2ª Lista – GA (LOB1036) – Profa. Paula

1. A medida angular entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$ rad, e seus módulos 1 e 7, respectivamente. Calcule $|\vec{u}\ \times \vec{v}\ |$ e $|4\vec{u}\ \times 9\vec{v}\ |$.

2. O triângulo ABC tem área 4. Sabendo que $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$, calcule $|\vec{u}\ \times \vec{v}\ |$.

3. A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$ rad, e seus módulos 1 e 2, respectivamente. Sendo $\vec{u}\ = \vec{a}\ + \vec{b}$ e $\vec{v}\ = \vec{a} - \vec{b}$, calcule o módulo de $\vec{u}\ \times \vec{v}$.

4. Calcule $\left(\sqrt{2}\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} + \vec{w}\right) \times \left(-\sqrt{6}\vec{u} + 3\vec{v} - \sqrt{3}\vec{w}\right)$.

5. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2,1,4)$.

6. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,3)$.

7. Descreva o conjunto solução da equação dada em cada caso:

   a) $\vec{x} \times \left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right) = \vec{0}$.

   b) $\vec{x} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

8. Determine $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \times \left(\vec{\imath} + \vec{k}\right) = 2\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right)$ e $|\vec{x}\ | = \sqrt{6}$.

9. Prove que para qualquer $\vec{v}$: $|\vec{v} \times \vec{\imath}|^2 + |\vec{v} \times \vec{\jmath}|^2 + \left|\vec{v} \times \vec{k}\right|^2 = 2|\vec{v}|^2$.

10. Prove que: $(\vec{v} - \vec{u}) \times (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$.

11. Prove que, se $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é LD, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

12. Determine uma base ortonormal positiva $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ sabendo que: $\vec{a}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$ e tem mesmo sentido de $\vec{u}$; $\vec{b}$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sua primeira coordenada é positiva. Dados: $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (0,1,2)$.

13. Sejam A, B e C pontos não colineares no espaço. Escreva a distância de um ponto D ao plano ABC em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

14. Dado o tetraedro $OABC$, sejam M, N e P, respectivamente, os pontos que dividem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ na razão 2. Calcule o quociente entre os volumes dos tetraedros $OABC$ e $OMNP$.

15. Prove que

    a) $[a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}, a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}, a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

    b) Sendo $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.

16. Dados o ponto $A(1,2,3)$ e o vetor $\vec{u} = (3,2,1)$, escreva as eqs. vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas em "z" da reta r que passa por A e é paralela a $\vec{u}$. Supondo que o sistema de coordenadas seja ortogonal, obtenha dois vetores diretores unitários dessa reta.

17. Escreva as eqs. paramétricas dos eixos coordenados. Essas equações podem ser colocadas na forma simétrica? Justifique.

18. Sejam os pontos $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ e $C(4,-7,-6)$.

    a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.

    b) Escreva eqs. paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

19. Sejam os pontos $A(1,2,3)$ e $B(-2,3,0)$. Escreva as eqs. vetorial, paramétricas, simétricas e reduzidas em "y" da reta r que passa por A e B. Obtenha os pontos da reta que distam $2\sqrt{19}$ de A.

20. Sejam os pontos $A(1,1,1)$, $B(0,0,1)$ e a reta $r: (x,y,z) = (1,0,0) + t(1,1,1), t \in \mathbb{R}$. Quantos e quais pontos de r são equidistantes de A e de B? Justifique sua resposta.

21. Determine uma equação geral do plano α em cada caso:

    a) α contém $A(1,1,0)$ e $B(1,-1,-1)$ e é paralelo a $\overrightarrow{CD}$ com $C(1,2,1)$ e $D(0,1,0)$.

    b) α contém $A(1,0,1)$, $B(2,1,-1)$ e $C(1,-1,0)$.

    c) α contém $A(1,0,-1)$ e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2 - z$.

