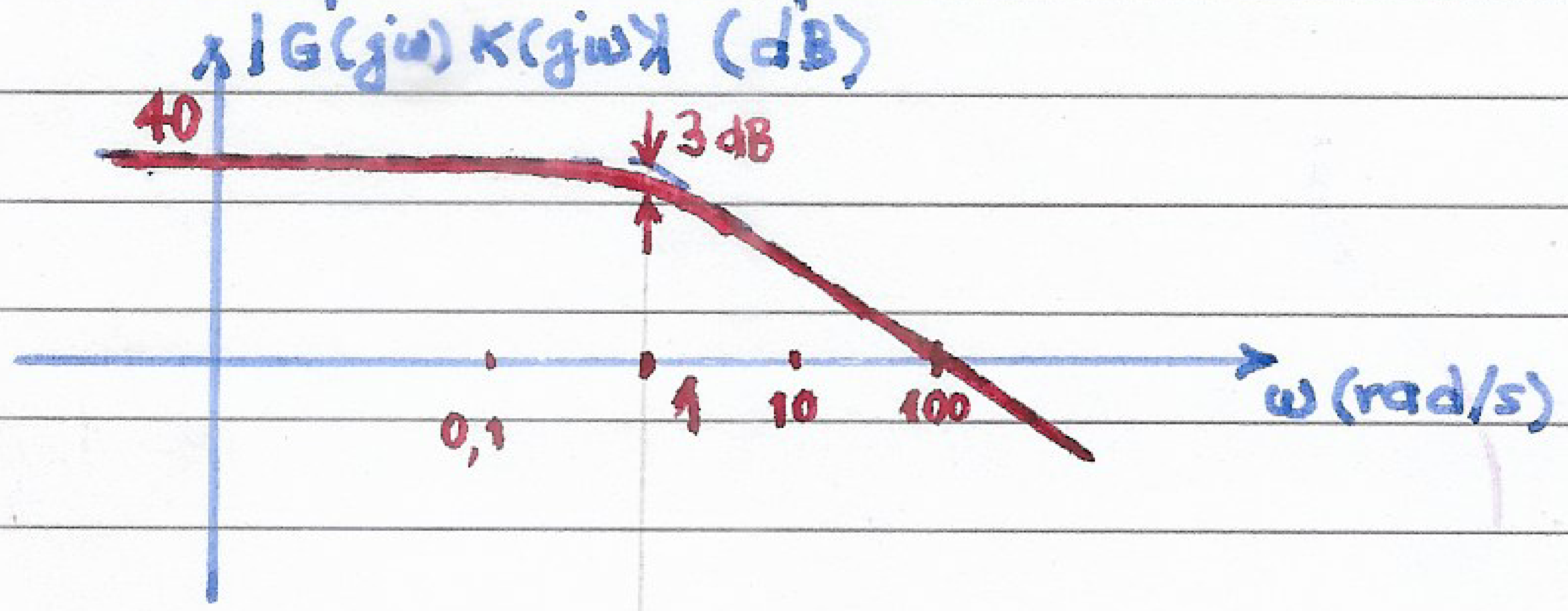
ou via L.G.R.:



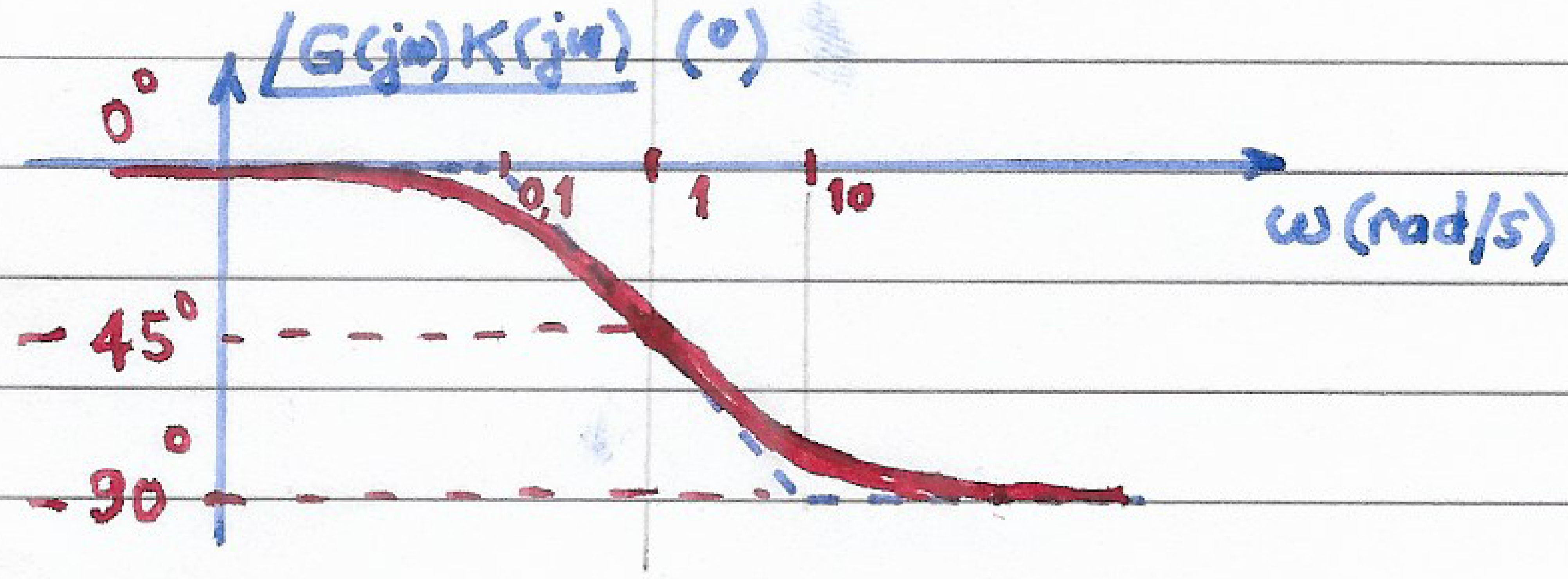
ii) Não há cancelamento entre polos e zeros de $G(s)$ e $K(s)$ no S.P.D. fechado

Conclusão: internamente estável

- Resposta em frequência de malha aberta



Ganho em b.f. = 40 dB = = 100



- Para $\underbrace{\omega \leq 1 \text{ rad/s}}_{\omega_r} \Rightarrow |G(j\omega)K(j\omega)| \geq \underbrace{100}_{1/\delta_r(\omega)}$ (aproximadamente)

$\Omega_r = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \leq \omega_r\}$

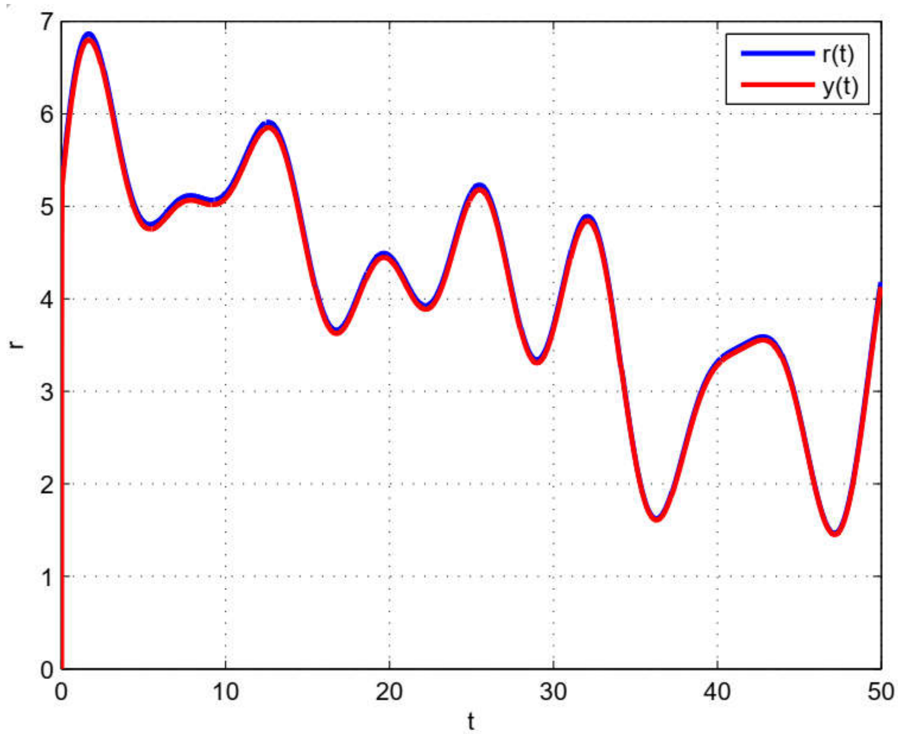
$\frac{1}{\delta_r(\omega)} = 100 \Rightarrow \delta_r(\omega) = 0{,}01 \quad (\omega \in \Omega_r)$

