ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Sistemas de Forças
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Conteúdo

Simbologia

$\vec{F}$ $Força$

$\vec{R}$ $Resultante\ de\ um\ sistema\ de\ forças$

I $Invariante\ escalar\ de\ um\ sistema\ de\ forças$

$\vec{M}_O$ $Momento\ de\ uma\ força\ (ou\ de\ um\ sistema\ de\ forças)\ em\ relação\ a\ um\ pólo\ O$

M_u $Momento\ de\ uma\ força\ (ou\ de\ um\ sistema\ de\ forças)\ em\ relação\ a\ um\ eixo\ O\vec{u}$

G $Baricentro$

m_i $massa\ do\ ponto\ i$

M $massa\ total\ do\ sistema$

$\vec{g}$ $aceleração\ da\ gravidade\ (também\ g\ tomado\ como\ módulo)$

$\mathbb{V}$ $volume$

$\mathbb{A}$ $área$

ℓ $linha$

ρ $massa\ específica$

Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

$\vec{F}$	Força	[N]	Newton
$\vec{M}_O$	Momento de força	[Nm]	Newton.metro
M_u	Momento de força em relação a eixo	[Nm]	Newton.metro
$(P - O)$	Vetor Posição	[m]	metro
x	Coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	metro

Formulário

$$(\vec{F}, P)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

$$(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad com \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$|\vec{M}_H| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

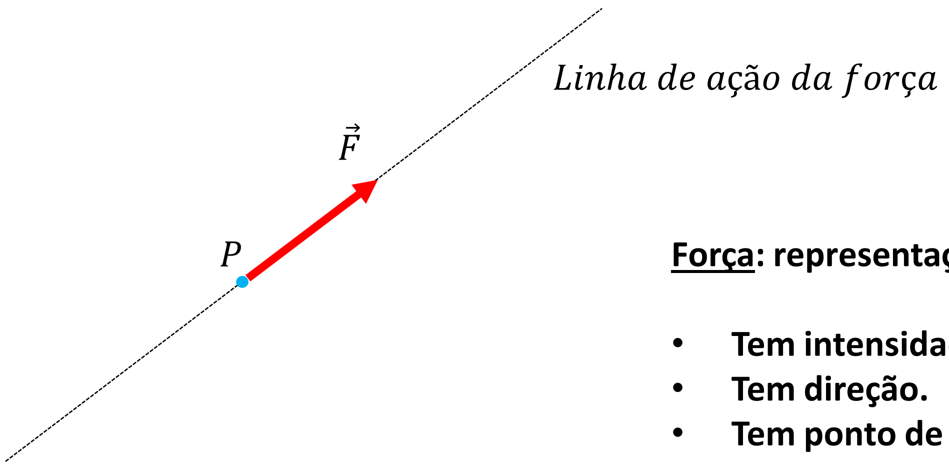
$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} h_i}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M}$$

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} M_x \vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} M_y \vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} M_z \vec{k}$$

Definição de Força



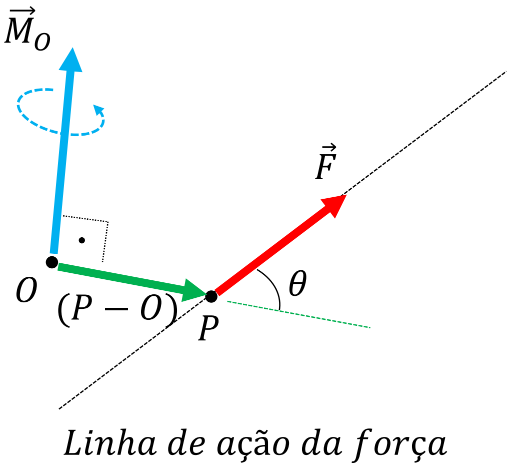
<u>Força</u>: representação da ação de um corpo sobre outro.

- **Tem intensidade.**
- **Tem direção.**
- **Tem ponto de aplicação.**

É bem representado matematicamente por um par vetor e ponto de aplicação:

$$\boxed{(\vec{F}, P)}$$

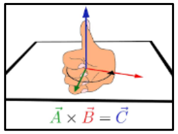
Definição de Momento de uma Força em Relação a um Polo



<u>**Momento de uma força em relação a um polo**</u>**: representação da tendência que uma força tem de fazer o corpo passar a girar em relação a um ponto.**

- **Tem intensidade.**
- **Tem sentido de rotação.**
- **Quanto mais longe a linha de ação da força estiver em relação ao polo maior é o efeito da tendência de girar.**
- **Efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo.**
- **Invertendo a força inverte-se o sentido de rotação.**

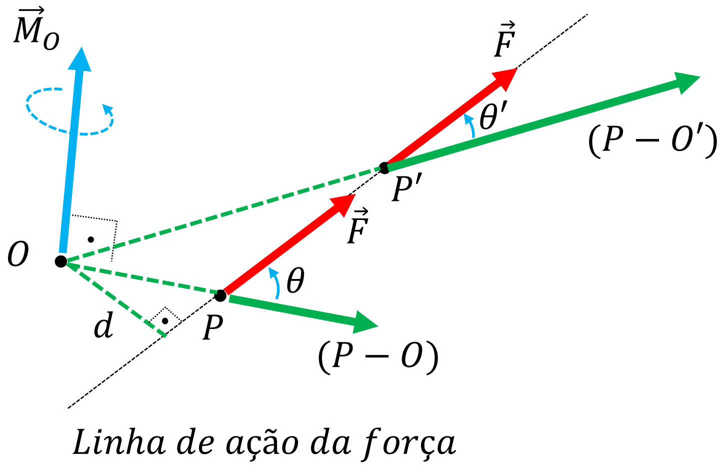
É bem representado matematicamente por um vetor resultado de um produto vetorial:



$$\boxed{\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}} \qquad \left|\vec{M}_O\right| = |(P - O)|\left|\vec{F}\right| sen\theta$$

É um vetor livre no espaço. Apenas por convenção costuma-se representá-lo graficamente com origem no polo considerado.
É simultaneamente ortogonal à força e ao vetor *(P - O)*.
A direção do vetor indica o eixo em relação ao qual surgiria o efeito de rotação e o sinal indica o sentido deste efeito de rotação utilizando-se a <u>regra da mão direita</u>.

Definição de Momento de uma Força em Relação a um Polo



- **Demonstração de que o efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, que a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo:**

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}_O| = |P - O||\vec{F}|sen\theta = |\vec{F}|.d$$

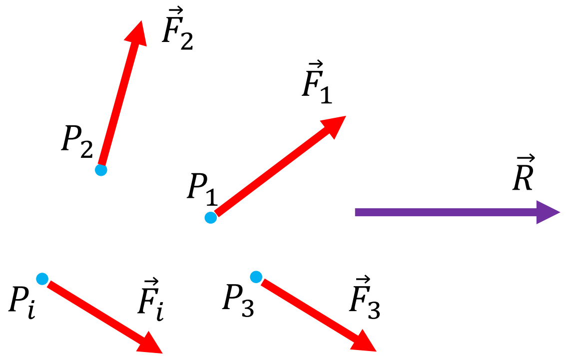
- **Deslocando a força em cima da sua linha de ação chegamos no mesmo resultado:**

$$\vec{M}_O = (P' - O) \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}_O| = |P' - O||\vec{F}|sen\theta' = |\vec{F}|.d$$

Define-se aqui " d " como sendo o "<u>braço da força</u>", qual seja, a distância da linha de ação da força até o polo considerado

$$d = |P - O|sen\theta = |P' - O|sen\theta'$$

Definição de um Sistema de Forças – Resultante de um Sistema de Forças



Sistema de Forças: é um simples conjunto de forças.

Resultante de um Sistema de Forças: é a simples soma vetorial das forças que compõe o sistema.

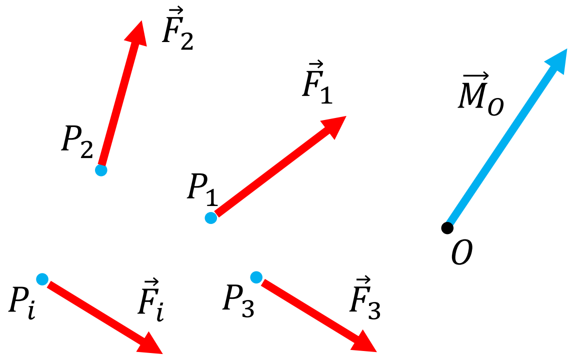
- **Observe que a Resultante definida desta forma NÃO é uma força pois não tem ponto de aplicação, isto é, é um vetor livre no espaço.**

Algebricamente:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

Onde N é a quantidade de forças envolvidas no sistema.

Momento de um Sistema de Forças em relação a um Polo



<u>Momento de um Sistema de Forças em relação a um Polo</u>: é a simples soma vetorial do momento de cada força em relação àquele Polo.

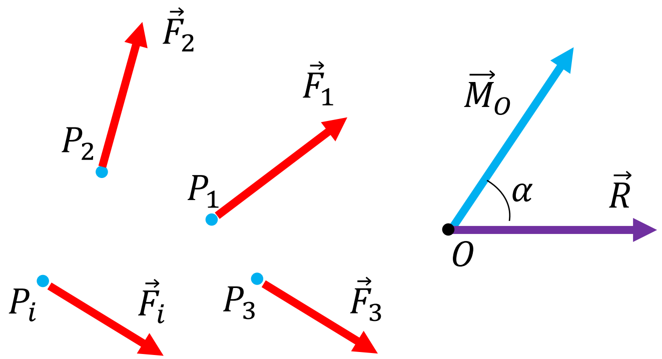
Algebricamente:

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Oi}$$

Onde N é a quantidade de forças envolvidas no sistema.

