UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

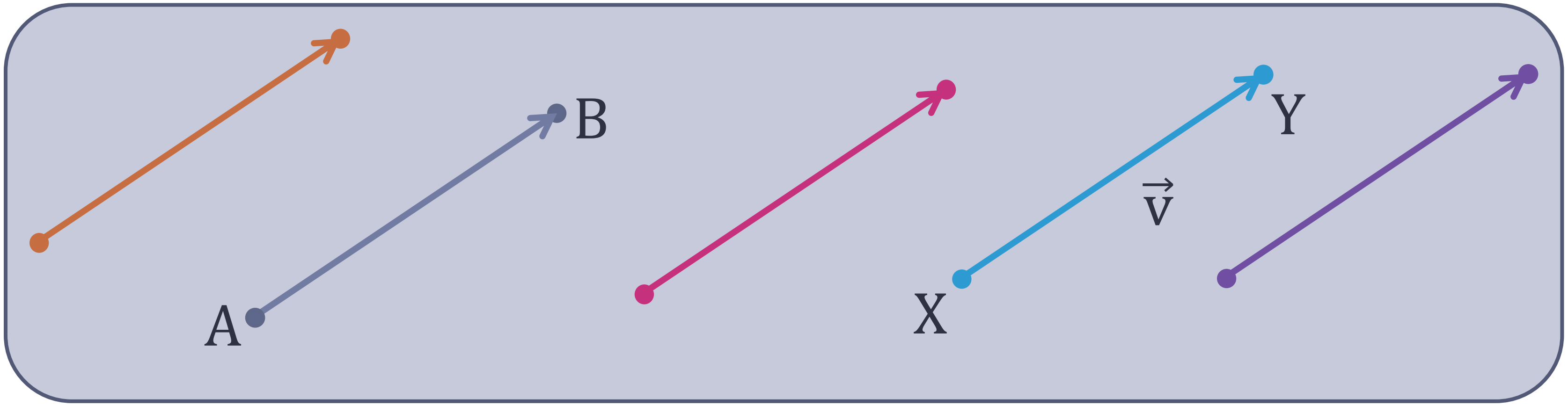
2. Vetores

LOB1036 - Geometria Analítica

Profa. Paula C P M Pardal

2.1 Vetores

- O conjunto de todos os SOs equipolentes a um SO AB é chamado **VETOR**.



Se o conjunto acima é indicado por $\vec{v}$, pode ser simbolicamente escrito como:

$$\vec{v} = \{XY \;/\; XY \sim AB\}$$

em que XY é um segmento qualquer do conjunto.

- **Notação**: $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$.

- **Observação:** dado um vetor $\vec{u}$ e um ponto P quaisquer, haverá um único SO representante de $\vec{u}$ com origem em P.

- Um **vetor** se caracteriza por módulo (norma ou comprimento), direção e sentido. O módulo de um vetor é indicado por $|\vec{v}|$.

- ***Vetores Iguais***: dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais $\Leftrightarrow$ $AB \sim CD$.

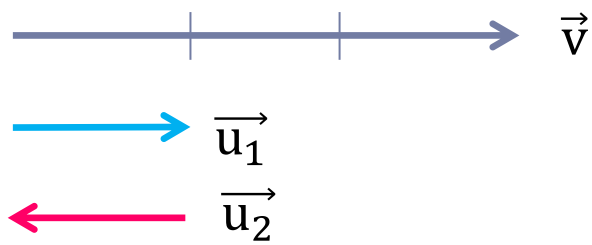
- ***Vetor Nulo***: o vetor que tem como representante o SO nulo será chamado vetor nulo ou zero e indicado por $\vec{\mathbf{0}}$.

- ***Vetor Unitário***: é aquele cujo modulo é unitário ($|\vec{v}| = \mathbf{1}$).

- ***Vetores Opostos***: se AB é o representante do vetor $\vec{v}$, o vetor oposto é aquele que tem como representante BA e será $-\vec{v}$.

  - Dois vetores opostos têm mesmos módulo e direção, mas sentidos contrários.