- Ou seja, o erro de acompanhamento de sinais de referência senoidais com frequências até 1 rad/s é inferior a 1%.

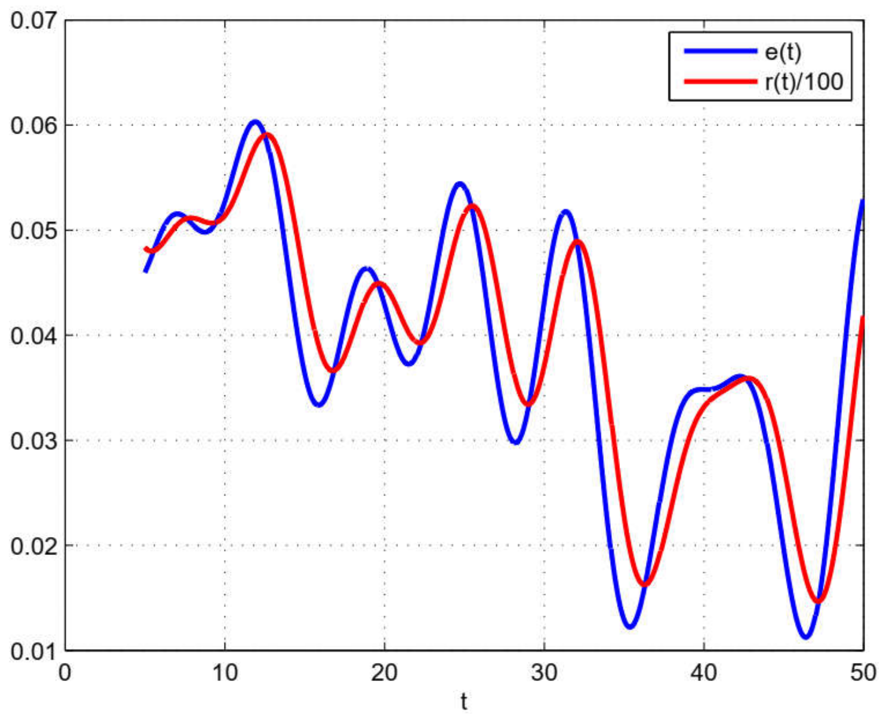
- <u>Simulações</u> - $r(t) = \sum_{\omega \leq 1}$ senóides de ampl. ≤ 1 e fases aleatórias

  Ver figuras 2.3 e 2.4 da Apostila:

  - $r(t)$ e $y(t)$ têm gráficos praticamente indistinguíveis
  - $e(t)$ inferior a 1%
  - transitório inicial não incluído na figura.



r(t)
y(t)
r
t



e(t)
r(t)/100
t

2.4 - REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

- Perturbações representadas:
  - na entrada da planta → "causas"
  - na saída da planta → "efeitos"

filtrados pela planta ⇒ b.f.