É um vetor livre no espaço. Apenas por convenção costuma-se representá-lo graficamente com origem no polo considerado.

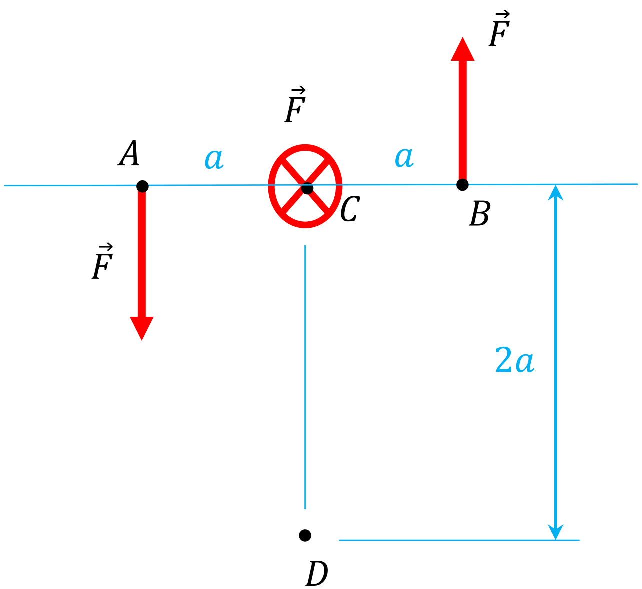
O momento de cada força em relação ao polo é ortogonal a ela.
Entretanto, <u>o momento do sistema de forças em relação ao polo forma um ângulo qualquer com a direção da resultante do sistema de forças!</u>
O ângulo α é qualquer!



Exemplo 1

Apenas para exemplificar que o momento de sistema de forças em relação a um polo pode formar um ângulo qualquer em relação à direção a resultante (isto é, não necessariamente ortogonal), considere o sistema de forças ilustrado constituído por 3 forças.

Veja que, para esta situação ilustrada tomada como exemplo, o momento do sistema de forças calculado em relação a diversos polos assume diversos ângulos em relação à direção da resultante, sendo que, quando calculado em relação ao ponto B, resulta até paralelo à direção da resultante.



$$(-F\vec{j}, A) \quad , \qquad (F\vec{j}, B) \quad , \qquad (-F\vec{k}, C)$$

$$\vec{R} = -F\vec{j} + F\vec{j} - F\vec{k} \qquad \boxed{\vec{R} = -F\vec{k}} \qquad \vec{R}\ \otimes$$

$$\vec{M}_A = a\vec{i} \wedge \left(-F\vec{k}\right) + 2a\vec{i} \wedge (F\vec{j}) = -aF\vec{j} + 2aF\vec{k}$$

$$\vec{M}_C = -a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) + a\vec{i} \wedge (F\vec{j}) = 2aF\vec{k} \qquad \vec{M}_C\ \odot$$

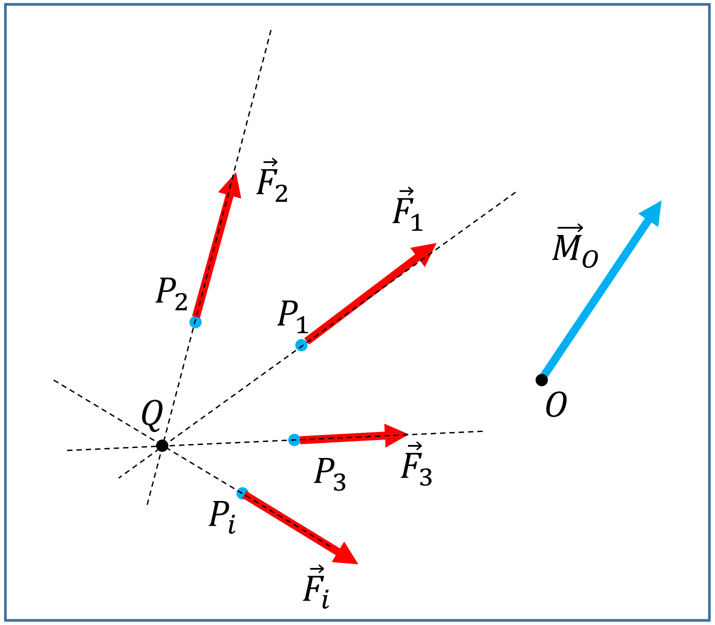
$$\vec{M}_B = -2a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) - a\vec{i} \wedge \left(-F\vec{k}\right) = -aF\vec{j} + 2aF\vec{k}$$

$$\vec{M}_D = (-a\vec{i} + 2a\vec{j}) \wedge (-F\vec{j}) + 2a\vec{j} \wedge \left(-F\vec{k}\right) + (a\vec{i} + 2a\vec{j}) \wedge (F\vec{j}) = -2aF\vec{i} + 2aF\vec{k}$$

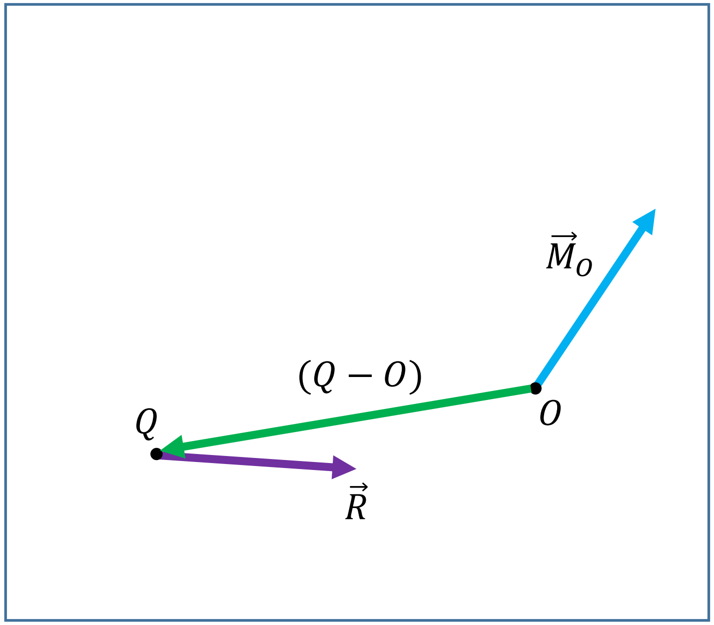
Sistema de Forças Concorrentes – Teorema de Varignon

Forças concorrentes são aquelas cujas linhas de ação tem um ponto de concorrência Q em comum.

<u>Teorema de Varignon</u>: "O momento de um sistema de forças concorrentes em relação a um determinado polo pode ser dado pelo momento da resultante, suposta aplicada no ponto de concorrência das forças, calculado em relação ao mesmo polo".



$\equiv$

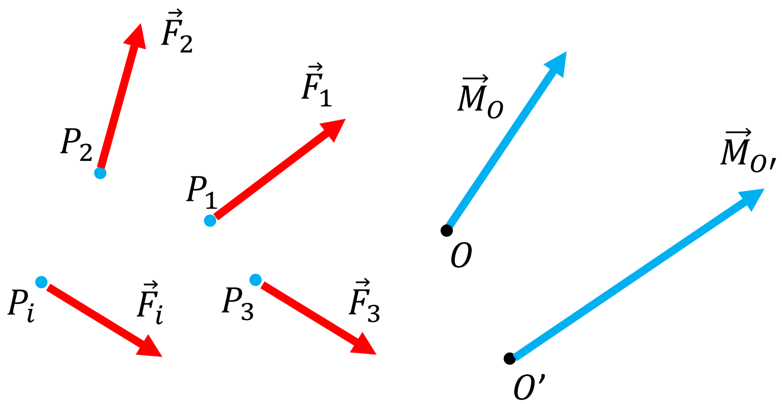


As forças podem ser deslocadas em cima de suas linhas de ação até que seus pontos de aplicação coincidam no ponto de concorrência.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (Q - O) \wedge \vec{F}_i = (Q - O) \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Longrightarrow \boxed{\vec{M}_O = (Q - O) \wedge \vec{R}}$$

Fórmula de Mudança de Polo para o momento de um sistema de forças

Digamos que já calculamos o momento de um sistema de forças em relação a um polo e queiramos conhecer agora o momento em relação a um novo polo. Ou calculamos novamente pela definição ou podemos utilizar a fórmula que segue, que calcula o momento em relação ao novo polo em função daquele momento já conhecido.



