O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Seja n um número natural.
O espaço euclidiano n-dimensional é o produto de n fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times}_{n \text{ vezes}} \mathbb{R}$$

Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são todas as n-listas (ou n-uplas)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde cada coordenada $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ então $x = y$ se, e somente se $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$.

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta real

$\mathbb{R}^2$ é o plano ($z \in \mathbb{R}^2$, $z = (x, y)$ par ordenado)

$\mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano ($w \in \mathbb{R}^3$, $w = (x, y, z)$)

Se definimos em $\mathbb{R}^n$ a operação soma $(+)$ e produto por escalar $(\cdot)$ da seguinte forma:
dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$

e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$$

e $\quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$,

temos que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

A dimensão deste espaço é n, com a base canônica $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots,$ $e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$.

O elemento neutro da adição é denotado por $0 = (0,0,\dots,0)$ e o simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é denotado por $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Chamamos os elementos de $\mathbb{R}^n$ de ponto ou de vetor.

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, podemos escrever x em função dos elementos da base canônica

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n .$$

Def.: Uma transformação linear entre dois espaços vetoriais reais U e V é uma função $T: U \to V$ que satisfaz as seguintes propriedades:

dados $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Se considerarmos o conjunto de todas as transformações lineares $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, temos uma bijeção entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e o conjunto das matrizes reais com n linhas e m colunas, denotado por $M_{n \times m}$.

De fato,

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Para entendermos como é a atuação de T em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^m$, basta saber como T atua nos elementos da base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$$

$$T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m) =$$

$$x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_m T(e_m) \quad \in \mathbb{R}^n$$

Se $T(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\bar{e}_i$

$T(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{n2}\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\bar{e}_i$

$\vdots$

$T(e_m) = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}) = a_{1m}\bar{e}_1 + a_{2m}\bar{e}_2 + \dots + a_{nm}\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{im}\bar{e}_i$

Considerando

$$\begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & & T(e_m) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} e_1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1} = (a_{11} \quad a_{21} \quad \cdots \quad a_{n1})$$

que estamos associando a $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\bar{e}_i$

$T(e_1) = A.e_1 \quad , \dots , \quad T(e_m) = A e_m$.

Desta forma, conhecemos o efeito de T na base $\{e_1, \dots, e_m\}$ fazendo o produto de $A\, e_i$, para $i = 1, \dots, m$ (aqui e_i é associado à matriz coluna).

Os valores de cada coluna definem a atuação da aplicação linear na base.

Reciprocamente, se temos uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times m}$ podemos definir a aplicação linear

$$T(x) = x_1 . A e_1 + x_2 . A e_2 + \dots + x_n A e_n$$

$$T(x) = x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \bar{e}_i + x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \bar{e}_i + \dots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{im} \bar{e}_i$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1m}) \bar{e}_1 +$$

$$\vdots$$

$$(x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{1m}) . \bar{e}_n$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1m},$$

$$\vdots$$

$$x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{1m})$$

Também, existe uma bijeção de $M_{n \times m}$ com $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ (colocamos suas colunas, uma após a outra, em linha)

Desta forma, temos

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \approx M_{n \times m} \approx \mathbb{R}^{n \cdot m}$$ (espaço euclidiano nm-dimensional)

Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear, damos o nome de funcional linear.

$f(e_1) = a_1$, $f(e_2) = a_2, \dots, f(e_m) = a_m$.

$x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$,

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m) = x_1 f(e_1) + \dots + x_m f(e_m)$$

$$f(x) = x_1 a_1 + \dots + x_m a_m$$

A matriz associada a f é a matriz $A_{1\times m} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$.

Vamos considerar os seguintes funcionais lineares:

$\pi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\pi_1(e_1) = 1, \quad \pi_1(e_2) = 0, \quad \dots \quad \pi_1(e_m) = 0$

Daí, $\pi_1(x) = x_1$

$\pi_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\pi_2(e_1) = 0, \quad \pi_2(e_2) = 1, \quad \pi_2(e_3) = 0, \dots, \pi_2(e_m) = 0 \qquad (\pi_2(x) = x_2)$

$\vdots$

$\pi_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\pi_m(e_1) = 0, \quad \pi_m(e_2) = 0, \quad \dots, \quad \pi_m(e_{m-1}) = 0, \quad \pi_m(e_m) = 1 \qquad (\pi_m(x) = x_m)$

$\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a i-ésima projeção do produto cartesiano $\mathbb{R}^m$ no fator $\mathbb{R}$. $(\pi_i(x) = x_i)$

$B = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ é uma base para $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^*$ e é chamada de base dual da base canônica do $\mathbb{R}^m$.