22. Obtenha equações cartesianas dos planos coordenados.

23. Mostre que, se $pqr \neq 0$, então os pontos $(p,0,0)$, $(0,q,0)$ e $(0,0,r)$ não são colineares e o plano definido por eles pode ser descrito pela equação $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ (forma da chamada equação segmentária do plano).

24. Obtenha equação geral do plano que contém o ponto $A(1,2,3)$ e é paralelo ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 1 + h + 2t \\ y = 2h + t \\ z = -t \end{cases}, \quad h,t \in \mathbb{R}$.

25. Decomponha o vetor $\vec{u} = (1,2,4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = y - 9 \\ z = 18 \end{cases}$ e de outro paralelo ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 1 + t, \\ z = h - t \end{cases} \quad h,t \in \mathbb{R}$.

26. A partir das eqs. paramétricas, encontre uma equação cartesiana de cada plano a seguir:

    a) $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 3 - h + t \end{cases}, \quad h,t \in \mathbb{R}$

b) $\alpha: \begin{cases} x = h - 3t \\ y = h + 2t, \quad h, t \in \mathbb{R} \\ z = 3h - t \end{cases}$

27. Se existir, encontre o ponto de intersecção entre as retas r e s:

a) $r: (x, y, z) = (1,1,0) + t(1,2,3),\ t \in \mathbb{R}$ $\qquad s: \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ z = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $\qquad s: \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{6}$

c) $r: \begin{cases} 3x + y + 6z + 13 = 0 \\ 9x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 10 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$

28. Uma partícula realiza o movimento descrito pela equação vetorial $(x, y, z) = (2,1,5) + t(2, -1,3),\ t \in \mathbb{R}$. Uma segunda partícula, também em movimento retilíneo uniforme, ocupa, no instante -2, a posição $P(-24,14, -34)$ e, no instante 3, a posição $Q(26, -11,41)$.

a) Verifique se as trajetórias são concorrentes e se há perigo de colisão.

b) Qual é a equação do movimento da segunda partícula?

29. Mostre que as retas $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{2} = z - 1$ e $s: \begin{cases} x = \frac{1}{4}y \\ z = y - 4 \end{cases}$ são concorrentes, determine o ponto de intersecção e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

30. Obtenha a intersecção da reta r com o plano α:

a) $r: x - 3 = y - 2 = \frac{z+1}{2}$ $\qquad \alpha: x + 2y - z = 10$

b) $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $\qquad \alpha: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3 - t \quad , \ h, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + h + t \end{cases}$

31. Determine, se existirem, as eqs. paramétricas da reta intersecção entre os planos α_1 e α_2:

a) $\alpha_1: x + 2y - z - 1 = 0$ $\qquad \alpha_2: 2x + y - z = 1$

b) $\alpha_1: x - y = 1 - 3z$ $\qquad \alpha_2: 6z - 2y = 2 - 2x$

32. Estude a posição relativa entre as retas r e s:

a) $r: x = y = z$ $\qquad s: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$

b) $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

33. Sejam as retas $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t\,, \\ z = mt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ e $s: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$.

a) Calcule o valor de m para que r e s sejam concorrentes;

b) Determine, para o valor de m, o ponto de intersecção de r e s.

34. Seja o plano $\alpha: 2x + 4y - z - 4 = 0$. Determine a sua intersecção com os eixos e com os planos coordenados.

35. Mostre que o ponto $P(2,2,3)$ é equidistante dos pontos $A(1,4,-2)$ e $B(3,7,5)$.

36. Calcule a distância do ponto $P(1,2,3)$ a cada um dos eixos coordenados.

37. Calcule a distância entre as retas r e s nos seguintes casos:

a) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t\,, \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\qquad s: \mathrm{O}x$

38. Determine a distância do ponto $P(2,-1,2)$ ao plano $\alpha: x + y + z = 0$.

39. Encontre a distância da origem ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 1 + 3h - t\,, \\ z = -t \end{cases}$ $h, t \in \mathbb{R}$.