$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O + O - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} (O - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \vec{M}_O + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}}$$

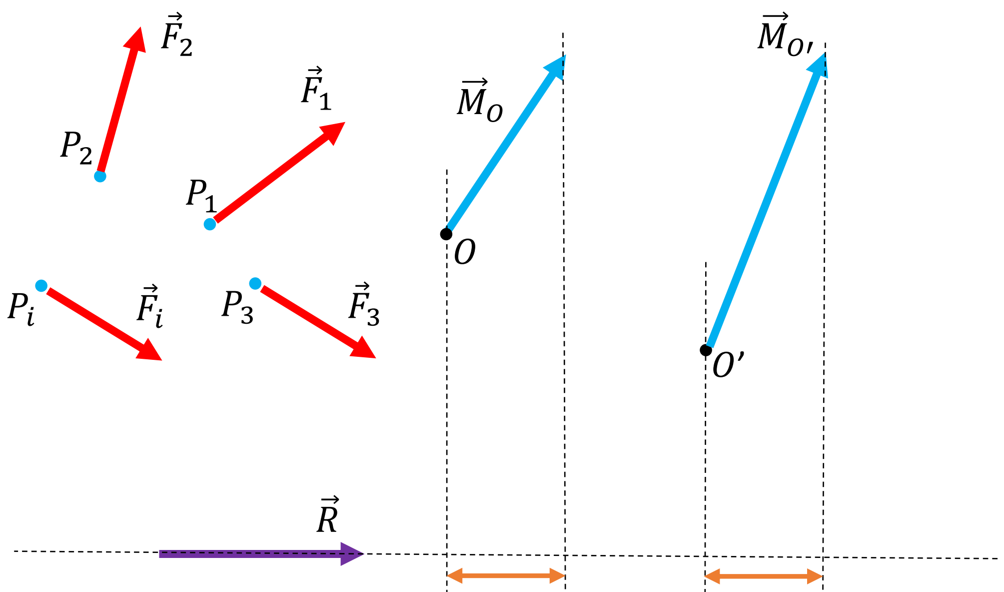
Pela fórmula de mudança de polo verifica-se facilmente que, <u>quando a resultante é nula</u>, o momento é invariante para mudança de polo.

$$\boxed{quando\ \vec{R} = \vec{0}\,,\quad \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O}$$

Invariante escalar do momento de um sistema de forças

"A projeção do momento de um sistema de forças em relação a um polo qualquer na direção da resultante é um invariante".

Em outras palavras: Mudando-se o polo, muda-se o momento do sistema de forças, entretanto a projeção do novo momento na direção da resultante permanece a mesma!



$$\vec{M}_O \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \equiv \vec{M}_{O'} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

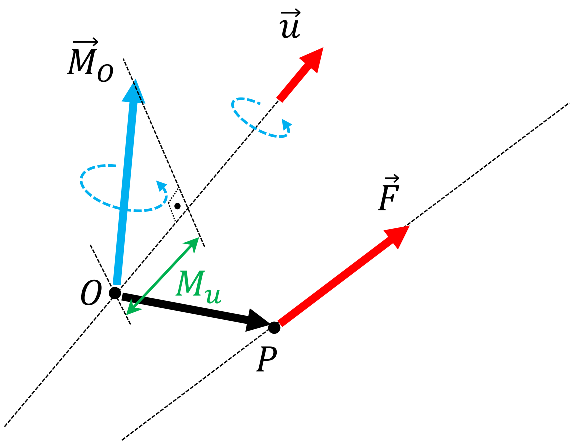
$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (O - O') \wedge \vec{R} \cdot \vec{R}$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I}$$

$$I \quad (Invariante\ escalar)$$

Volte ao exemplo 1 e confira o invariante escalar dos diversos cálculos de momento em relação a diferentes polos. A componente na direção da resultante mantém-se inalterada!

Definição de Momento de uma Força em Relação a um Eixo



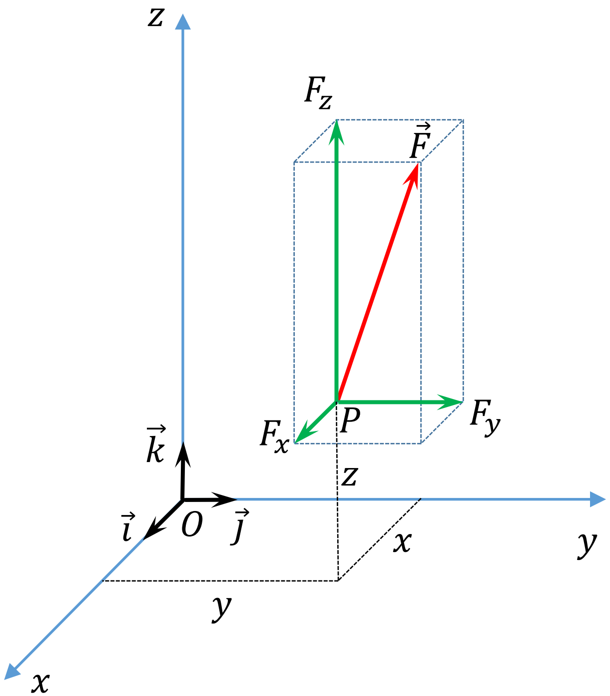
<u>Momento de uma força em relação a um eixo</u>: representação da tendência que uma força tem de fazer o corpo passar a girar em relação a um eixo.

- **Tem intensidade.**
- **Tem sentido de rotação.**
- **Quanto mais longe a linha de ação da força estiver em relação ao eixo maior é o efeito da tendência de girar.**
- **Efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo.**
- **Invertendo a força inverte-se o sentido de rotação.**

É dado por: $\boxed{M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}}$

É uma grandeza escalar.
Um valor positivo indica efeito de rotação no sentido positivo do versor do eixo utilizando-se a <u>regra da mão direita</u>. Um valor negativo indica efeito de rotação no sentido contrário ao do versor do eixo.

Momento de uma Força em Relação a um Eixo (continuação)



$$(\vec{F}, P) \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$P = P(x, y, z)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_O = xF_y\vec{k} - xF_z\vec{j} - yF_x\vec{k} + yF_z\vec{i} + zF_x\vec{j} - zF_y\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}}$$

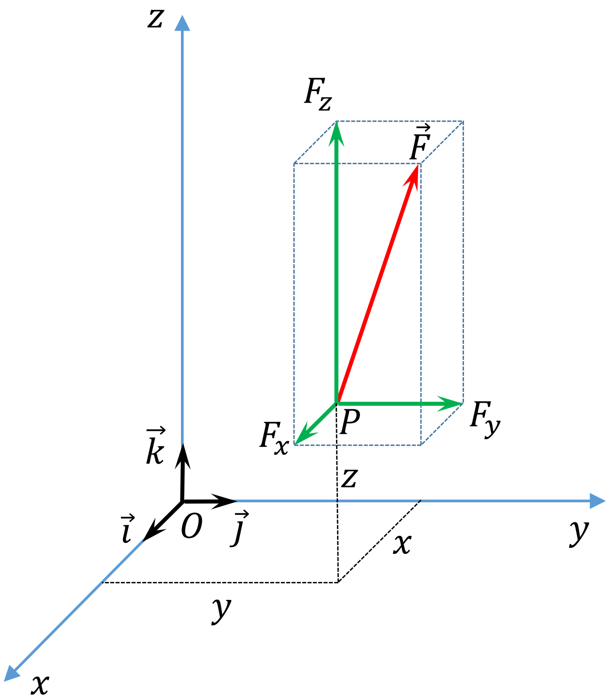
$$\boxed{\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}}$$

Conclui-se que, para uma decomposição da força segundo um sistema de eixos ortogonais:

- **se a componente da força é paralela ao eixo considerado, ela não causa momento em relação a ele;**
- **se a linha de ação da componente da força cruzar o eixo (braço nulo), ela não causa momento em relação a ele;**
- **o momento de uma força em relação a um eixo é dado pelo módulo da força multiplicado pelo seu braço;**
- **o sinal é positivo ou negativo, dado pela regra da mão direita, indicando o sentido da tendência a girar.**

Momento de uma Força em Relação a um Eixo (continuação)



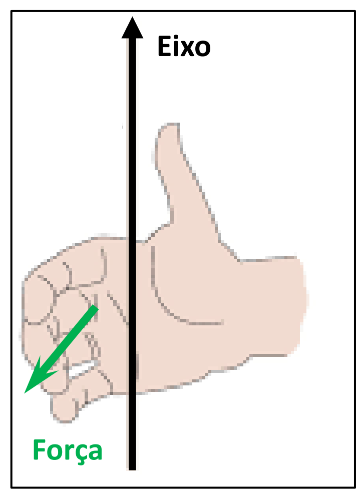
$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

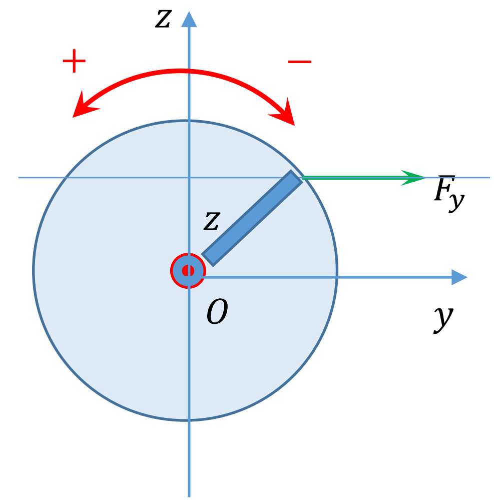
Regra da mão direita para determinar o sentido de momento de força em relação a eixo:

- **Alinhar o polegar com a direção do eixo;**
- **Alinhar os demais dedos na direção e sentido da força, colocando-os do mesmo lado que a força está em relação ao eixo (isto é, acima ou abaixo, à direita ou à esquerda).**

➢ **Polegar apontando no sentido do eixo ➔ momento é POSITIVO**

➢ **Polegar apontando no sentido contrário do eixo ➔ momento é NEGATIVO**





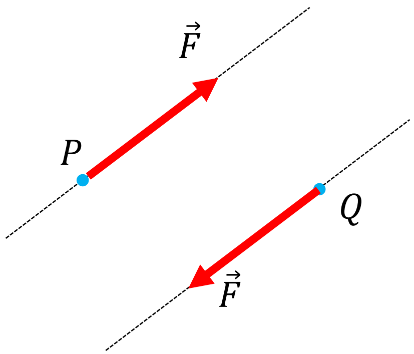
Alternativa:
Olhe o eixo de frente.