- ***Versor***: o versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

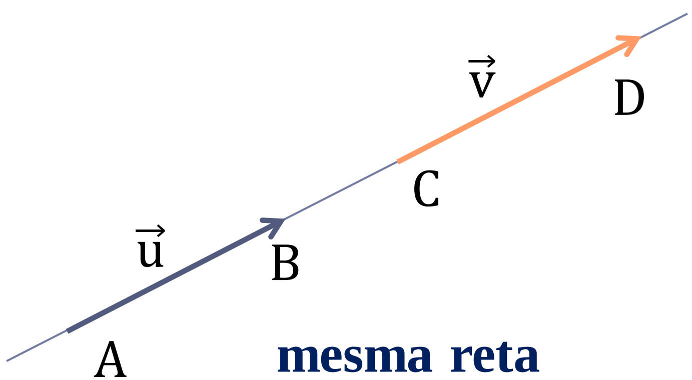


$|\vec{v}| = 3$ u.c.

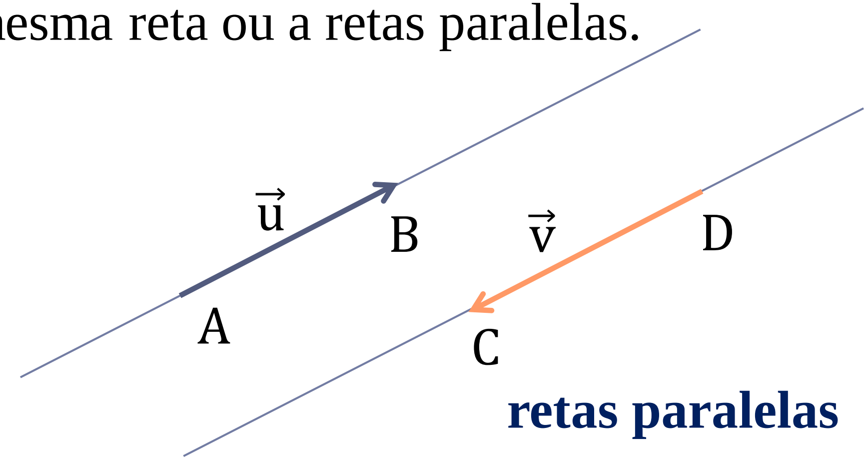
$|\overrightarrow{u_1}| = |\overrightarrow{u_2}| = 1$ u. c.

No entanto, somente $\overrightarrow{u_1}$ é ***versor*** de $\vec{v}$.

- ***Vetores Colineares***: dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ são colineares se tiverem a mesma direção, isto é, se pertencerem à mesma reta ou a retas paralelas.