Exercício: Mostrar que B é uma base para $(\mathbb{R}^m)^*$.

- Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m) =$$

$$x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_m f(e_m)$$

$$= \pi_1(x) f(e_1) + \pi_2(x) f(e_2) + \dots + \pi_m(x) f(e_m), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\therefore \quad f = f(e_1) . \pi_1 + f(e_2) \pi_2 + \dots + f(e_m) \pi_m$$

ou seja, f é escrito como combinação linear de $\pi_1, \dots, \pi_m$.

- $\{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ é l.i. De fato

$$\alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2 + \dots + \alpha_m \pi_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_2 \pi_2(x) + \dots \alpha_m \pi_m(x) = 0, \quad \forall x$$

Se $x = e_1$, então $\alpha_1 \pi_1(e_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 . 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Se $x = e_i$, então $\alpha_i \pi_i(e_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i . 1 = 0, \ \alpha_i = 0, \ i = 1, \dots, m$.

$$\therefore \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$

Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ chama-se bilinear quando é linear separadamente em cada uma das suas variáveis.

$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

- $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$
- $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ $\qquad x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$
- $\varphi(\alpha x, y) = \alpha \varphi(x, y)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\varphi(x, \alpha y) = \alpha \varphi(x, y)$

Se $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ então

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = x_1 \varphi\left(e_1, \sum_j y_j f_j\right) + x_2 \varphi\left(e_2, \sum y_j f_j\right) +$$

$$x_m \varphi\left(e_m, \sum y_j f_j\right) = x_1 \left[\varphi(e_1, f_1) y_1 + \varphi(e_1, f_2) y_2 + \dots + \varphi(e_1, f_n) y_n\right] +$$

$$x_2 \left[\varphi(e_2, f_1) y_1 + \varphi(e_2, f_2) y_2 + \dots + \varphi(e_2, f_n) y_n\right] +$$

$$+ \dots +$$

$$x_m \left[\varphi(e_m, f_1) y_1 + \varphi(e_m, f_2) y_2 + \dots + \varphi(e_m, f_n) y_n\right] =$$

$$= x_1 y_1 \varphi(e_1, f_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, f_2) + \dots + x_1 y_n \varphi(e_1, f_n) +$$

$$x_2 y_1 \varphi(e_2, f_1) + x_2 y_2 \varphi(e_2, f_2) + \dots + x_2 y_n \varphi(e_2, f_n) +$$

$$+ x_m y_1 \varphi(e_m, f_1) + x_m y_2 \varphi(e_m, f_2) + \dots + x_m y_n \varphi(e_m, f_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, f_j)$$

φ fica determinada pelos $m \cdot n$ valores $\varphi(e_i, e_j) \in \mathbb{R}^p$.

Produto interno

Definição: Um produto interno num espaço vetorial real E é uma regra que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in E$ um número real, indicado por $\langle x, y \rangle$, de tal modo que, para quaisquer $x, x', y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se tenham:

PI 1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

PI 2. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

PI 3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$

PI 4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$

"O produto interno é uma função real, simétrica, bilinear e positiva definida, $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$".

Exemplo:

1) Produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

OBS: Considere $A_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n}$ real, simétrica $(a_{ij} = a_{ji})$ e positiva $(x^t . A . x > 0)$ e defina

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = y^t . A . x$$

Em $\mathbb{R}^3$:

Canônico: $$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Se A é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $(M^t = M^{-1})$ tal que $M^t . A . M = D =$ matriz diagonal

$$A = (M^t)^{-1} . D . M^{-1}$$

$$x^t . A . x = \underbrace{x^t . (M^t)^{-1}} . D . M^{-1} . x = x^t (M^{-1})^{-1} . D . M^t x = x^t . M . D . M^t . x = (M^t . x)^t . D . M^t x$$

$$= (\tilde{x})^t . D . \tilde{x} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

$$\tilde{x} = M^{-1} x = M^t . x$$

Se todos os autovalores forem positivos, A é positiva definida.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 2\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 2\right]$$

$\lambda_1 = 2$

$\Delta = 16 - 8 = 8$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Produto interno:

$$\langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

Exercício:

1) Suponha que A é simétrica e que seus autovalores são estritamente positivos. Mostre que $\langle x, y \rangle_A = x^t \cdot A\, y$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Monte um produto interno, usando essa ideia.