➢ **Caso a força cause uma tendência de rotação num corpo imaginário no sentido anti-horário ➔ momento é POSITIVO**

➢ **Caso a força cause uma tendência de rotação num corpo imaginário no sentido horário ➔ momento é NEGATIVO**

Definição de Binário

Binário é um sistema de forças constituído por um para de forças opostas.
Forças opostas são forças que tem linhas de ação paralelas mas sentidos opostos.
A resultante de um binário é nula.
O momento de um binário é invariante para mudança de polo.



$$(\vec{F}, P)$$

$$(-\vec{F}, Q)$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \vec{F} - \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

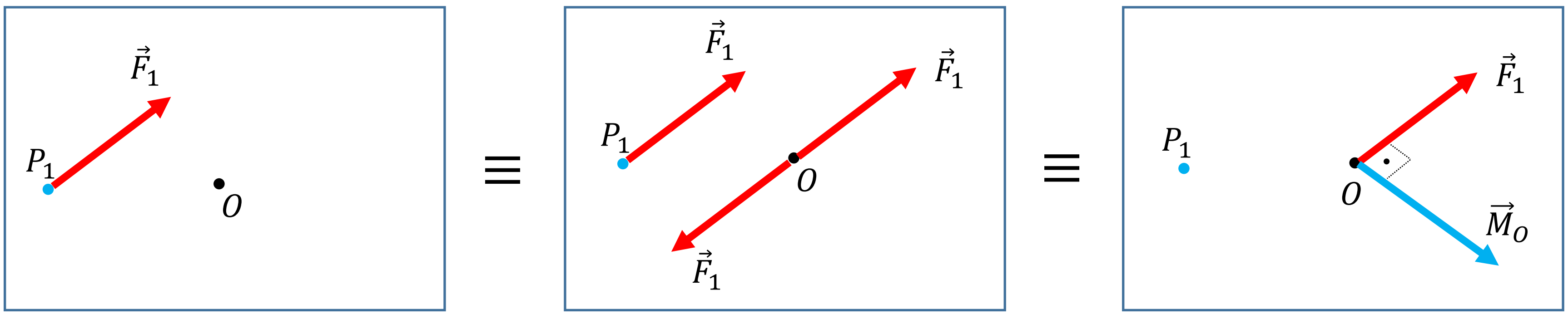
$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (Q - O) \wedge (-\vec{F})$$

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}}$$

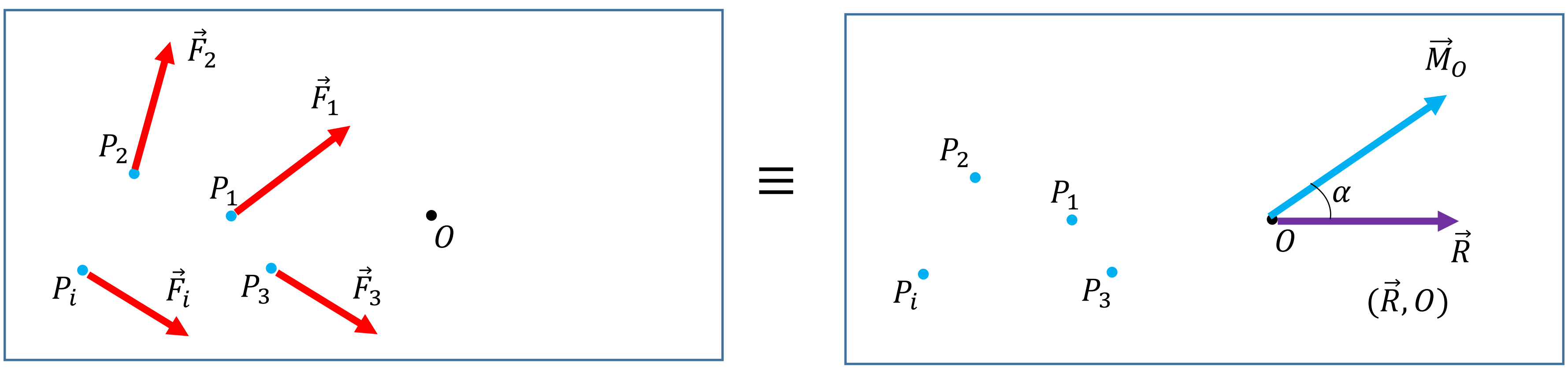
O momento do binário é independente do polo *O*!

Redução de um Sistema de Forças à sua forma geral mais simples.

Escolhe-se um ponto O qualquer arbitrário para ser o polo de redução do sistema de forças.
Uma força genérica pode ser “reduzida” para o polo O, preservando-se os seus efeitos, da seguinte forma:



O mesmo processo pode ser repetido para cada uma das N forças de um sistema qualquer, de forma a obtermos:



Demonstrando-se assim que a forma mais geral a que um sistema de forças pode ser reduzido é constituído por uma força, que é a resultante do sistema de forças aplicada no polo de redução, mais um binário. Reforçando que ângulo entre a resultante e o binário, em geral, é qualquer!

Casos Particulares da Redução de um Sistema de Forças:

Caso mais geral: $\boxed{(\vec{R}, O) \quad ; \quad \vec{M}_O}$

1º Caso particular: Sistema nulo. Sistema equilibrado. Sistema equivalente a zero. Caso trivial.

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{M}_O = \vec{0}}$$

Pela fórmula de mudança de polo verificou-se já anteriormente que, quando a resultante é nula, o momento é invariante para mudança de polo. Sendo assim, não foi sorte termos escolhido o polo O que anulou o momento, pois para qualquer polo teríamos o mesmo resultado.

2º Caso particular: Sistema equivalente a um binário.

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{M}_O \neq \vec{0}}$$

Pelo mesmo comentário acima, resultado este invariante para mudança de polo.

3º Caso particular: Sistema redutível a apenas uma força (isto é, sem o binário).

$$quando\ \vec{R} \neq \vec{0} \ \ ; \vec{M}_O \neq \vec{0} \ \ mas \quad I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \Longrightarrow \exists\, E / \vec{M}_E = \vec{0}$$

Nesta situação, quando o invariante escalar é nulo, isto é, quando a resultante é ortogonal ao momento, demonstra-se que existe um conjunto de pontos E tais que: $\vec{M}_E = \vec{0}$

Estes pontos E formam uma reta paralela à direção da Resultante.

Neste caso o sistema pode ser reduzido então a apenas uma força aplicada em um dos pontos E. $\boxed{(\vec{R}, E)}$

Demonstração da existência dos pontos E quando $I = 0$:

Quer-se demonstrar que, quando: $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \Longrightarrow \exists\, E/\vec{M}_E = \vec{0}$

Da fórmula de mudança de polo: $\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} = \vec{0}$

$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

Observe então que $\vec{M}_O \perp \vec{R} \Longrightarrow \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I = 0$ **satisfazendo a condição do 3º caso particular.**

É uma equação vetorial do tipo: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$

Que tem a seguinte solução:

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2} + \lambda \vec{u} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

(Veja resolução desta equação vetorial em página que segue).

Assim:

$$\boxed{(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda \vec{R} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Sendo que os pontos E formam uma reta paralela à direção da resultante.

Solução da Equação Vetorial $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$

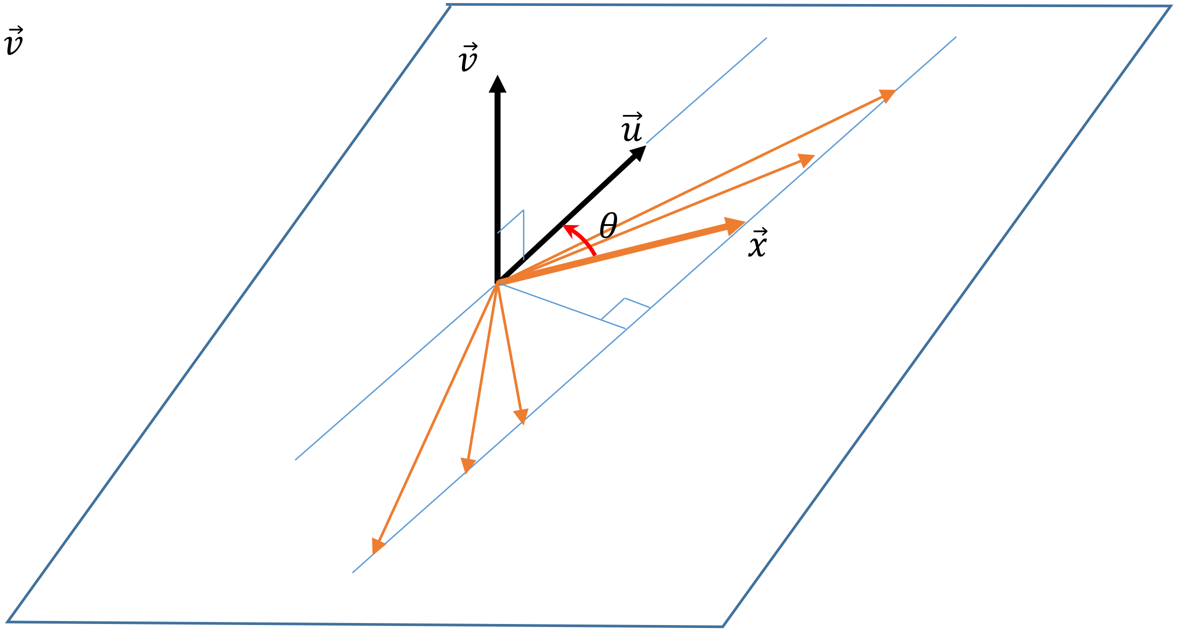
Dada a equação vetorial: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conhecidos e $\vec{x}$ incógnita.