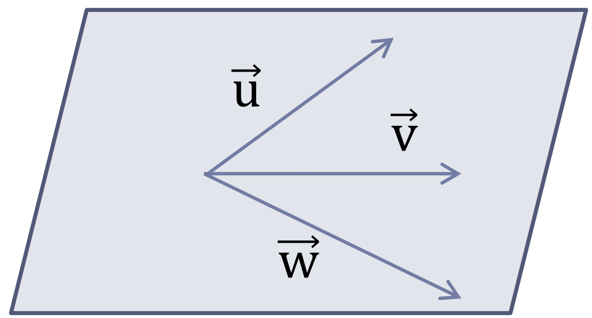
mesma reta



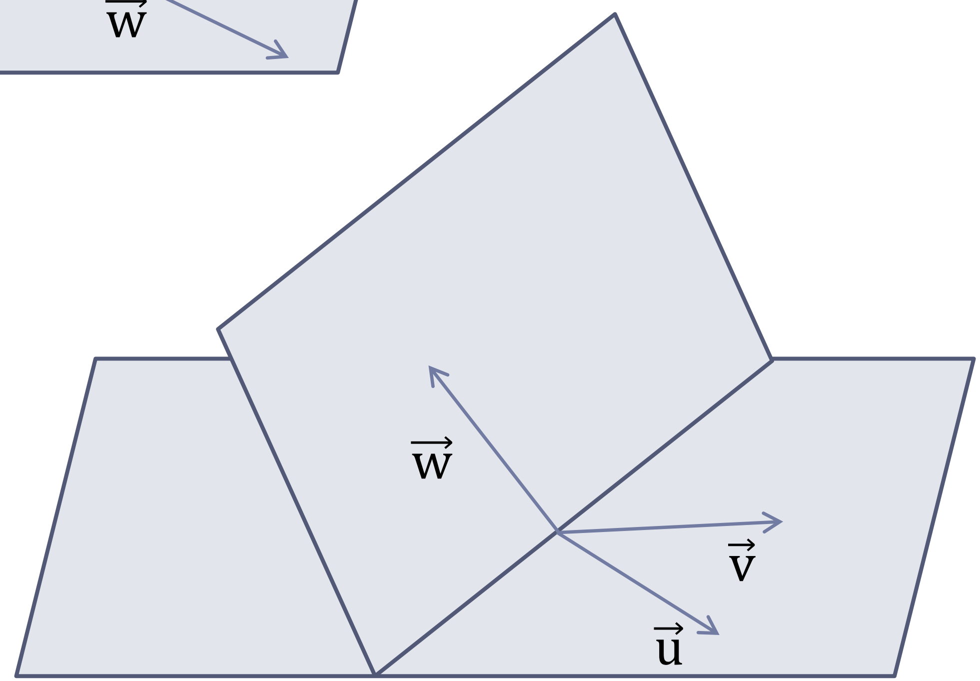
retas paralelas

- ***Vetores Coplanares***: vetores não nulos são coplanares se pertencem ao **mesmo plano**.

Exemplo: vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

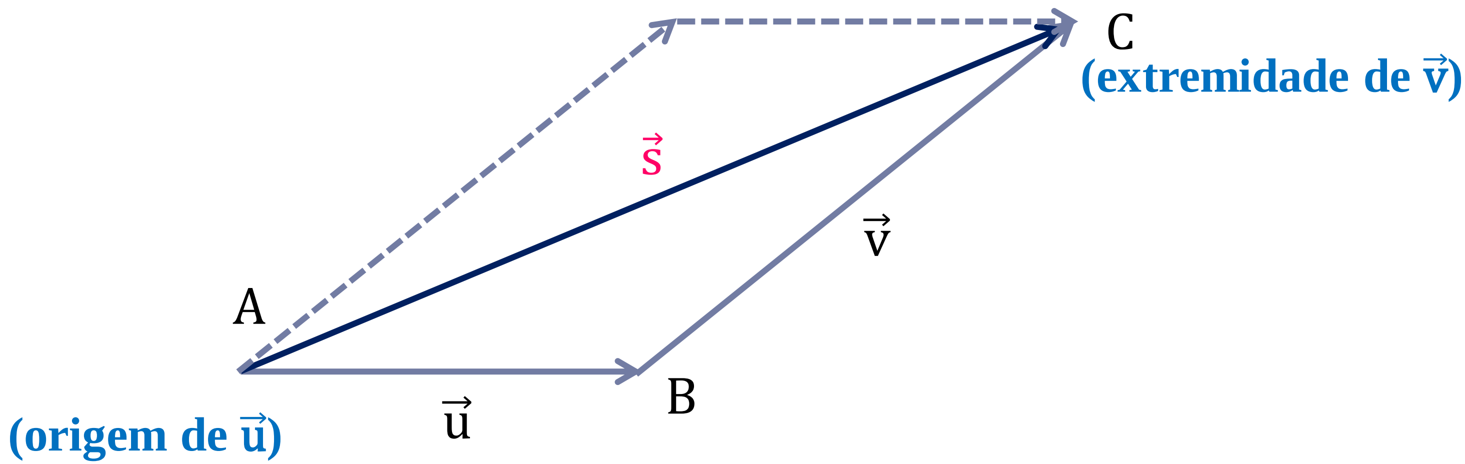


Observação: dois vetores são sempre coplanares, mas três vetores não são necessariamente coplanares.



I. *Adição de Vetores*

- Sejam os vetores: $\vec{u}$ representado pelo segmento A**B**; e $\vec{v}$ representado pelo segmento **B**C $\therefore$ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

