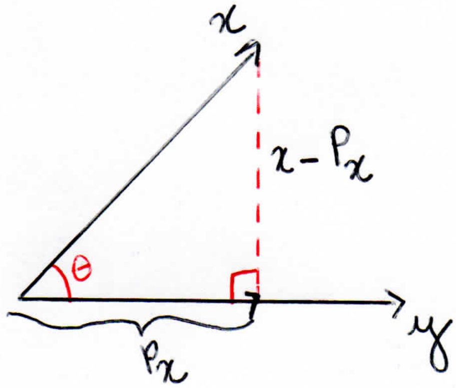
Projeção Ortogonal

Dados dois vetores x e y, a projeção ortogonal de x em y é o vetor P_x tal que



$$P_x = \frac{x'y}{y'y}\, y = \frac{x'y}{L_y^2}\, y$$

e o comprimento de P_x é

$$L_{P_x} = \frac{|x'y|}{L_y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{imediata}}}{=} L_x \left|\frac{x'y}{L_x L_y}\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{figura}}}{=} L_x\, |\cos\theta|$$

θ - ângulo entre x e y.

Demonstração:

$P_x = Ky$ $\quad$ $(x - Ky)$ e Ky são ortogonais $\Rightarrow$

$$(x - Ky)'\, Ky = 0$$

$$K x'y - K^2 y'y = 0$$

Supondo $K \neq 0$, $K = \dfrac{x'y}{y'y}$ $\quad$ $P_x = Ky = \dfrac{x'y}{y'y}\, y$

$$L_{P_x} = \sqrt{(Ky)'(Ky)} = \sqrt{K^2 y'y} = |K|\, L_y =$$

$$= \frac{|x'y|}{L_y^2}\, L_y = \frac{|x'y|}{L_y}.$$

b

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}$$

θ - ângulo formado por x_1 e x_2

$$\cos\theta = \frac{x_1' x_2}{L_{x_1} L_{x_2}} = \frac{x_1' x_2}{\sqrt{x_1' x_1}\,\sqrt{x_2' x_2}}$$

Sejam $e_1 = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 \\ x_{12} - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{1n} - \bar{x}_1 \end{bmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} x_{21} - \bar{x}_2 \\ x_{22} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{2n} - \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

$$L^2_{e_1} = e_1' e_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \qquad L^2_{e_2} = \sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

$$e_1' e_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$$

$\therefore \; L^2_{e_j} = n s_j \qquad s_j$: variância amostral de X_j

$j = 1, 2.$

$e_1' e_2 = n\, s_{12}$ s_{12}: covariância amostral entre X_1 e X_2

Seja θ_{12}: ângulo formado por e_1 e e_2.

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{e_1' e_2}{L_{e_1} L_{e_2}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}$$

$= r_{12}$ Coeficiente de Correlação amostral entre X_1 e X_2.

Se x_1 e x_2 forem centralizadas ou já tiverem média amostral igual a zero, então

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{\sum x_{1i}^2 \;\sum x_{2i}^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2}} = \frac{x_1' x_2}{L_{x_1} L_{x_2}}$$

θ_{12}: ângulo formado por x_1 e x_2.

Formas Quadráticas

Uma forma quadrática nas variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$ é uma expressão do tipo

$$f(x_1, \ldots x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n} x_1 x_n + \ldots + 2 a_{n-1,n} x_{n-1} x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

com $a_{ij} = a_{ji}$.

Esta forma quadrática pode ser escrita na notação matricial como

$$x' A x$$

onde $x' = [x_1 \ x_2 \ldots x_n]$ e A é uma matriz $n \times n$ simétrica com elementos a_{ij}.

Def

Uma matriz simétrica A associada a uma forma quadrática é positiva definida se

$$x' A x > 0$$

para todo $x \neq 0$ (vetor nulo)

Se $x' A x \geq 0$, e $x' A x = 0$ para pelo menos um $x \neq 0$ a forma quadrática e a matriz A são chamadas positivas semidefinidas.

Raízes Características e Vetores Característicos de uma matriz

As raízes características de uma matriz A, $p \times p$ são as soluções em λ da equação determinantal

$$\det(A - \lambda I_p) = 0$$

$\det(B) = |B|$ $\quad$ I_p - matriz identidade de ordem p

$\det(A - \lambda I_p)$ será um polinômio de grau p em λ e assim, A terá p raízes características

$$A - \lambda I_p = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2p} \\ & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} - \lambda \end{bmatrix}$$

Se $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ são as p raízes características da matriz A, verifica-se que

1) $\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p = \det(A)$

2) $\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = \text{traço}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 4$

$\text{traço}(A) = 6$

Cálculo das raízes características:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - (2-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 4$

$$\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 4 = \det(A) \qquad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 6 = \text{traço}(A)$$

Associado a cada raiz característica λ_i, $i=1,2,\dots p$, existe um vetor característico x_i, cujos elementos satisfazem à equação

$$[A - \lambda_i I]\, x_i = 0$$ vetor nulo

No exemplo, para $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$-2x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0$$
$$x_{11} - 2x_{12} + x_{13} = 0$$
$$x_{11} + x_{12} - 2x_{13} = 0$$

Como $\det(A - \lambda_i I) = 0$, e $(0,0,0)$ é solução, este sistema tem infinitas soluções.