Têm-se:

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$
$$\vec{x} \perp \vec{v}$$

$$|\vec{x}||\vec{u}|sen\theta = |\vec{v}|$$
$$\Rightarrow |\vec{x}|sen\theta = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$



$\vec{x}$ deve então ter duas componentes, uma paralela a $\vec{u}$ e uma perpendicular simultaneamente a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
A componente perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem módulo $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.
Podemos obter um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pelo produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Dividimos pelo módulo de $|\vec{u}|^2$ para ajustarmos ao módulo desejado.
A componente paralela a $\vec{u}$ pode ter qualquer módulo e sentido.

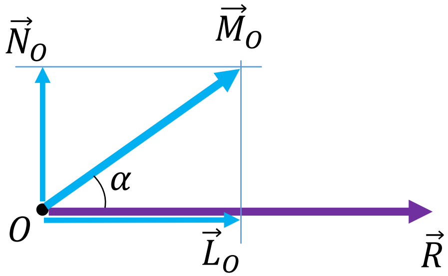
$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2} + \lambda\vec{u} \quad com \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

As extremidades dos infinitos vetores solução formam uma reta paralela a $\vec{u}$.

Lugar geométrico de mínimo momento – Eixo Central

Para um qualquer sistema de forças sempre há um conjunto de pontos em relação aos quais o momento do sistema assume um valor mínimo.
Este conjunto de pontos forma um lugar geométrico que é uma reta paralela à direção da resultante.
Esta reta é denominada "eixo central" do sistema de forças.
O 3º caso de redução é um caso particular do eixo central onde este valor mínimo de momento é zero.
Para casos mais gerais o momento então é mínimo mas diferente de zero.
Decompondo o momento em duas componentes, uma paralela à resultantes e outra perpendicular a ela:

$$\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$$



O Invariante escalar nos diz que a componente paralela à resultante não varia com mudança de polo.
Sendo assim, se desejamos procurar pontos H em relação aos quais o momento do sistema de forças é mínimo, só nos resta procurar pontos que anulem a componente perpendicular à direção da resultante:

$$\vec{N}_H = \vec{0} \Longrightarrow \vec{M}_H = \vec{L}_H = \alpha\vec{R} = \vec{M}_O + (O - H) \wedge \vec{R}$$

$$(H - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - \alpha\vec{R}$$

Cuja solução já nos é conhecida:

$$\boxed{(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R} \quad com \;\; \lambda \in \mathbb{R}}$$

E o momento mínimo fica dado por:

$$\boxed{\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}} \qquad \boxed{\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}\vec{R}} \qquad \boxed{|\vec{M}_H| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}}$$

Exercício 1

Para o sistema de forças ilustrado, pede-se determinar:

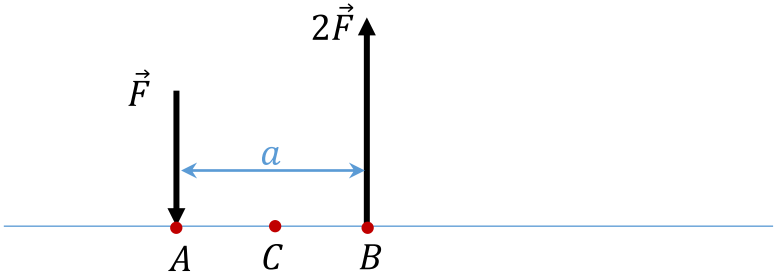
a) a resultante;

b) o momento em relação ao polo C (ponto médio entre A e B);

c) verificar se o sistema é redutível a apenas uma força;

d) calcular o momento mínimo;

e) determinar o eixo central.



Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente os resultados para:

$$\vec{F} = 15\ [N]$$

$$a = 0{,}2\ [m]$$

Exercício 1 (continuação)

Para o sistema de forças ilustrado, pede-se determinar:

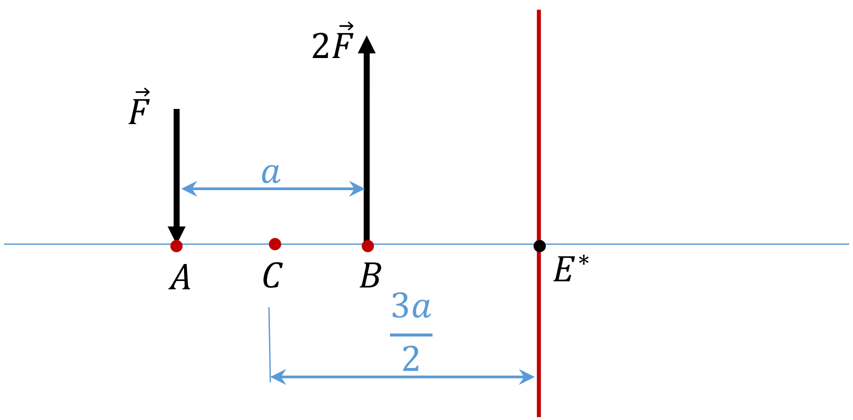
a) a resultante;

b) o momento em relação ao polo C (ponto médio entre A e B);

c) verificar se o sistema é redutível a apenas uma força;

d) calcular o momento mínimo;

e) determinar o eixo central.



Para:

$\vec{F} = 15\ [N]$

$a = 0{,}2\ [m]$

$\boxed{\vec{R} = 15\vec{j}\ [N]}$

$\boxed{\vec{M}_C = 4{,}5\vec{k}\ [Nm]}$

$\boxed{\vec{M}_E = \vec{0}\ [Nm]}$

$\boxed{(E^* - C) = 0{,}3\vec{\imath}\ [m]}$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = -F\vec{j} + 2F\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = F\vec{j}}$$

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{N} (P_i - C) \wedge \vec{F}_i = -\frac{a}{2}\vec{\imath} \wedge -F\vec{j} + \frac{a}{2}\vec{\imath} \wedge 2F\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{M}_C = \frac{3a}{2} F\vec{k}}$$

$$I = \vec{M}_C \cdot \vec{R} = \frac{3a}{2} F\vec{k} \cdot F\vec{j} = 0 \Longrightarrow$$

$\exists\, E / \vec{M}_E = \vec{0}$

Sim, é redutível a apenas uma força!

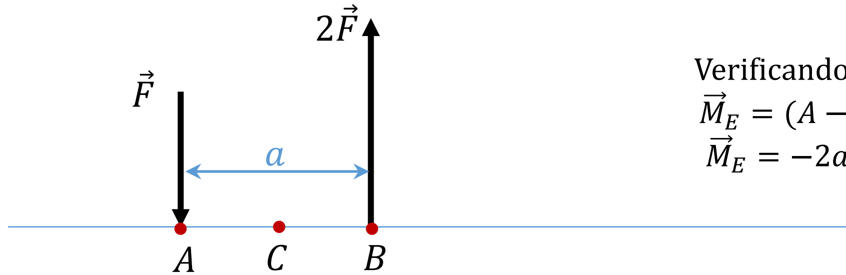
$$(E - C) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_C}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(E - C) = \frac{F\vec{j} \wedge \frac{3a}{2} F\vec{k}}{|F|^2} + \lambda F\vec{j} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(E - C) = \frac{3a}{2}\vec{\imath} + \beta\vec{j} \quad com\ \ \beta \in \mathbb{R}}$$

Exercício 1 (continuação)

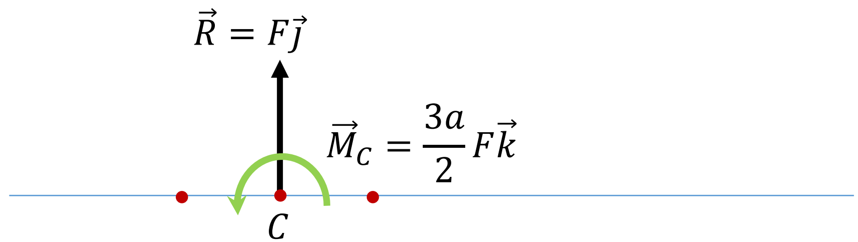
sistema de forças original



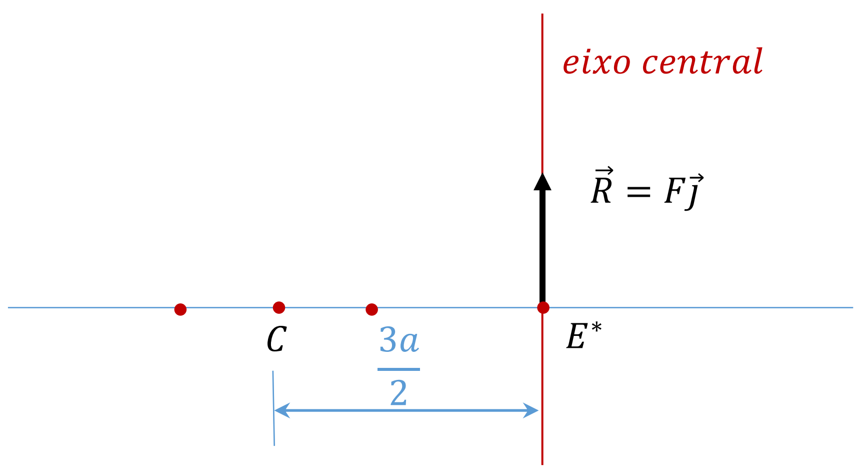
Verificando:

$$\vec{M}_E = (A - E) \wedge (-F\vec{j}) + (B - E) \wedge 2F\vec{j}$$
$$\vec{M}_E = -2a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) + (-a\vec{i}) \wedge 2F\vec{j} = \vec{0}$$

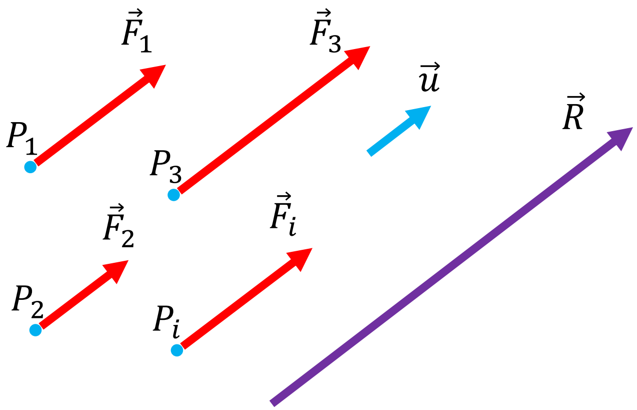
sistema reduzido para o polo C



sistema reduzido para o eixo central



Sistemas de Forças Paralelas



<u>Sistema de Forças Paralelas</u> é um sistema constituído por um conjunto de forças cujas linhas de ação são paralelas entre si.

$$\boxed{(\vec{F}_i, P_i)\ , \qquad onde\ \ \vec{F}_i = h_i\vec{u}}$$

$\vec{u}$ é o versor que dá a direção do sistema de forças paralelas.