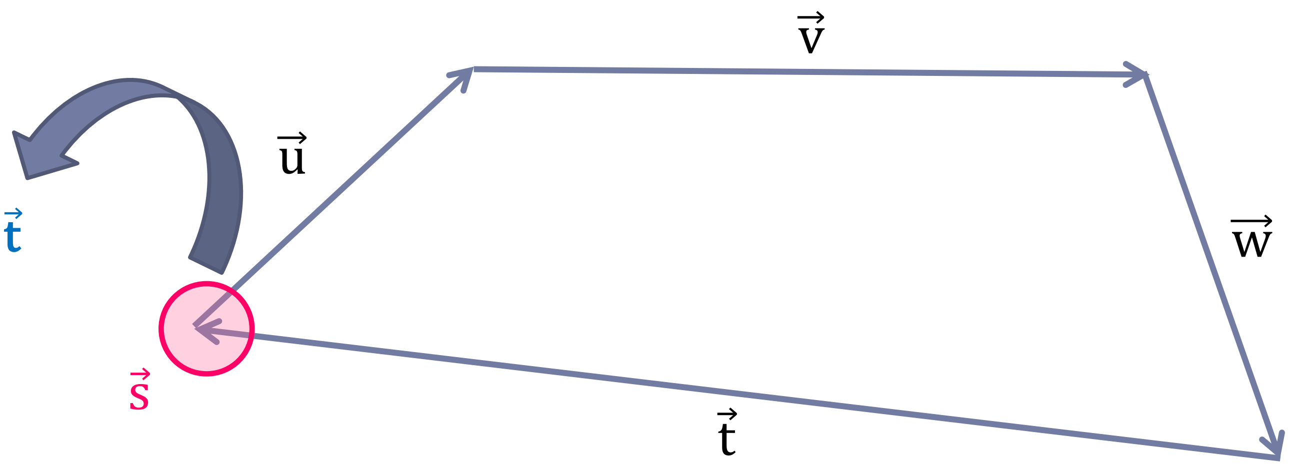


- Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que, por definição, é a **SOMA** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Observação

- Se a extremidade do último vetor da soma coincidir com a origem do primeiro, o resultado da soma será o **vetor nulo**.

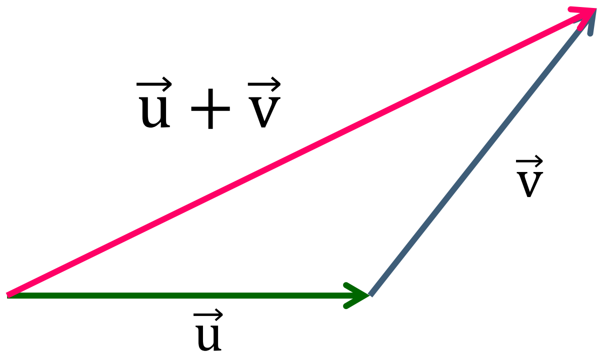
origem de $\vec{u}$ = extremidade de $\vec{t}$

