1ª Lista – GA (LOB1036) – Profa. Paula

1. Prove que $|-\vec{u}| = |\vec{u}|$.

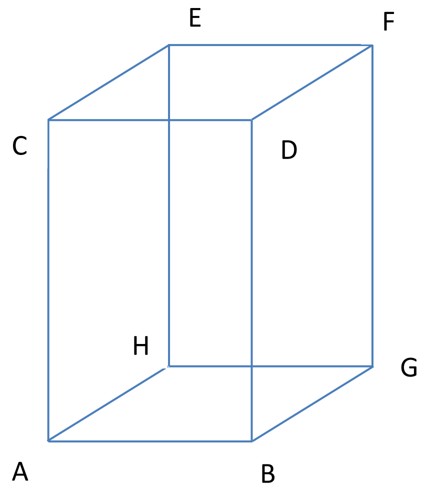
2. A afirmação: se $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

3. Prove de forma esquemática que:

   a) $Se\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

   b) O oposto do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor $-\vec{u} - \vec{v}$.

4. Utilize o paralelepípedo para determinar o vetor $\vec{x}$ em cada caso:



   a) $\vec{x} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$

   b) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

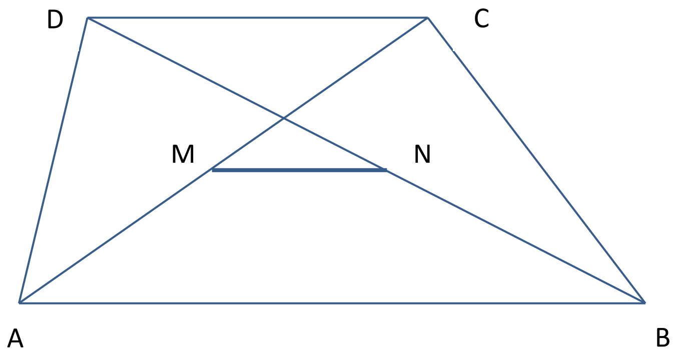
   c) Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, obtenha representantes dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{y} = \vec{0}$.

5. Resolva o sistema $\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$ nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

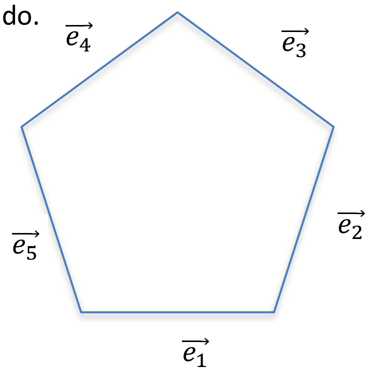
6. Suponha que $\vec{u} = k\vec{v}$. Prove que, se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $|k| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$.

7. Os pontos A, B, C e D são tais que $A \neq B$, $C \neq D$ e as retas que passam por AB e por CD não são paralelas. Prove que se $a\overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{CD} \Rightarrow a = b = 0$.

8. Prove, usando adição e multiplicação por escalar, que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual à semi-diferença dos comprimentos das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas é muito útil).



9. Considere o conjunto de vetores $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ na figura ao lado.



   a) Determine $\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} + \vec{e_4}$.

   b) O conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ é LI? Justifique.

   c) O conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é LI? Justifique.

   d) O conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ é LI? Justifique.

10. Em um triângulo ABC, M é um ponto tal que $3\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MC}$. Escreva $\overrightarrow{AM}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

11. Se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI. Mostre então que, se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base do plano, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ também forma uma base do plano.

12. Se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ é LI. Mostre então que, se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ também forma uma base do espaço.

13. Suponha que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente e considere o vetor $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Mostre que o conjunto $\{\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t}\}$ é LI se e somente se $a + b + c \neq -1$.

14. Sejam $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (1,2)_E$, $\vec{v} = (-3,1)_E$ e $\vec{w} = (3,2)_E$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$; $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{w})$; $|\vec{u}|\vec{v} \cdot \vec{w}$; $|(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}|$.

15. Sejam $\vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$ e $\vec{v} = \vec{e_1} + a\vec{e_2}$, em que $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ é uma base ortonormal. Determine a tal que:

   a) $\vec{u} \perp \vec{v}$.

   b) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $\frac{\pi}{4}$.

16. Utilize produto escalar para provar os seguintes resultados geométricos:

   a) As diagonais de um retângulo têm o mesmo comprimento.

   b) A soma dos quadrados dos comprimentos dos lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais.

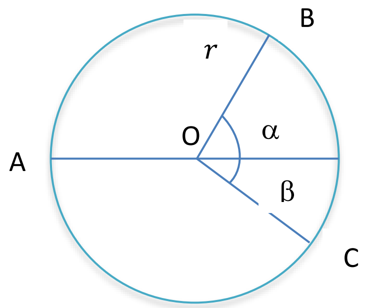
   c) Se $\overrightarrow{AB}$ representa o diâmetro de uma circunferência e C é um ponto qualquer sobre a circunferência, então $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CA}$ são perpendiculares.

17. Os lados do triângulo equilátero ABC medem 2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

18. Dados $\vec{v} = (1,1,1)$, $\vec{w} = (0,1,-1)$ e $\vec{t} = (2,1,-1)$, obtenha $\vec{u}$ de módulo $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja LD.