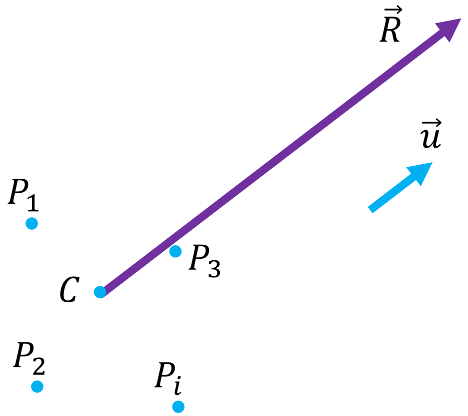
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}h_i\vec{u} \Longrightarrow \boxed{\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{N}h_i\right)\vec{u}}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N}(P_i - O)\wedge\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}(P_i - O)\wedge h_i\vec{u} \Longrightarrow \boxed{\vec{M}_O = \left(\sum_{i=1}^{N}h_i(P_i - O)\right)\wedge\vec{u}}$$

$$\vec{R} \parallel \vec{u} \quad e \quad \vec{M}_O \perp \vec{u} \Longrightarrow \boxed{I = \vec{M}_O\cdot\vec{R} = 0}$$

Verifica-se que o invariante escalar é nulo e que então estamos no 3º caso particular de redução: $\boxed{\exists\, C / \vec{M}_C = \vec{0}}$

Sistemas de Forças Paralelas – Centro de Forças Paralelas



Verificou-se que o invariante escalar é nulo e que então estamos no 3º caso particular de redução:

$$\boxed{\exists\, C / \vec{M}_C = \vec{0}}$$

Da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + (O - C) \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$(C - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

$$(C - O) \wedge \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)\vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)\right) \wedge \vec{u}$$

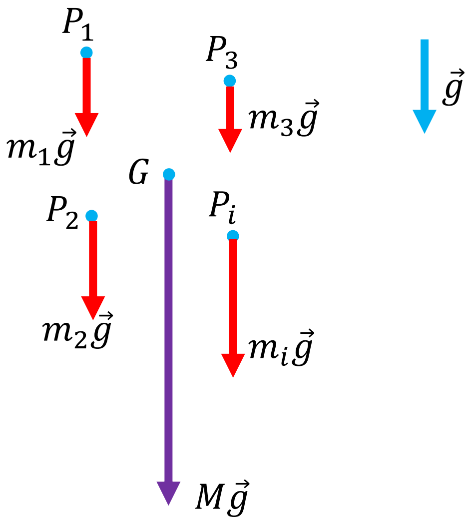
$$\left(\sum_{i=1}^{N} h_i (C - O)\right) \wedge \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)\right) \wedge \vec{u}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} h_i (C - O)\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)\right) + \lambda \vec{u}$$

Tomando-se a solução que independe da direção do sistema de forças paralelas, mas sim <u>depende apenas da distribuição espacial dos escalares</u> h_i , define-se o <u>Centro de Forças Paralelas</u> (observe que ele é apenas um ponto em particular do eixo central do sistema de forças paralelas):

$$\boxed{(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} h_i}}$$

Sistemas de Forças Paralelas Peso - Baricentro



Para corpos de dimensão pequena quando comparados à dimensão da Terra, podemos considerar o sistema de forças peso distribuídas no volume do corpo como sendo um conjunto de Forças Paralelas.
Os escalares são o pesos de cada ponto.
A direção é aquela do campo gravitacional.
O centro de forças paralelas é chamado <u>BARICENTRO</u> (G), centro de massa ou ainda centro de gravidade.
O corpo pode girar em relação ao campo gravitacional que o Baricentro não muda de posição em relação à distribuição espacial dos escalares, pois ele não depende da direção do campo gravitacional, mas apenas desta distribuição espacial dos escalares, que são as massas dos pontos.
Podemos reduzir então o sistema de forças peso a apenas uma força, a resultante do sistema, que é o peso total do corpo, aplicada no seu centro de forças paralelas, que é o baricentro.

$$\boxed{\left(\vec{F}_i, P_i\right) \ , \qquad onde \ \ \vec{F}_i = m_i\vec{g}}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{g} \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{R} = M\vec{g}}$$

$$\boxed{(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i(P_i - O)}{M}}$$

Sistemas de Forças Paralelas Peso - Baricentro

Para massas em pontos discretos:

$$(G-O)=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i(P_i-O)}{M}$$

$$x_G=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}\qquad y_G=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}\qquad z_G=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Em um sistema de coordenadas cartesiano, sendo O a origem:

$$G=(x_G\,,y_G\,,z_G)$$

Para um corpo:

$$(G-O)=\frac{\int_{\mathbb{V}}(P-O)\,dm}{M}$$

$$x_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} x\,dm}{M}\qquad y_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} y\,dm}{M}\qquad z_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} z\,dm}{M}$$

Para corpo homogêneo de massa específica ρ:

$$dm=\rho d\mathbb{V}\qquad M=\rho\mathbb{V}$$

$$x_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} x\,d\mathbb{V}}{\mathbb{V}}\qquad y_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} y\,d\mathbb{V}}{\mathbb{V}}\qquad z_G=\frac{\int_{\mathbb{V}} z\,d\mathbb{V}}{\mathbb{V}}$$

Para corpo homogêneo bi-dimensional (chapa)

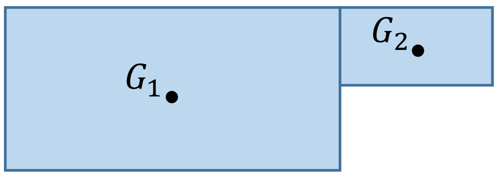
$$x_G=\frac{\int_{\mathbb{A}} x\,d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}\qquad y_G=\frac{\int_{\mathbb{A}} y\,d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}\qquad z_G=\frac{\int_{\mathbb{A}} z\,d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Para corpo homogêneo uni-dimensional (barra)

$$x_G=\frac{\int_{\ell} x\,d\ell}{\ell}\qquad y_G=\frac{\int_{\ell} y\,d\ell}{\ell}\qquad z_G=\frac{\int_{\ell} z\,d\ell}{\ell}$$

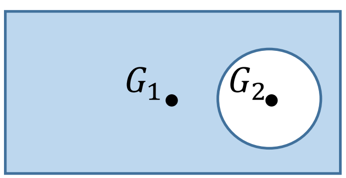
Propriedades do Baricentro

A: Propriedade Associativa



$$(G - O) = \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O) + \cdots + m_N(G_N - O)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

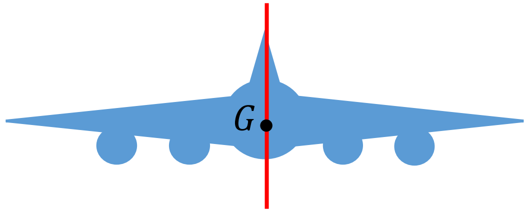
B: Propriedade Subtrativa



$$(G - O) = \frac{m_1(G_1 - O) - m_2(G_2 - O) + \cdots + m_N(G_N - O)}{m_1 - m_2 + \cdots + m_N}$$

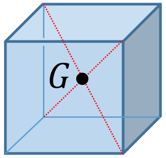
C: Propriedade de Corpos Simétricos

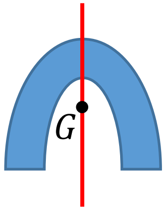
Havendo algum elemento de simetria (eixo ou plano), o baricentro estará sobre ele.
Havendo mais de um elemento de simetria, o baricentro estará na intersecção deles.



D: Propriedade de Corpos Convexos

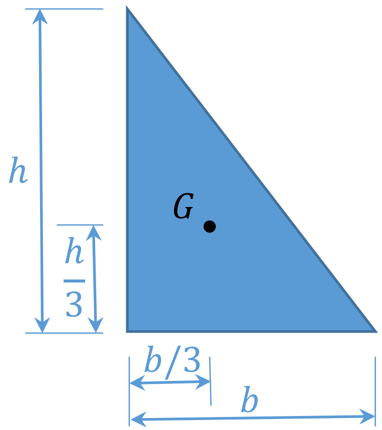
Sendo o corpo convexo, o baricentro estará dentro do volume do corpo.
Sendo o corpo não convexo, o baricentro poderá estar fora do volume do corpo.
Corpo convexo: todo plano tangente ao corpo o deixa em um mesmo semi-espaço.