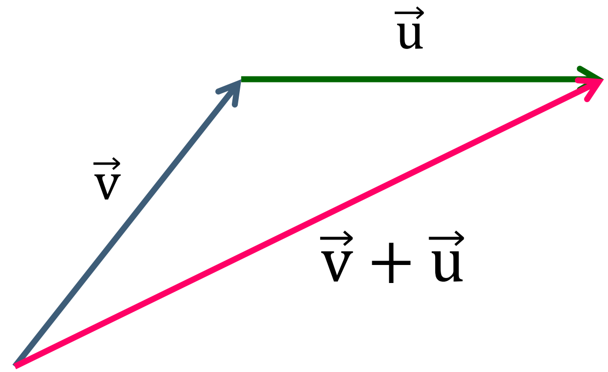


$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}$$

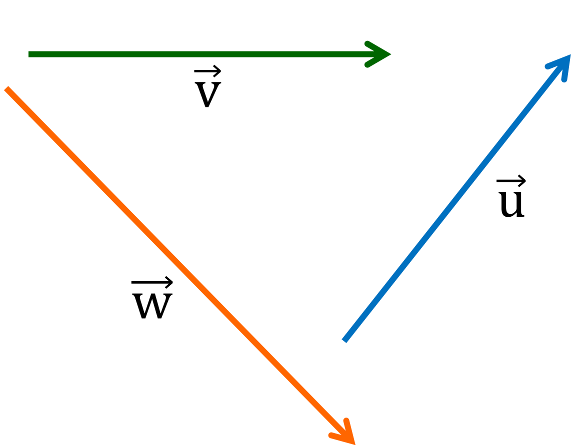
Propriedades da Adição de Vetores

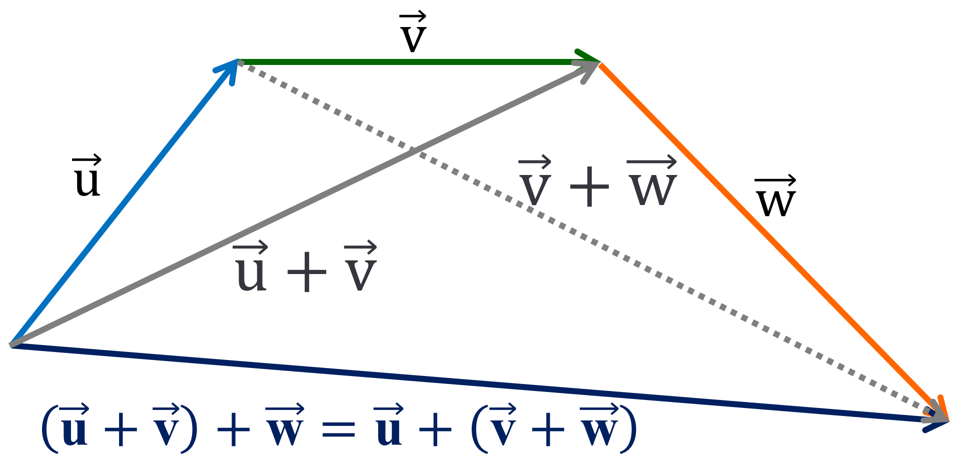
1. Comutativa: $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$





2. Associativa: $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})$





3. Existe somente um vetor nulo, $\vec{0}$, tal que, $\forall\ \vec{v}$ tem-se:

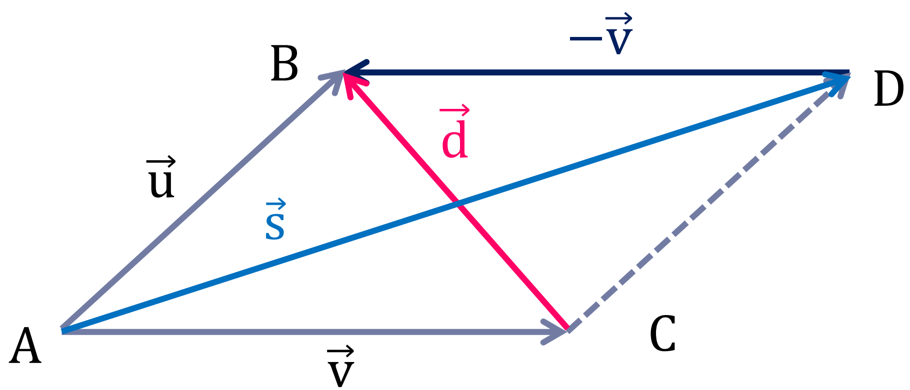
$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$$

4. Seja um vetor $\vec{v}$ qualquer. Existe somente um vetor $-\vec{v}$ tal que:

$$\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = -\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$$

II. *Diferença de Vetores*

- A diferença entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer, representada por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, corresponde ao vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados, respectivamente, pelos SOs AB e AC $\therefore$ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



No paralelogramo ABCD da figura acima: o ***vetor soma*** é representado pelo SO AD ($\vec{s} = \overrightarrow{AD}$), enquanto o ***vetor diferença***, pelo SO CB ($\vec{d} = \overrightarrow{CB}$).

Observações

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, então:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

- Da mesma forma, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$$

***Observação*:** No caso geral, isto não é válido, pois para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, independente de suas direções, tem-se:

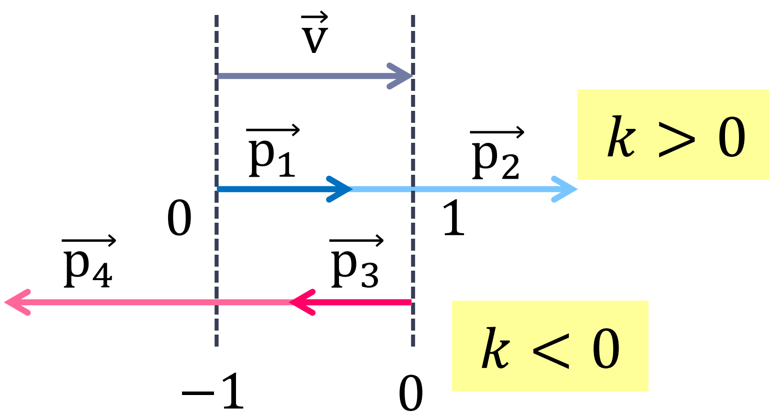
$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \qquad \textit{(Desigualdade Triangular)}$$

- Nos vetores, vale a propriedade de que, se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$ então $\vec{u} = \vec{w}$.