40. Dado o tetraedro de vértices $A(1,2,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,-1,-1)$ e $D(3,1,0)$, calcule a medida da altura baixada do vértice D ao plano da face ABC.

41. Escreva as equações dos planos paralelos ao plano $\alpha: 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ que distam 5 unidades da origem.

42. Se possível, calcule a distância entre os planos $\alpha_1: 2x + 2y + 2z - 5 = 0$ e $\alpha_2: x + y + z = 3$.

43. Determine a distância da reta $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ ao:

a) Plano $\mathrm{O}xz$.

b) Plano $\mathrm{O}yz$.

c) Eixo $\mathrm{O}z$.

d) Plano $\alpha: x + y - 12 = 0$.

RESPOSTAS

1) $\frac{7}{2}$ e 126
2) 8
3) $2\sqrt{3}$
4) 0
5) $\sqrt{62}$
6) $\frac{\sqrt{19}}{2}$
7) a) $(b, b, -b)$ para qualquer b real.
b) Sem solução.
8) $\vec{x} = (-1, 2, 1)$
12) $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$
$\vec{c} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$
13) $\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}$
14) 3
15) b) 24
16) $Eq. Vetorial: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1)$
$Eqs. Paramétricas: x = 1 + 3t, y = 2 + 2t \ e \ z = 3 + t$
$Eqs. Simétricas: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = z - 3$
$Eqs. Reduzidas \ em \ z: x = 3z - 8 \ e \ y = 2z - 4$
$Vetores \ unitários: \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) e \ (\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}})$
17) $Eixo \ x: x = x_0 + 1, y = 0 \ e \ z = 0$
$Eixo \ y: x = 0, y = y_0 + t \ e \ z = 0$
$Eixo \ z: x = 0, y = 0 \ e \ z = z_0 + t$
18) b) $x = 4 - 5t, y = -7 + 11t \ e \ z = -6 + 4t$
19) $(7, 0, 9) \ e \ (-5, 4, -3)$
20) 1 ponto: $(1, 0, 0)$
21) a) $x + y - 2z - 2 = 0$
b) $3x - y + z - 4 = 0$
c) $3x - 2y - 3 = 0$
22) Plano Oxy: $z = 0$, plano Oxz: $y = 0$, plano Oyz: $x = 0$
24) $2x - y + 3z - 9 = 0$
25) $\vec{u} = (-10, -5, 0) + (11, 7, 4)$
26) a) $3y - 6 = 0$
b) $7x + 8y - 5z = 0$
27) a) $(2, 3, 3)$
b) Não há ponto de intersecção.
c) Não há ponto de intersecção.
28) a) Retas não são concorrentes, logo, não há perigo de colisão.
b) $(x, y, z) = (-24, 14, -34) + t(50, -25, 75)$
29) $(1, 4, 0)$ e $x - \frac{7}{4}y + \frac{3}{2}z + 6 = 0$
30) a) $(5, 4, 3)$
b) $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
31) a) $x = t, y = t \ e \ z = -1 + 3t$

b) Não a intersecção, uma vez que os planos são paralelos.

32) a) As retas são reversas.

b) As retas são concorrentes.

33) a) $m = 2$

b) $(-1, -1,)$

34) Eixo x: $(2, 0, 0)$, eixo y: $(0, 1, 0)$, eixo z: $(0, 0, -4)$, plano Oxy: $x + 2y = 0$, plano Oxz: $2x - z = 4$, plano Oyz: $4y - z = 4$

36) $\frac{\sqrt{45}}{3}$

37) a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{10}$

38) $\sqrt{3}$

39) $\frac{7\sqrt{35}}{35}$

40) $\frac{4\sqrt{76}}{19}$

41) $3x - 2y - 6z - 35 = 0 \; e \; 3x - 2y - 6z + 35 = 0$

42) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

43) a) 4

b) 3

c) 5

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$