Exercício 2

Pede-se demostrar que o baricentro de um triângulo localiza-se a um terço da altura até a base.



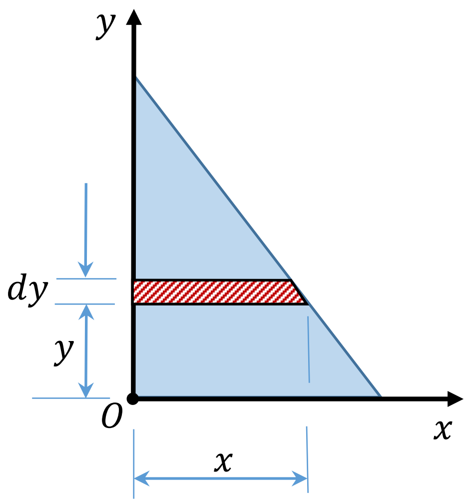
Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente os resultados para:

$$h = 0{,}6\ [m]$$

$$b = 0{,}4\ [m]$$

Exercício 2 (continuação)

Iremos calcular a coordenada y do baricentro (y_G) conforme o sistema de coordenadas cartesiano indicado:



$$\boxed{y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y \, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}}$$

Definindo uma fatia de altura infinitesimal como elemento infinitesimal de área de integração, assim todos os pontos do elemento infinitesimal tem mesma coordenada y.

$$d\mathbb{A} = x dy$$

$$y_G = \frac{\int_0^h y \, x dy}{\mathbb{A}}$$

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{h}{b} = \frac{h-y}{x} \Longrightarrow x = \frac{b(h-y)}{h} = b - \frac{by}{h}$$

$$y_G = \frac{\int_0^h y \left(b - \frac{by}{h}\right) dy}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{h}\int_0^h \left(y - \frac{y^2}{h}\right) dy = \frac{2}{h}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h = \frac{2}{h}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right) = 2h\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{h}{3}}$$

$$p/h = 0{,}6\ [m]$$

$$\boxed{y_G = 0{,}2\ [m]}$$

Por analogia:

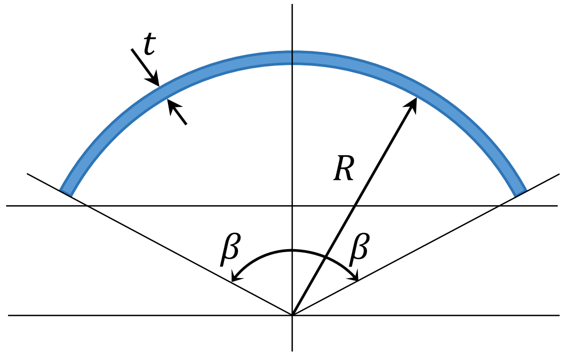
$$\boxed{x_G = \frac{b}{3}}$$

$$p/b = 0{,}4\ [m]$$

$$\boxed{x_G = 0{,}133\ [m]}$$

Exercício 3

Pede-se determinar a posição do baricentro do setor de arco delgado ilustrado.

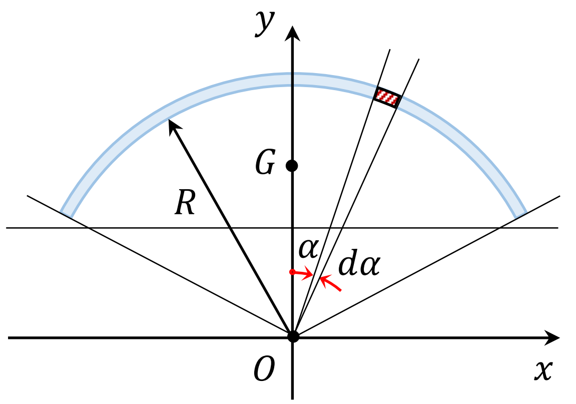


Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente para:

$$R = 0{,}6\ [m] \qquad t = 0{,}01\ [m] \qquad \beta = \frac{\pi}{3} rad = \ 60^0$$

Exercício 3 (continuação)

Aproveitando a propriedade de corpos simétricos, sabemos que o baricentro estará sobre o eixo vertical:



$$G = (x_G, y_G) = (0, y_G\ )$$

$$\boxed{y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}}$$

$$d\mathbb{A} = Rtd\alpha \qquad \mathbb{A} = 2Rt\beta$$

$$y = Rcos\alpha$$

$$y_G = \frac{\int_{-\beta}^{\beta}(Rcos\alpha)(Rtd\alpha)}{2Rt\beta} = \frac{R}{2\beta} sen\,\alpha\Big|_{-\beta}^{\beta} = \frac{R}{2\beta}(sen\beta - sen(-\beta)) \Longrightarrow \boxed{y_G = \frac{Rsen\beta}{\beta}}$$

Para:

$R = 0{,}6\ [m]$

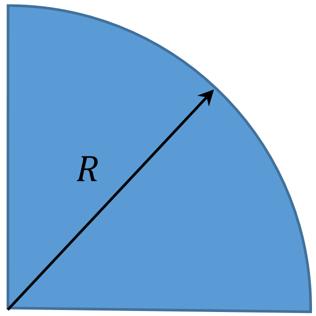
$t = 0{,}01\ [m]$

$\beta = \frac{\pi}{3} rad = \ 60^0$

$$y_G = \frac{0{,}6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \boxed{y_G = 0{,}496\ [m]}$$

Exercício 4

Pede-se determinar a posição do baricentro de ¼ de círculo.

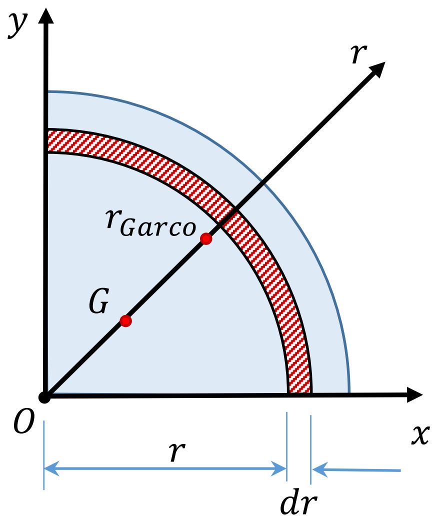


Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente para:

$$R = 0{,}6\ [m]$$

Exercício 4 (continuação)

Aproveitando a propriedade de corpos simétricos, sabemos que o baricentro estará sobre a diagonal ilustrada:



$$r_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} r\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Definindo uma fatia em arco, de largura infinitesimal, como elemento infinitesimal de área de integração, assim todos os pontos do elemento infinitesimal tem mesma coordenada r.

$$d\mathbb{A} = \frac{1}{4} 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi r dr$$

Já calculamos em exercício anterior a posição do baricentro de um arco:

$$r_{Garco} = \frac{r sen\beta}{\beta}$$ **Aqui:** $\beta = 45^0$ **Assim:** $$r_{Garco} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} r}{\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow r_{Garco} = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi}$$

$$r_G = \frac{\int_0^R \left(\frac{2\sqrt{2}r}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi r dr\right)}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4\sqrt{2}\int_0^R r^2 dr}{\pi R^2} = \frac{4\sqrt{2}r^3}{3\pi R^2}\Bigg|_0^R \Longrightarrow \boxed{r_G = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}}$$

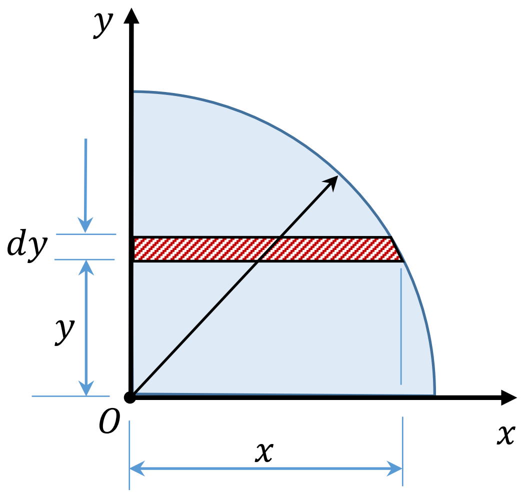
$$y_G = \frac{\sqrt{2}}{2} r_G \Longrightarrow \boxed{y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

Pela simetria, $x_G = y_G \Longrightarrow \boxed{x_G = \frac{4R}{3\pi}}$

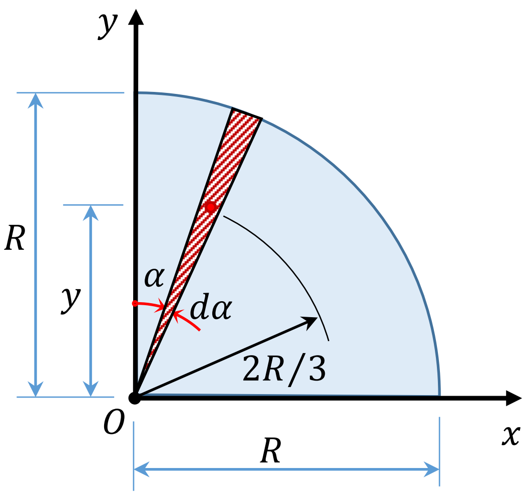
$p/R = 0{,}6\ [m]$ $\boxed{(x_G, y_G) = (0{,}255\ \ , 0{,}255\ )\quad [m]}$

Exercício 4 (continuação)