19. A afirmação: $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$ é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

20. A circunferência de centro O tem raio r. Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ em função de r e das medidas α e β dos ângulos indicados.



21. Mostre que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$. Calcule $|2\vec{u} + 4\vec{v}|^2$ sabendo que $\vec{u}$ é um vetor unitário, $|\vec{v}| = 2$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

22. Calcule o cosseno do ângulo das diagonais de um quadrado.

23. Calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, sabendo que $\vec{v} = (-1,1,1)$ e $\vec{u} = (-2,1,2)$.

24. Prove que, se $k \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $proj_{k\vec{u}}\, \vec{v} = proj_{\vec{u}}\, \vec{v}$.

25. Em relação à base canônica, tem-se $\overrightarrow{AB} = \left(2, \sqrt{3}, 1\right)$ e $\overrightarrow{AC} = \left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$.

    a) Verifique que A, B e C são vértices de um triângulo.

    b) Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A e a área do triângulo ABC.

26. Determine as equações das retas que passam pelo ponto $A(3,1)$, tal que a distância dessas retas até o ponto $B(-1,1)$ é $2\sqrt{2}$.

27. Determine o valor de k de maneira que as retas:

    a) $3x + 6ky = 7$ e $9kx + 8y - 15 = 0$ sejam paralelas.

    b) $3kx + 8y = 5$ e $-4kx + 6y = -1$ sejam ortogonais.

28. Sejam $ax + by + c = 0$ a equação de uma reta r no plano e o ponto $P(x_0, y_0)$, $P \notin r$:

    a) Se $Q(x_1, y_1)$ é um ponto qualquer da reta, determine a equação da reta que passa por Q e é perpendicular a r.

    b) Encontre um vetor diretor $\vec{v}$ para a reta do item (a) e calcule a projeção de $\overrightarrow{QP}$ sobre $\vec{v}$.

    c) Mostre que a distância de P até a reta r é $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

29. Determine o lugar geométrico dos pontos no plano que equidistam de dois pontos fixos.

30. Determine o lugar geométrico dos pontos no plano cuja distância a reta $x - 2 = 0$ é sempre 3 unidades maior que a distância até o ponto $(-1, -3)$.

31. Sejam r_1 e r_2 duas retas não paralelas no plano.

    a) Determine o lugar geométrico dos pontos no plano que equidistam de r_1 e r_2.

    b) Se as retas r_1 e r_2 têm equações $y - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 0$ e $y - \sqrt{3}x = 0$, respectivamente, determine uma equação para o lugar geométrico descrito em (a).

    c) Se as retas r_1 e r_2 tiverem equações $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$, respectivamente, determine uma equação geral para o lugar geométrico descrito em (a).

RESPOSTAS

2) Falsa.
4) a) $\vec{x} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CF}$
   b) $\vec{x} = 2\overrightarrow{AF}$
   c) $\vec{x} = \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{FC}$
      $\vec{y} = \overrightarrow{FA}$
5) $\vec{x} = \frac{1}{7}(5\vec{u} + 2\vec{v})$
   $\vec{y} = \frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v})$
9) a) $-\overrightarrow{e_5}$
   b) Não. Qualquer conjunto de 4 ou mais vetores é LD, por definição.
   c) Não. $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ pertencem ao mesmo plano, logo, são LD.
   d) Sim. $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ não são paralelos, logo, são LI.
10) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}$
14) a) -1
    b) 6
    c) 63
    d) -7 $\sqrt{5}$
    e) $\sqrt{13}$
15) a) $\alpha = \frac{-3}{4}$
    b) $\alpha = \frac{1}{7}$ ou $\alpha = -7$
17) -6
18) $\vec{u}$ = (1,0,2) ou $\vec{u}$ = (-1,0,-2)
19) Verdadeira
20) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = r^2\,(1 + cos\alpha - cos\,(\alpha + \beta) - cos\beta)$
21) 52
22) $cos 90° = 0$
23) $(\frac{-10}{9}, \frac{5}{9}, \frac{10}{9})$
25) a) A, B e C são vértices de um triângulo.

b) Altura relativa ao vértice A = 1,99

Área do triângulo ABC = 2,985

26) Sendo t um escalar pertencente aos $\mathbb{R}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores, com $\vec{u}$ =(2,2) e $\vec{v}$ =(2,-2).

$$\overrightarrow{AP_1} = t\vec{u} \; e \; \overrightarrow{AP_2} = t\vec{v}$$

Eq. Vetoriais: $(x, y) = (3,1) + t\,(2,2)$

$(x, y) = (3,1) + t\,(2,-2)$

Eqs. Paramétricas: $x = 3 + 2t \; e \; y = 1 + 2t$

$x = 3 - 2t \; e \; y = 1 - 2t$

Eqs. Simétricas: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = t$

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-2} = t$

27) a) $k = \pm \frac{2}{3}$

b) $k = \pm 2$

28) a) Eq. Vetorial: $(x, y) = (x_1, x_2) + t(a, b)$

Eqs. Paramétricas: $x = x_1 + at \; e \; y = x_2 + bt$

Eqs. Simétricas: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b}$

Eq. Reduzida: $bx - ay - c = 0, com \; c = bx_1 + ay_1$

b) $\left(\frac{ax_0 - ax_1 + by_0 - by_1}{a^2 + b^2}\right)(a, b)$

c) $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$