$x' = [a \quad a \quad a]$ é solução, $\forall a$.

Tomar, por exemplo $x_1' = [1 \quad 1 \quad 1]$

Raízes características e Vetores característicos serão utilizados em <u>Componentes Principais</u>

Importantes Propriedades de Raízes Características e Vetores característicos

1- Todas as raízes características de uma matriz positiva definida são positivas (>0).

2- Raízes características de matrizes simétricas com elementos reais são reais.

3- Se uma matriz simétrica $n \times n$ é positiva semidefinida de posto r então ela terá exatamente r raízes características positivas e $n-r$ raízes características nulas.

4- Raízes características não nulas do produto AB são iguais às raízes características não nulas do produto BA. $\Longrightarrow$ Traço(AB) = Traço(BA)

5- Se λ_i e λ_j são raízes características distintas di uma matriz simétrica então os vetores associados x_i e x_j são ortogonais.

Matrizes na forma particionada

mesmo nº de linhas

mesmo nº de colunas

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} & A_2 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & B_2 = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{é uma possibilidade}$$

Se $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$,

A e B, A_1 e B_1, A_2 e B_2, A_3 e B_3, A_4 e B_4 de mesmas dimensões. Então

$$A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

Se $A = \begin{bmatrix} C_{q \times s} & D_{q \times n-s} \\ E_{m-q \times s} & F_{m-q \times n-s} \end{bmatrix}_{m \times n}$ e

$$B = \begin{bmatrix} G_{s \times d} & H_{s \times p-d} \\ I_{n-s \times d} & J_{n-s \times p-d} \end{bmatrix}_{n \times p}$$ então

$$A \times B = \begin{bmatrix} \underset{q \times d}{CG} + \underset{q \times d}{DI} & \underset{q \times p-d}{CH} + \underset{q \times p-d}{DJ} \\ \underset{m-q \times d}{EG} + \underset{m-q \times d}{FI} & \underset{m-q \times p-d}{EH + FJ} \end{bmatrix}_{m \times p}$$

Ex

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} E & & F \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} G \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right] \\ H \end{array}$$

$$AB = \begin{bmatrix} CG + DH \\ EG + FH \end{bmatrix} \qquad CG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad DH = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EG = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad FH = \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CG + DH = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad EG + FH = \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AB = \left[\begin{array}{cc} 10 & 4 \\ 7 & -1 \\ \hdashline 9 & 3 \end{array}\right]$$

Inversas de Matrizes na forma particionada

Seja A matriz quadrada particionada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$ com A_{11} e A_{22} quadradas.

Nessas condições, verifica-se que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{11} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Utilização: Distribuição Normal Multivariada
Inversão de Matrizes 5 x 5.

Se A_{11} é inversível

$$|A| = |A_{11}| . |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| .$$

Se A_{22} é inversível

$$|A| = |A_{22}| . |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| .$$

Se M é simétrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix}$$ então

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B W B' A^{-1} & - A^{-1} B W \\ - W B' A^{-1} & W \end{bmatrix}$$

onde $W = [D - B' A^{-1} B]^{-1}.$

19

Example 2.25. The preceding expressions for the inverses and determinants are often valuable in practical computation if the submatrices are small or conveniently patterned. If

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

we can compute $\mathbf{A}^{-1}$ by partitioning the matrix in terms of the first and second and third to fifth rows and columns. Then

$$\mathbf{A}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Hence

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 18 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -3 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

The determinant of $\mathbf{A}$ can be computed from (6) or (7) to be 16.

The two forms of the partitioned inverse (5) lead to a useful matrix identity. If we equate the alternative expressions for the (1,1) submatrix of $\mathbf{A}^{-1}$, we have

$$(8)\quad (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}$$

In particular, if $\mathbf{A}$ is $p \times p$ and nonsingular, $\mathbf{b}$ is a $p \times 1$ vector, and c is a scalar, then we have Bartlett's (1951) form of the identity:

$$(9)\quad (\mathbf{A} + c\mathbf{b}\mathbf{b}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{c}{1 + c\mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}$$

Example 2.26. We shall use (9) to compute the inverse of the $p \times p$ matrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a & c & \cdots & c \\ c & a & \cdots & c \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Tomando $A = (a-c)I \quad b' = [1, \ldots, 1]$

$E = b\,b' \rightarrow$ matriz quadrada de 1's.

$$K^{-1} = \frac{1}{a-c} I - \frac{c}{(a-c)[a + c(p-1)]} E \, .$$