Outras possibilidades:



$$y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

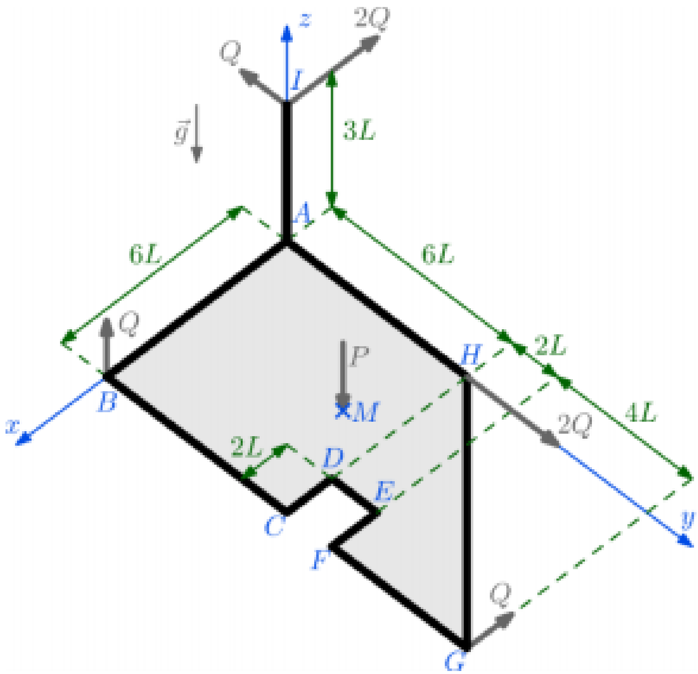


$$y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Tentar essas formas alternativas

Exercício 5

Considere o sistema material indicado na figura, composto por uma placa plana *ABCDEFGH*, de espessura desprezível, e uma barra vertical *AI* fixa rigidamente à placa. O sistema está livre no espaço. A placa plana é homogênea e tem peso $-P\vec{\mathrm{k}}$. A barra vertical tem peso desprezível. Sobre este sistema material também atuam as seguintes forças: $(\vec{F}_B, B)$, $(\vec{F}_G, G)$, $(\vec{F}_H, H)$, $(\vec{F}_I, I)$, com $\vec{F}_B = Q\vec{\mathrm{k}}$, $\vec{F}_G = -Q\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{F}_H = 2Q\vec{\mathrm{j}}$, $\vec{F}_I = -2Q\vec{\mathrm{i}} - Q\vec{\mathrm{j}}$. Determine:



(a) Mostre que o centro de massa da placa plana *ABCDEFGH* é o ponto $M = \left(\frac{16}{5}L, \frac{112}{25}L, 0\right)$.

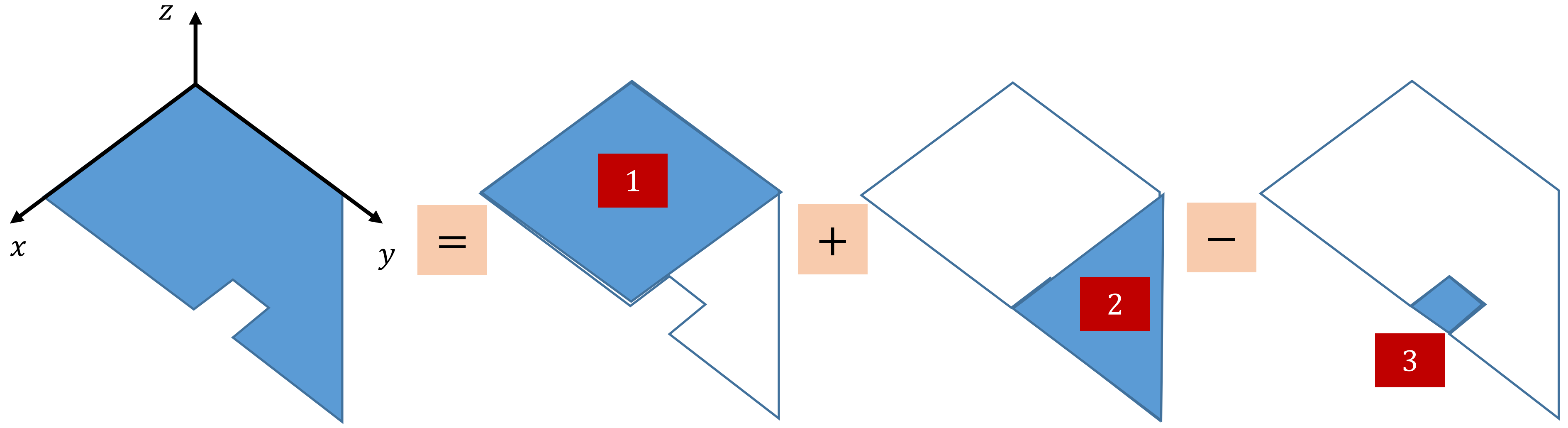
(b) A resultante $\vec{R}$ e o momento resultante $\vec{M}_A$ no pólo *A*.

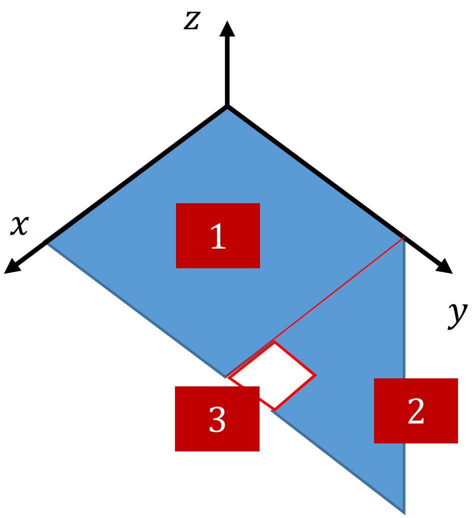
(c) A relação que deve existir entre *P* e *Q* para que o momento resultante em torno do eixo *Ay* seja nulo.

(d) A relação que deve existir entre *P* e *Q* para que o sistema de forças aplicadas possa ser reduzido a uma única força.

(e) A momento mínimo do sistema de forças, considerando que *P* e *Q* satisfaçam a relação obtida no item anterior.

Exercício 5 (continuação)





$$x_G = \frac{A_1(x_{G_1}) + A_2(x_{G_2}) - A_3(x_{G_3})}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{36L^2(3L) + 18L^2(4L) - 4L^2(5L)}{36L^2 + 18L^2 - 4L^2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{16}{5}L}$$

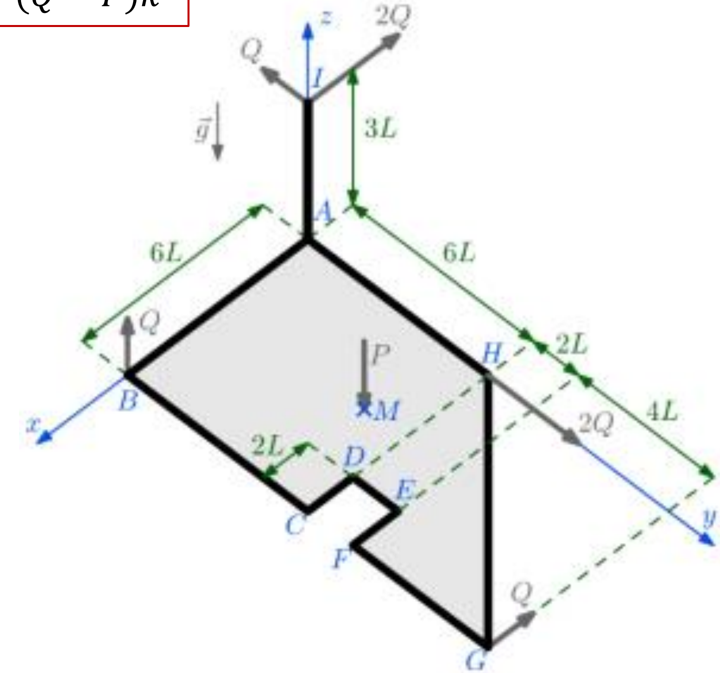
$$y_G = \frac{A_1(y_{G_1}) + A_2(y_{G_2}) - A_3(y_{G_3})}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{36L^2(3L) + 18L^2(8L) - 4L^2(7L)}{36L^2 + 18L^2 - 4L^2} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{112}{25}L}$$

$$\boxed{z_G = 0}$$

Exercício 5

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = -P\vec{k} + Q\vec{k} - Q\vec{\imath} + 2Q\vec{\jmath} - 2Q\vec{\imath} - Q\vec{\jmath} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = -3Q\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + (Q-P)\vec{k}}$$

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{N} M_{Ax}\,\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} M_{Ay}\,\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} M_{Az}\,\vec{k}$$



$$M_{Ax} = -(P)\left(\frac{112}{25}L\right) + Q(3L) = 3QL - \frac{112PL}{25}$$

$$M_{Ay} = -(Q)(6L) + P\left(\frac{16}{5}L\right) - 2Q(3L) = \frac{16PL}{5} - 12QL$$

$$M_{Az} = Q(12L) = 12QL$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \left(3QL - \frac{112PL}{25}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{16PL}{5} - 12QL\right)\vec{\jmath} + 12QL\vec{k}}$$

$$Para\ M_{Ay} = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4}{15}P}$$

$$Para\ I = \vec{M}_A \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow \left(3QL - \frac{112PL}{25}\right)(-3Q) + \left(\frac{16PL}{5} - 12QL\right)(Q) + (12QL)(Q-P) = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{116}{225}P}$$

$$\boxed{Como\ na\ condição\ anterior\ I = 0 \Rightarrow é\ imediato\ que\ o\ momento\ mínimo\ é\ nulo!}$$

Duvidem
Pensem
Comuniquem
Perguntem
Cometam erros
Aprendam dos seus erros
... e mais importante,
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,
porque o tempo não volta...
O que volta é a vontade de voltar no tempo.