EXEMPLO 2.3 - Entrada x Saída

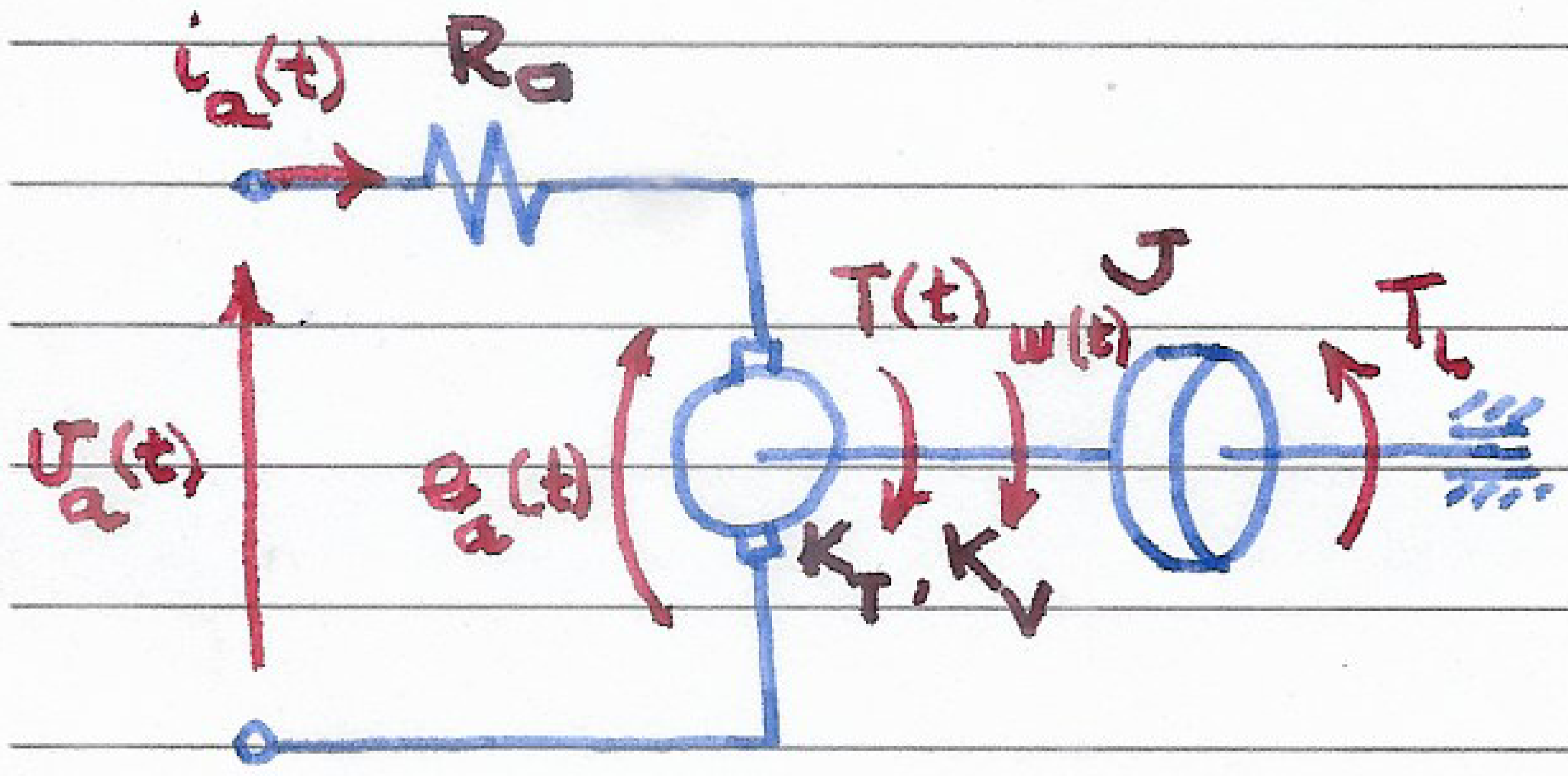
Motor C.C.

Entrada: tensão de armadura (v_a)

Saída: velocidade de rotação (ω)

Carga: inércia pura (J)

Perturbação: torque de atrito ~~constante~~ (T_L)



Kirchhoff:

$$v_a(t) = e_a(t) + R_a i_a(t)$$

Motor:

$$e_a(t) = K_V \omega(t)$$

$$T(t) = K_T i_a(t)$$

Carga mecânica

$$T(t) = J\dot{\omega}(t) + T_L$$