DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE

DISCIPLINA: CÁLCULO I (LOB1003)

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

PROFa. DIOVANA NAPOLEÃO

DEFINIÇÃO FORMAL DO LIMITE

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas x 3).

Observe que as condições apresentadas na Fig. 1 podem ser reescritas como:

$3 - \delta < x < 3 + \delta (x\ 3)$
então
$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$

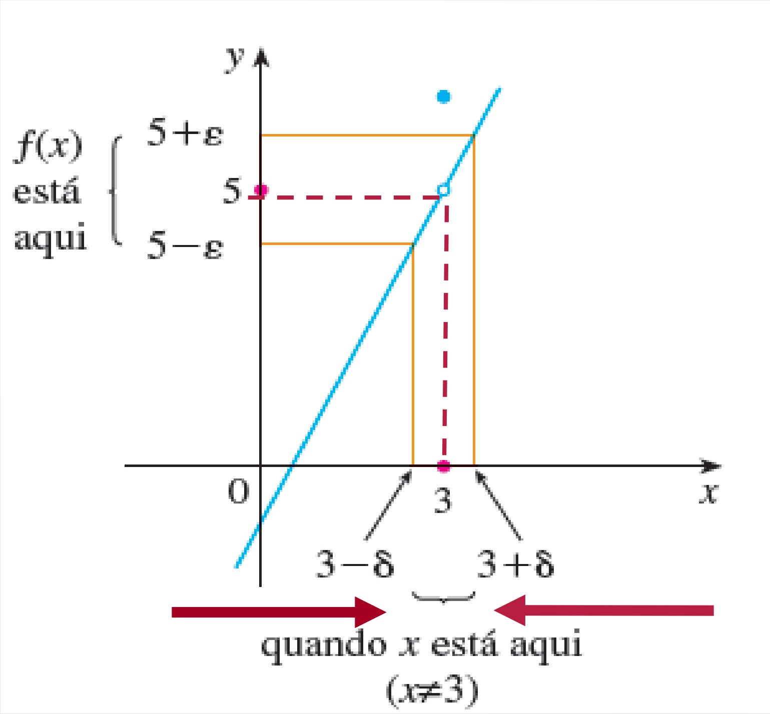


Figura 1

DEFINIÇÃO FORMAL DO LIMITE

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINIÇÃO FORMAL DO LIMITE

Uma vez que | *x* – *a* | é a distância de *x* a *a* e | *f* (*x*) – *L* | é a distância de *f* (*x*) a *L*, e como *ε* pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$lim_{x \to a}$ *f*(*x*) = *L* significa que a distância entre *f* (*x*) e *L* fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de *x* a *a* suficientemente pequena (mas não igual a 0).

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Exemplo 1: Vamos analisar o comportamento da função *f* definida por *f* (*x*) $=x^2 - x + 2$ para valores de *x* próximos de 2.

A tabela a seguir fornece os valores de *f* (*x*) para valores de *x* próximos de 2, mas não iguais a 2.

Aproximação pela lateral esquerda

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Aproximação pela lateral direita

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Da tabela e do gráfico de *f* (uma parábola) apresentado na Figura 2, vemos que quando *x* está próximo de 2 (em qualquer lado de 2), *f* (*x*) tenderá a 4.

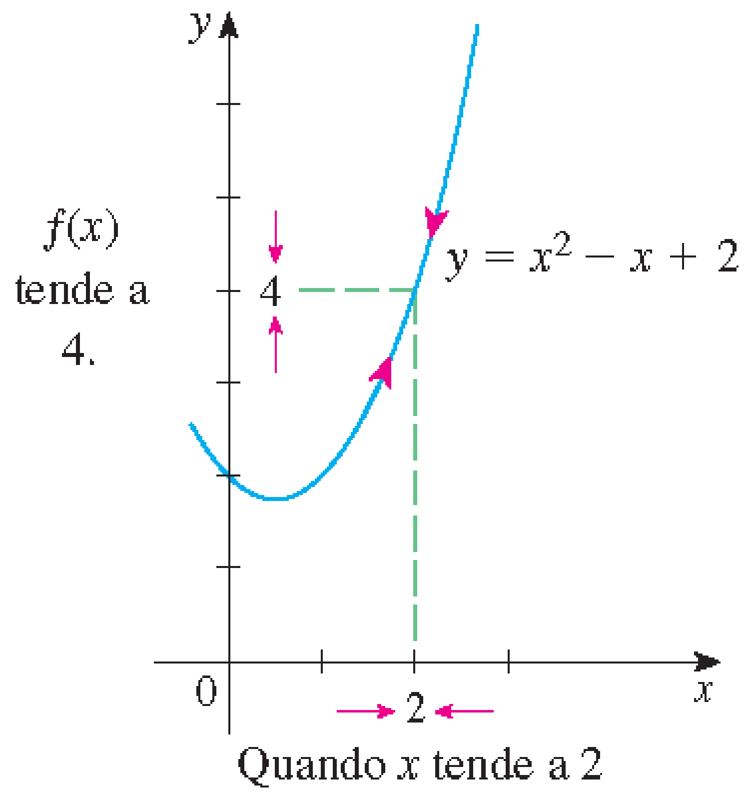


Figura 2

A notação para isso é $\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Exemplo 2: O gráfico de *f* está apresentado na Figura 3. Agora vamos mudar ligeiramente *f* definindo seu valor como 2 quando *x* = 1 e chamando a função resultante de *g*:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = 0{,}5$$

