Inferência Multivariada

1- Introdução - Álgebra Matricial

1.1- Introdução

A análise estatística multivariada é relativa à análise de dados coletados em várias dimensões, no mesmo indivíduo ou elemento amostral

Ex: Amostra de n alunos, para cada aluno são observadas as notas

X_1: nota de Português

X_2: Nota de Matemática

X_3: nota de Inglês

X_4: Nota de Física

X_5: Nota de Biologia

X_6: Nota de Química

Esse tipo de observação pode ocorrer em inúmeras áreas: Ciências Sociais, Medicina e Ciências Biológicas, Economia, etc.

O fato das medidas serem tomadas no mesmo elemento amostral gera dependência ou correlação entre as variáveis. Esta característica distingue as técnicas da análise multivariada das correspondentes técnicas univariadas.

Principais Procedimentos da Análise Multivariada

1- Redução de ~~dados~~ Variáveis - O fenômeno a ser estudad é representado de uma forma mais simples sem perda de informação.

Ex: Componentes principais: são construídas combinações lineares das variáveis.

Os pesquisadores tendem a medir muitas variáveis em cada indivíduo.

2- Construção de grupos - Grupos de ~~objetos~~ elementos similares são criados com base em alguma medida de similaridade. Análise de Conglomerados

3- Investigação da Dependência entre Variáveis
Análise de Correlação

4- Previsão - Podem ser determinadas relações entre variáveis com o objetivo de prever o valor de uma (ou mais delas) com base nas outras. Regressão

5- Testes de hipóteses - São formuladas hipóteses em termos dos parâmetros da população multivariada que posteriormente são testados.

6- Análise de Medidas Repetidas - quando a variável é medida na mesma unidade amostral em diferentes instantes ou situações experimentais.

n - tamanho da amostra

p - número de variáveis

X_{ij} - medida da j-ésima variável no i-ésimo elemento amostral

X_{ij} - variável aleatória $\quad x_{ij}$ - valor da v.a. X_{ij}

Matriz de Dados

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{variável} \\
X = & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2p} \\ & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np} \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array}
$$

(elemento amostral)

(comum em pacotes)

$$
x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \\ x_{n1} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \\ x_{n2} \end{bmatrix} \cdots \quad x_p = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \\ x_{np} \end{bmatrix}
$$

vetores são sempre colunas

$$[x_{11} \;\; x_{21} \; \cdots \; x_{n1}] = x_1'$$

Com essa notação

$$X = [\, x_1 \;\; x_2 \; \cdots \; x_p \,]$$ ###

1.2- Resultados Matriciais

Vetor - matriz com uma linha ou uma coluna.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \qquad x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{bmatrix}$$

A - matriz $r \times c$

A' - matriz transposta de A, A' - $c \times r$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1c} \\ \\ a_{r1} & \dots & a_{rc} \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{r1} \\ \\ a_{1c} & & a_{rc} \end{bmatrix}$$

matriz quadrada

A é simétrica se $A = A'$. Nesse caso $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os valores de i e j.

A matriz quadrada, $k \times k$. Os elementos a_{ii}, $i = 1, 2 \ldots k$ formam a diagonal principal da matriz. A soma dos elementos da diagonal principal é denominada traço da matriz A,

Notação: $\quad tr\, A = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$

Multiplicação de Vetores e Matrizes

Produto interno

Dados $x' = [x_1, x_2 \ldots x_k]$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$,

o produto interno de x por y é definido como

$$x'y = [x_1 \; x_2 \ldots x_k] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

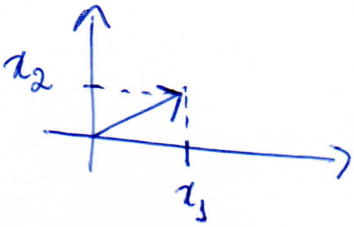
Como $x'y$ é um escalar (nº), $x'y = y'x$.

Além disso, $x'x = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$

Produtos internos têm importantes interpretações geométricas.

Comprimento de um vetor

a) $\mathbb{R}^2$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



Generalizando para p dimensões, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$

Distância entre dois pontos

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$

$$d_{(x,y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2}$$

Comprimento do vetor x:

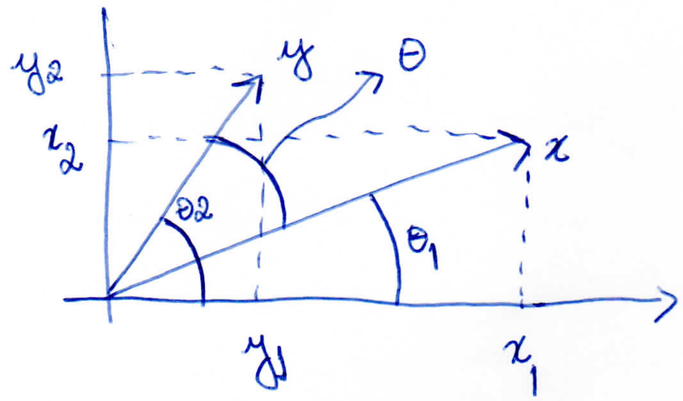
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - 0)^2}$$

$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} = \sqrt{x'x} = L_x$$

b) Ângulo entre dois vetores

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



θ - ângulo entre x e y

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1}{L_x} \qquad \text{sen}\,\theta_1 = \frac{x_2}{L_x}$$

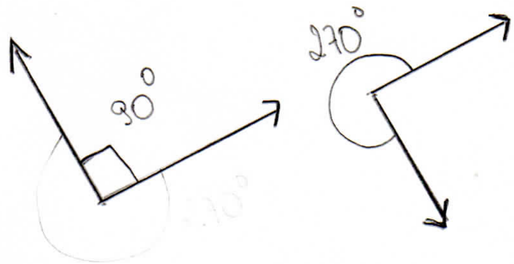
$$\cos\theta_2 = \frac{y_1}{L_y} \qquad \text{sen}\,\theta_2 = \frac{y_2}{L_y}$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\theta_1$$

$$= \frac{y_1}{L_y}\frac{x_1}{L_x} + \frac{y_2}{L_y}\frac{x_2}{L_x} = \frac{x'y}{\sqrt{y'y}\,\sqrt{x'x}}$$

Lembrando $\cos(90^\circ) = \cos(270^\circ) = 0$

$\cos(\theta) = 0 \iff x'y = 0$



Se $x'y = 0$ dizemos que x e y são perpendiculares.

