Conjuntos abertos

Definição: Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.
Um ponto $a \in X$ chama-se um ponto interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X, isto é, quando existe $r > 0$ tal que se $\|x - a\| < \delta$ então $x \in X$. (todos os pontos "suficientemente próximos" de a também estão em X).

O interior de X, denotado por $\underline{\text{int } X}$, é formado por todos os pontos interiores a X.

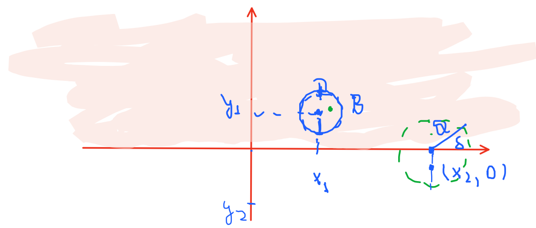
Se $a \in \text{int } X$, dizemos que X é uma vizinhança de a.

Dizer que $a \in X$ não é interior a X significa que qualquer bola com centro em a não está contida em X, isto é, $\forall \delta > 0$, $B(a, \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Exemplos:

1) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

$\text{int } X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$



$\delta = \frac{y_1}{2}$

$a \notin \text{int } X$

$B((x_2, 0), \delta) \not\subset X$

$q = \left(x_2, -\frac{\delta}{2}\right) \in B((x_2, 0), \delta)$

$\left\|\left(x_2, -\frac{\delta}{2}\right) - (x_2, 0)\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

mas $q \notin X$.

$B \subset B((x_1, y_1), \delta) \subset X$

$(x, y) \in B \Rightarrow |y - y_1| < \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < \delta = \frac{y_1}{2} \Rightarrow$

$-\frac{y_1}{2} < y - y_1 < \frac{y_1}{2}$ e $0 < \frac{y_1}{2} < y < \frac{3y_1}{2}$

2) $X = B(0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$

$\text{int } X = X$

Feito abaixo

Definição: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, se $X = \text{int}\, X$.

Exemplo: • $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - a\| < r\}$ é um conjunto aberto.

• $\underbrace{\text{int}\, X}_{A}$ é um conjunto aberto?

$X \subset \mathbb{R}^n$: int X é um conjunto aberto.

$a \in \text{int}\, X$, $\exists\, \delta > 0 \,/\, B(a, \delta) \subset \text{int}\, X$. Pensar!

$x_0 \in B(a; \delta)$, $x_0 \in \text{int}\, X \iff \exists\, B(x_0, r) \subset X$

Definição: A fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto denotado por $\text{fr}\, X$ ou ∂X, formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\forall\, \delta > 0$, $B(x, \delta)$ contém pontos de X e pontos do complementar de X, isto é, $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Dados um conjunto X e um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, há três possibilidades que se excluem mutuamente:

- ou $a \in \text{int}\, X$
- ou $a \in \partial X$
- ou $a \in \text{int}\, (\mathbb{R}^n \setminus X)$

Exemplos: • $B[a; r]$ não é um conjunto aberto.

• $\text{int}\, B[a; r] = B(a; r)$

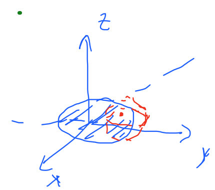
• $\partial B[a, r] = S[a; r] = \partial B(a; r)$

• $\mathbb{R}^n \setminus B[a; r]$ é aberto.

• $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$

$\text{int}\, X = ?$ $\emptyset$

$\partial X = ?$ X



• $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geq 0\}$

$\text{int } X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$

$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus X$ é aberto? Sim

$a \in A \Rightarrow a \in A_i \quad \forall i$

$B(a, \delta_1) \subset A_1$

$B(a, \delta_2) \subset A_2 \quad \dots \quad B(a_n, \delta_n) \subset A_n$

$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$

Teorema: Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ gozam das seguintes propriedades:

1) A interseção $A = A_1 \cap \dots \cap A_K$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \dots, A_K$ é um conjunto aberto.

$\bigcap_n \left(-1/n, \ 1/n\right) = \{0\}$

2) A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

$\rightarrow$ $a \in A \Rightarrow a \in A_\lambda$ p/ algum $\lambda \in L$.

H: $\exists B(a, \delta) \subset A$

$\hookrightarrow \exists \ \delta \quad B(a, \delta) \subset A_\lambda \subset$

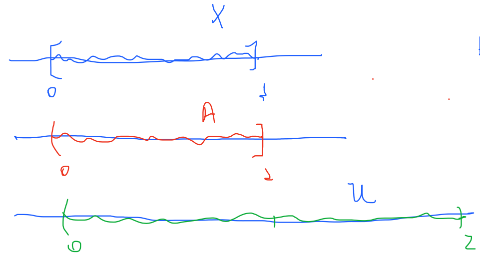
$\bigcup A_\lambda = A$

3) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos.

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X quando cada ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta $B(a; r)$, tal que $B(a; r) \cap X \subset A$. (os pontos de X que estão "suficientemente próximos" a $a \in A$ também pertencem a A)

Exemplo: $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $A = (0, 1]$.

A é aberto em X.



$A = X \cap \underline{\underline{U}}$

Resultado: $A \subset X$ é aberto em $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$.

De fato, se A for aberto em X, dado $a \in A$, $\exists\, B(a, \delta_a) \cap X \subset A$.

Considere $U = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta_a)$. Então $U \cap X \subset A$ e, obviamente, $A \subset U$ e $A \subset X \Rightarrow$

$A \subset U \cap X \Rightarrow A = U \cap X$.

Por outro lado, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $A = U \cap X$, então se $a \in A$,

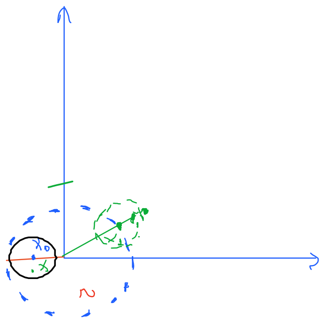
$a \in U \overset{U \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n}{\Longrightarrow} \exists\, B(a, \delta) \subset U \Rightarrow B(a; \delta) \cap X \subset U \cap X = A \Rightarrow A$ é aberto em X.

Voltando ao exemplo: $(0, 1] = (0, 2) \cap [0, 1]$

Resolução do Exemplo 2:

$$B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

$$B[0,r] = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \le r\}$$



Seja $x_0 \in B(0,r)$.

$$B = B(x_0, \delta) \subset B(0,r)$$

$$\delta = r - \|x_0\|$$

$$x \in B \Rightarrow x \in B(0,r)$$

$$\|x - x_0\| < \delta$$

$$\|x\| < r \ ?$$

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \le \|x - x_0\| + \|x_0\|$$

$$< \delta + \|x_0\| = r - \|x_0\| + \|x_0\| = r$$

$$\|x - x_1\| < \delta$$

$$x_1 + \frac{\delta}{2}\frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$\|$$

$$x = \left(r + \frac{\delta}{2}\right)\frac{x_1}{\|x_1\|} = \left(\|x_1\| + \frac{\delta}{2}\right)\cdot\frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$\|x - x_1\| = \frac{\delta}{2}\cdot\frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$x \notin B[0;r]$$

$$\|x\| = \left\|\left(r + \frac{\delta}{2}\right)\cdot\frac{x_1}{\|x_1\|}\right\| = r + \frac{\delta}{2} > r$$