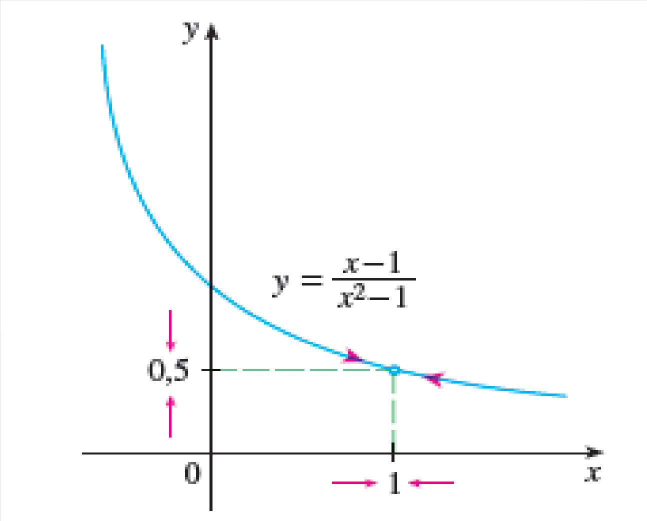


Figura 3

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Essa nova função *g* tem o mesmo limite quando *x* tende a 1 (Figura 4).

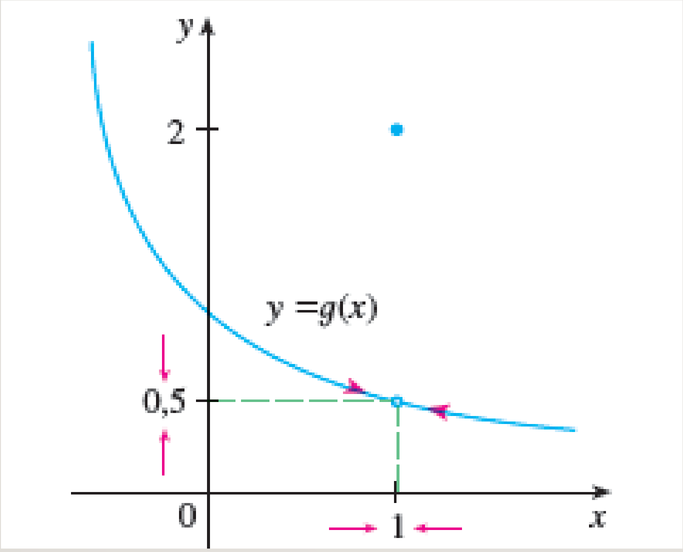


Figura 4

LIMITES LATERAIS

A função de heaviside *H*, é definida por:

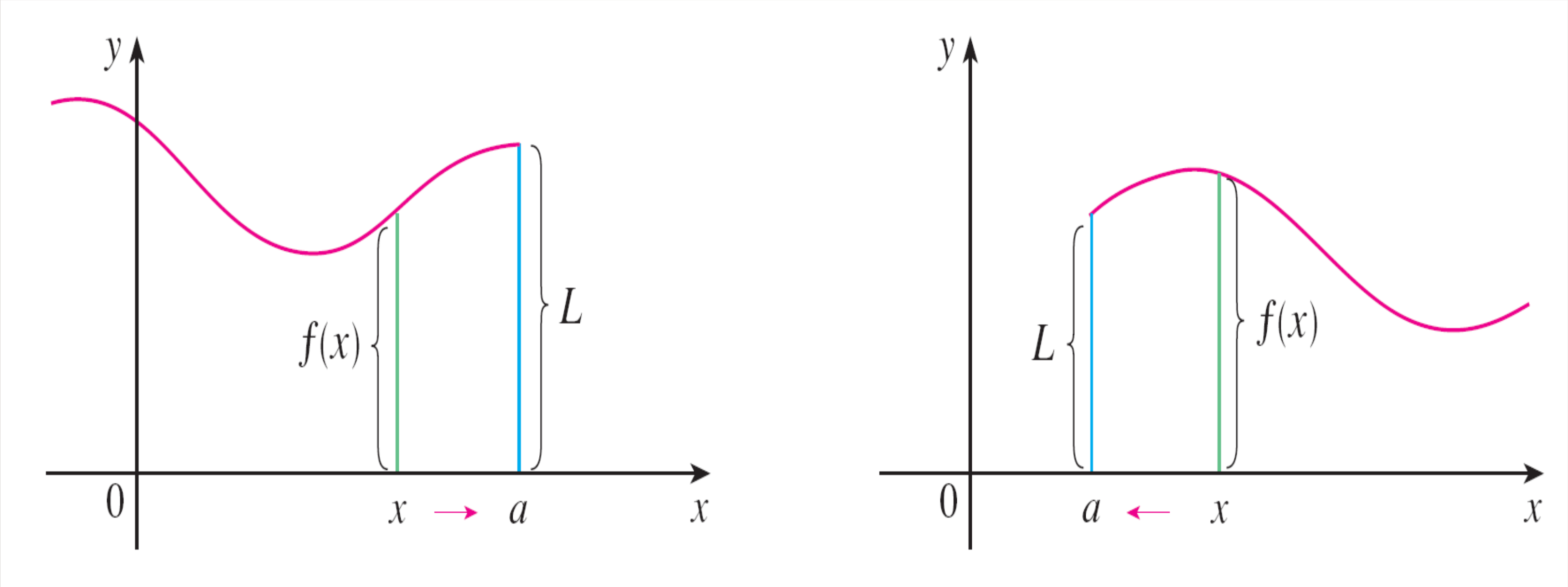
$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

H (*t*) tende a 0 quando *t* tende a 0 pela esquerda, e *H* (*t*) tende a 1 quando *t* tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

Portanto o $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe

LIMITES LATERAIS



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$