Generalizando para p dimensões

$$\cos\theta = \frac{x'y}{L_x L_y} = \frac{x'y}{\sqrt{x'x}\ \sqrt{y'y}}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

—11—11—

Produto de Matrizes

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}_{p\times m} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Transformação do espaço m-dimensional para o espaço p dimensional através do produto $y = Ax$

c) Projeção Ortogonal

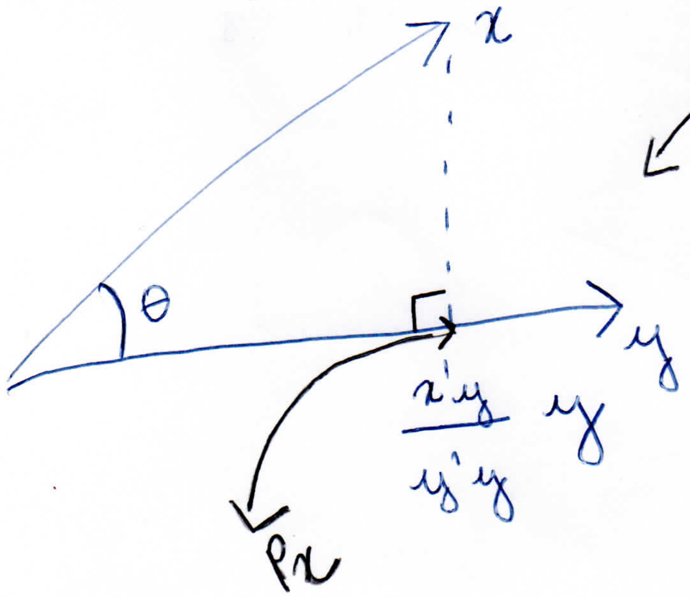
Dados dois vetores x e y, a projeção de x em y é o vetor

$$P_x = \frac{x'y}{y'y}\, y = \frac{x'y}{L_y^2}\, y$$

e o comprimento de P_x é

$$L_{P_x} \underset{1}{=} \frac{|x'y|}{L_y} \underset{\text{imediata}}{\overset{\downarrow}{=}} L_x \left| \frac{x'y}{L_x L_y} \right| \underset{\text{figura}}{\overset{\downarrow}{=}} L_x |\cos(\theta)|$$

θ – ângulo entre x e y



$$\cos\theta = \frac{L_{P_x}}{L_x}$$

$$|\cos\theta| = \frac{L_{p_x}}{L_x} \quad (\text{figura})$$ 8"

Lembrando $\cos\theta = \dfrac{x'y}{L_x L_y}$ (item b)

$$L_{p_x} = L_x |\cos\theta| = L_x \frac{|x' p_x|}{L_x L_{p_x}} = \frac{L_x |x' y k|}{L_x \sqrt{y' k k y}} =$$

tomar $y = p_x$

$$= \frac{|k|\,|x'y|}{|k|\,L_y} = \frac{|x'y|}{L_y} \quad *$$

$p_x = k y$ k escalar

Cálculo de k

$$\boxed{* \quad L_{p_x} = \frac{|x'y|}{L_y}}$$

$$\overbrace{L_{p_x} = \sqrt{k y' y k}}^{**} = \sqrt{k^2 y' y} = |k| \sqrt{y'y} = |k| L_y$$

$$** \Rightarrow \frac{|x'y|}{L_y} = |k| L_y \Rightarrow |k| = \frac{|x'y|}{L_y L_y} \Rightarrow$$

$$p_x = k\, y = \frac{x'y}{L_y^2}\, y = \frac{x'y}{y'y}\, y$$

Matrizes Inversas

i) A inversa da matriz quadrada A é a única matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

$\det A \neq 0 \iff$ existe A^{-1}. Neste caso, A é dita não singular.

$\det A = 0 \Rightarrow$ A é denominada singular.

ii) Cálculo de A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C' \qquad C\text{-matriz de cofatores}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 26 & -12 & 6 \\ -8 & 8 & -4 \\ -37 & 16 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 28$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} 26 & -8 & -37 \\ -12 & 8 & 16 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

iii) Propriedades

a) A inversa de uma matriz simétrica é simétrica.

b) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

c) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

d) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$

e) $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1/a_n \end{bmatrix} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}\right)$

↳ matriz diagonal

Posto de uma matriz

É o maior número de filas linearmente independentes que conseguimos extrair dessa matriz

$A_{c \times k}$

Se $c < k$, o posto será o maior número de linhas LI.
Se $c > k$, " " " " de colunas LI.

k filas são linearmente independentes quando nenhuma delas pode ser obtida como combinação linear das outras.

Resultado

O posto de uma matriz A é a ordem d maior submatriz quadrada de A, não singular, que conseguimos obter

Se A é quadrada, $n \times n$ e não singular, então $\det A \neq 0$ e posto$(A) = n$.

Dizemos então que A é de posto completo.

Def.

$A_{c \times k}$. Se $c < k$, A será de posto completo se

Posto$(A) = c$.