Aula 13 - Equações Diferenciais Estocásticas - EDE

Ardson dos S. Vianna Jr.

Departamento de Engenharia Química - USP

14 de abril de 2021

Equação de calor com ruído

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = u(x,t)^{\gamma}\ \dot{W} \\ u(x,0) = u_0 \\ u(0,t) = u(1,t) \end{cases} \tag{1}$$

sendo γ um parâmetro $\in\ [1/2, 1]$

Equação de de Fokker-Planck

Resulta na evolução temporal da probabilidade P(x,t).

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial [f(x)\ P(x,t)]}{\partial x} + \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

Esta equação está associada à equação de Langevin, portanto, resolvê-la significa resolver a equação de Langevin.

Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Modela o movimento browniano:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -b\,\dfrac{dX}{dt} + \sigma\xi \\ X(0) = X_0, \quad \dfrac{dX}{dt}\Big|_{t=0} = X_1 \end{cases} \tag{3}$$

onde X(t) é a posição da partícula movimento browniano no tempo t, b é o coeficiente de fricção, σ é o coeficiente de difusão e ξ é o ruído branco.

Modelo Black-Sholes

Modela a precificação de derivativos:

$$\begin{cases} dB_t = \ r \ B_t \ dt \\ dS_t = \ \mu \ S_t \ dt \ + \ \sigma \ S_t \ dW_t \end{cases} \tag{4}$$

onde B_n é o ativo sem risco, S_n é o ativo de risco, r á taxa de juros com risco e μ é a taxa de juros sem risco.

Modelo Black-Sholes-Merton

Modela a precificação de derivativos, versão contínua:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r\ s\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r\ u = 0 \tag{5}$$

Estratégia de solução

A sequencia de algoritmos numéricos é a seguinte. Primeiro, a integração é definida pela fórmula de Itô, que integra o processo de Weiner. As etapas a serem seguidas são:

i. resolver o processo de Wiener numericamente: por algoritmo de Marsaglia, apresentado por Kloeden *et al.*[2], que é uma modificação do algoritmo de Box-Muller, mas que não utiliza funções trigonométricas.

ii. resolver a integral determinística por diferenças finitas ou Runge-Kutta

iii. traçar diversas trajetórias de forma a representar adequadamente dados experimentais previamente obtidos

Vamos apresentar aqui algumas EDEs que fazem parte do universo de processos estocásticos.

Softwares

O Maple possui módulos relacionados com EDE, inclusive traça trajetórias amostrais.

i. BrownianMotion(x0, μ, σ)
ii. ItoProcess(x0, μ, σ, x, t)
iii. GeometricBrownianMotion(x0, μ, σ t)
iv. OrnsteinUhlenbeckProcess(x0, μ, Θ, σ)

Conclusões

i. Analise por trajetórias amostrais
ii. Ferramentas do Maple

Bibliografia

- T. Tomé, M.J. de Oliveira, *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*, Edusp, (2001).
- P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*, Springer Verlag, (1991).
- C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, 2nd ed., (1996).
- A.S. Vianna Jr., *Equações Diferenciais*, Blucher, 2021.