

$$CG + DH = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$EG + FH = \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \\ \hline 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Inversas de Matrizes na forma particionada

Seja A matriz quadrada particionada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ com } A_{11} \text{ e } A_{22} \text{ quadradas.}$$

Nessas condições, verifica-se que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Utilizações: Distribuição Normal Multivariada
Inversão de Matrizes 5×5 .

Se A_{11} é inversível

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

Se A_{22} é inversível

$$|A| = |A_{22}| \cdot |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|$$

Se M é simétrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix} \quad \text{então}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B W B' A^{-1} & -A^{-1} B W \\ -W B' A^{-1} & W \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } W = [D - B' A^{-1} B]^{-1}$$

2) Decomposição de Cholesky

Toda matriz positiva definida A pode ser escrita como

$$A = WW'$$

onde W é não singular.

Essa decomposição é a base do procedimento de mínimos Quadrados Generalizados da Regressão.

3) Decomposição em Valores Singulares

Toda matriz X $n \times p$ pode ser decomposta como

$$X = UDT'$$

$n \times p \quad n \times p \quad p \times p \quad p \times p$

em que U é $n \times p$, T é $p \times p$, $U'U = I$, $T'T = I$

e D é uma matriz diagonal $p \times p$ com elementos da diagonal principal $\mu_j > 0$ $j = 1, 2, \dots, p$.

μ_j são denominados valores singulares de X .

T é a matriz cujas colunas são os vetores característicos de $X'X$

U é a matriz cujas colunas são os vetores característicos de XX' associados às p raízes características $\neq 0$.

Além disso, verifica-se que o quadrado dos valores singulares de X (μ_j^2) são as raízes características de $X'X$.

$$X'X = (UDT')' UDT' = TD' \underbrace{V'U}_I DT' = \underbrace{TD'DT'}_{D \text{ diag}} = \underbrace{TD^2T'}_{\text{decomposição espectral de } X'X}$$

Decomposições singulares são úteis na análise de multicolinearidade em modelos de regressão.

Exercício

Determine uma decomposição singular da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Referência: Conditioning Diagnostics - Collinearity and Weak data in Regression - David A. Belsley
pag 42

Propriedades do Posto

v) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = m \cdot A$.
Nessas condições

$$\text{tr}(A) = m \cdot n(A)$$

Se $m=1$, $A^2 = mA \Rightarrow A^2 = A$ e A é dita idempotente. Neste caso $\text{tr}(A) = n(A)$.

Exemplo de Matriz Positiva Semidefinida

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} X \\ 3X \end{bmatrix} \quad \text{com } \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

$$\text{Cov}(X, 3X) = 3 \text{Cov}(X, X) = 3 \text{Var}(X) = 3\sigma^2.$$

$$\therefore V = \text{Var}(\underset{\sim}{Y}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 3\sigma^2 \\ 3\sigma^2 & 9\sigma^2 \end{bmatrix} \quad n(V) = 1$$

$$\det(V) = 9\sigma^4 - 9\sigma^4 = 0$$

Cálculo das raízes características

$$V - \lambda I = \begin{bmatrix} 6^2 - \lambda & 36^2 \\ 36^2 & 96^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(V - \lambda I) = (6^2 - \lambda)(96^2 - \lambda) - 96^4 = 0$$

$$96^4 - \lambda 6^2 - 9\lambda 6^2 + \lambda^2 - 96^4 = 0$$

$$\lambda^2 - 106^2 \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 106^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \lambda^2 = 106^2 > 0$$