MAE 5725 - MODELOS LINEARES

1ª Lista de Exercícios

Profa. Silvia Nagib Elian

1. Calcule o determinante e a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}$$

onde a, b, c e d são escalares e I é a matriz identidade de ordem m.

2. Prove que se B é uma inversa generalizada de A, então BAB também é uma inversa generalizada de A.

3. Seja A uma matriz simétrica n x n tal que $A^2 = mA$. Mostre que $B = \frac{1}{m}A$ é uma inversa generalizada de $\frac{1}{m}A$.

4. Se $ABA = kA$, k escalar $\neq 0$, mostre que $\frac{1}{k}B$ é uma inversa generalizada de A.

5. Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

6. Todas as inversas generalizadas da matriz A podem ser escritas nas duas formas alternativas

a) $X = A^{-} + U - A^{-}AUAA^{-}$

b) $X = A^{-} + V(I - AA^{-}) + (I - A^{-}A)W$

onde A^- é uma particular inversa generalizada de A, U, V e W são matrizes arbitrárias. Verifique que X especificada nos itens a e b satisfaz a condição $A X A = A$.

7. Mostre que se B é uma inversa generalizada de A, então B' é uma inversa generalizada de A'.

8. Se A é definida como $A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$, prove que $A^- = \begin{bmatrix} B^- & O \\ O & C^- \end{bmatrix}$, onde A^-, B^- e C^- são inversas generalizadas de A, B e C respectivamente.

9. Determine, pela definição, uma inversa generalizada de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Considere o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

a) Prove que $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma inversa generalizada de $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Através desta inversa generalizada, determine a solução geral do sistema.

11) Determine o posto das matrizes

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

12. Determine a matriz A associada à forma quadrática $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 x_3 - 3x_3^2$.

13. Classifique as seguintes matrizes em positiva definida ou positiva semi definida

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. Prove que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

15. Prove que $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 \rangle 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2$.

16. Determine a inversa de B = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ usando o fato que

$B = I + \underset{\sim}{b}\underset{\sim}{b}'$, onde $\underset{\sim}{b}' = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 3]$.

17. Considere o modelo de medidas repetidas $\begin{matrix} X_{i1} = \mu + \in_{i1} \\ X_{i2} = \mu + \delta + \in_{i2} \end{matrix}$

onde X_{i1} e X_{i2} são medidas no i-ésimo indivíduo respectivamente antes e depois da aplicação de um tratamento. Admitindo que $\underset{\sim i}{\in} = (\in_{i1}, \in_{i2})', i = 1,2...n$ são vetores aleatórios independentes, $Var(\in_{i1}) = \sigma_1^2, Var(\in_{i2}) = \sigma_2^2$ e $Cov(\in_{i1}, \in_{i2}) = \rho\sigma_1\sigma_2$, construa a matriz de variância e covariância de $\left(\underset{\sim}{\in}_1', \underset{\sim}{\in}_2' ... \underset{\sim}{\in}_n' \right)$ e escreva na notação de produto de Kronecker.

18. Sejam as variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$, onde $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variância e covariância de $(Y_1, Y_2)'$ e verifique que é positiva semi definida.

19. A forma quadrática x'Ax é chamada positiva definida se a matriz A é positiva definida.Verificar se a forma quadrática $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ é positiva definida.

20. Seja A uma matriz pxn qualquer.
a)Prove que A'A é simétrica, nxn.

b)Mostre que A'A é não negativa definida.

21. Seja A uma matriz pxp, simétrica, positiva definida e sua decomposição espectral $A = EDE'$.
a)Prove que $E'E = EE' = I_p$.
b)Utilizando a), mostre que $A = PP$, onde $P = ED^{1/2}E'$ e $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2} \ldots \sqrt{\lambda_p})$, com $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ raízes características de A.
c)Mostre que $A^{-1} = ED^{-1}E'$.
Os resultados dos itens b) e c) permitem a obtenção da "raiz quadrada" de uma matriz positiva definida e de sua inversa em função dos vetores característicos e raízes características.

22. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

a)Determine suas raízes e vetores característicos.
b)Determine a decomposição espectral de A.
c)Obtenha A^{-1} através do resultado do exercício anterior.
d)Determine P tal que $A = P.P$.

23.Seja A matriz simétrica nxn. Prove que existe D, matriz diagonal tal que $x'Ax = y'Dy$.

24.Se $x'Ax$ é positiva definida, prove que existe uma transformação $y=Bx$ tal que $x'Ax = y'y$.

25.Mostre que se A é inversível, então A^{-1} é a única inversa generalizada de A.

26) Considere o modelo de regressão linear múltipla

$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$ com $K_1 + K_2$ variáveis independentes

e $\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$ o estimador de mínimos quadrados particionado como

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\hat{\beta}_1} \\ \underset{\sim}{\hat{\beta}_2} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\hat{\beta}_1} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{K_1} \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{K_1+1} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{K_1+K_2} \end{bmatrix}.$$

Particionando a matriz de planejamento X de modo conveniente, obtenha $\underset{\sim}{\hat{\beta}_1}$ e $\underset{\sim}{\hat{\beta}_2}$ na forma matricial.

27) No modelo $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$ com $Var(\underset{\sim}{\epsilon}) = \sigma^2 I$, a soma de quadrados do resíduo é dada por

$S = (\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})$ onde $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ é o estimador de mínimos quadrados de $\underset{\sim}{\beta}$.

Calculando $\frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}$ e tomando $\frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}} = \underset{\sim}{0}$, obtenha o estimador de mínimos quadrados de $\underset{\sim}{\beta}$.