MAP 3122 - Métodos Numéricos e Aplicações (POLI)

Lista de Exercícios sobre splines (interpolação polinomial)

Dizemos que uma função s é um *spline cúbico* num intervalo $[a, b]$ se $s \in C^2([a, b])$. Dizemos que um spline cúbico é *natural* se $s''(a) = s''(b) = 0$.

Exercício 1. *Consideramos a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & \text{se } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. *Determine os valores de a, b, c de modo que a função f seja um spline cúbico.*
2. *Com esses valores de a, b, c, o spline cúbico f é natural?*

Exercício 2. *Seja $s(x)$ um spline cúbico natural que passa pelos pontos $(-1, 1), (0, 0)$ e $(1, 1)$ da função $f(x) = x^2$. Nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$, esse spline tem a forma*

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 & \text{se } x \in [-1,0] \\ s_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3, & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

1. *Determine o valor de a_2.*
2. *Duas pessoas calcularam os valores dos parametros. A primeira pessoa calculou*

   $$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)s & \text{se } x \in [-1,0], \\ s_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3, & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

   enquanto a outra pessoa calculou

   $$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -x & \text{se } x \in [-1,0], \\ s_2(x) = x, & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

   Apenas uma pessoa calculou os valores certos dos parametros. Quem é? Justifique sua resposta (não calcule o spline $s(x)$.)

Exercício 3. *Seja*

$$s(x) = \begin{cases} 28 + 25x + 9x^2 + x^3 & \text{se } x \in [-3,-1] \\ 10x + 21, & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

uma função que passa pelos pontos $(-3, 7), (-1, 11)$ e $(0, 21)$. Mostre que $s(x)$ não é um spline cúbico.

Exercício 4. *Consideramos a função*

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x & \text{if } x \in [-1,0]; \\ a(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{if } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Determine os valores de α, β, a, c, d de modo que $s(x)$ seja um spline cúbico, e satisfaz também $s'(-1) = 0$, $s'(1) = 0$. O spline obtido é um spline natural (justifique)?