III. *Multiplicação de um Vetor por um Escalar*

- Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um n. real $k \neq 0$, o produto do escalar k pelo vetor $\vec{v}$ é o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:
  - a) ***Módulo***: $|\vec{p}| = |k||\vec{v}|$.
  - b) ***Direção***: $\vec{p}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção: $\vec{p} \parallel \vec{v}$.
  - c) ***Sentido***: se $k > 0$: $\vec{p}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido.

    se $k < 0$: $\vec{p}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários.



$k = 0 \rightarrow \vec{p} = \vec{0}$

$k = -1 \rightarrow \vec{p} = -\vec{v}$

Propriedades da Multiplicação de um Vetor por um Escalar

1. Associativa: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\vec{\mathbf{u}}) = (\boldsymbol{ab})\vec{\mathbf{u}} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\vec{\mathbf{u}})$

2. Distributiva em relação à adição escalar: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\vec{\mathbf{u}} = \boldsymbol{a}\vec{\mathbf{u}} + \boldsymbol{b}\vec{\mathbf{u}}$

3. Distributiva em relação à adição de vetores: $\boldsymbol{a}(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = \boldsymbol{a}\vec{\mathbf{u}} + \boldsymbol{a}\vec{\mathbf{v}}$

4. Identidade: $\mathbf{1}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$

EXERCÍCIOS

1. Verifique se cada afirmação sobre o paralelepípedo retângulo é (V) ou (F):

a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$;

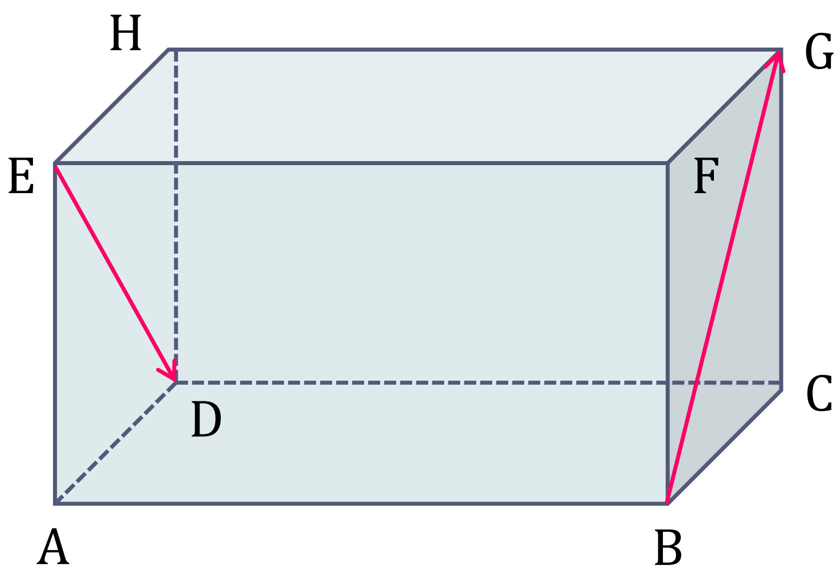
b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$;

c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$;

d) $\overrightarrow{BG} \,//\, \overrightarrow{ED}$;

e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares;

f) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares.



(V) – (F) – (V) – (F) – (V) – (F)

2. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determine algebricamente o vetor $\vec{w}$, em função de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, de modo que a seguinte relação seja válida: $2\vec{w} - 3\vec{u} = 10(\vec{w} + \vec{v})$. Utilize as propriedades de adição de vetores e de multiplicação de escalar por vetor.

$$\vec{w} = -\frac{3}{8}\vec{u} - \frac{5}{4}\vec{v}$$

3. Prove de forma algébrica e esquemática que se $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, com $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, então $\vec{t} = \overrightarrow{AD}$.

4. Prove a Propriedade (4) da Adição de Vetores.

5. Prove que $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$.

6. Prove que a base média do trapézio é paralela às bases e tem comprimento igual à semissoma dos comprimentos das bases.