FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DOS MATERIAIS E DAS ESTRUTURAS

Apresentação:

Este material foi preparado como suporte à disciplina de pós-graduação Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. Tanto a disciplina quanto o material aqui apresentado têm o objetivo de colocar o aluno da pós-graduação em contato com uma linguagem mais adequada do que aquela apresentada na graduação, para o desenvolvimento científico do comportamento mecânico das estruturas e dos materiais.

Alguns conhecimentos adquiridos na graduação associados a diversas disciplinas como a física, a matemática, a mecânica dos sólidos, a estática das estruturas e a dinâmica, serão revisitados e organizados tendo em vista o entendimento do objeto de estudo.

Este material não dispensa a leitura de outros textos e será mais bem aproveitado quando for lido pelo aluno antes da aula ministrada. Desta forma, as dúvidas levantadas e os exemplos a serem resolvidos em sala de aula poderão ser fortemente enriquecidos.

Muitas soluções dos problemas apresentados foram adaptadas do livro "Teoria da Elasticidade" de Timoshenko e Goodier e certos aspéctos didáticos foram inspirados no livro "Elasticity - Tensor, dyadic, and Engineering Approaches" de Chou & Pagano..

Espero que os alunos aumentem seu interesse pela mecânica das estruturas e estejam preparados para os próximos passos de suas pesquisas.

Boa leitura,

Humberto Breves Coda, janeiro de 2015.

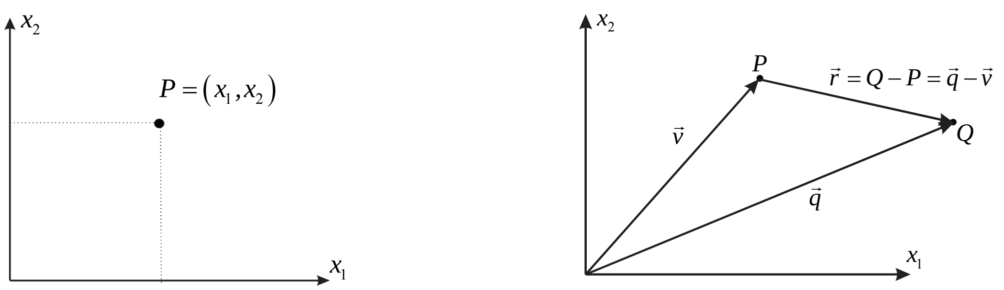
1. Vetores, matrizes e tensores

Os conceitos de escalar, vetores e matrizes são muito explorados nos cursos de graduação. Porém, a definição de tensores não é abordada com a atenção necessária para a continuidade dos estudos em nível de pós-graduação. No que segue algumas definições simples são apresentadas, com maior atenção aos procedimentos operacionais do que aos aspectos teóricos. Será feito uso do sistema de coordenadas cartesianas para se introduzir as definições e operações. Comentários pertinentes serão feitos quando a notação aplicada (ou introduzida) for suficientemente geral para englobar operações em qualquer sistema de referência. Neste curso, em geral, escalares são números reais ou inteiros (quando usados em índices) representados por letras minúsculas (gregas ou não).

Sabe-se que coordenadas de pontos formam um conjunto de 2 números para o espaço bidimensional ou 3 números para o espaço tridimensional, ver figura 1.1a. A representação de um ponto, ou sua posição, é semelhante à representação de vetores, porém nem todas as operações definidas para vetores são válidas para pontos, a menos que se adote uma origem e se defina o vetor posição como sendo a diferença entre a posição do ponto e a origem, conforme figura 1.1b.

Assim, o vetor posição relativa entre dois pontos pode ser definido como a diferença entre as posições de dois pontos, veja figura 1.1b. Neste texto um vetor é representado por uma letra contendo uma seta sobrescrita, como $\vec{v}$, outra representação do vetor, utilizada aqui, é um conjunto de coordenadas dispostas verticalmente. Essas duas representações são usualmente conhecidas dos alunos de graduação, entretanto, uma representação adicional, devida a Einstein, é aqui apresentada. Essa consiste em uma letra (número real – coordenada) com um índice inferior que indica a componente do vetor (ou do ponto), por exemplo:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_i \tag{1.1}$$



(a) Posição (b) Vetores posição e posição relativa

Figura 1.1 – Representação bidimensional de pontos e vetores

Outras grandezas vetoriais são importantes para a mecânica dos materiais e das estruturas como, por exemplo, a força $\vec{F}$ a velocidade $\vec{v}$ ou $\dot{\vec{v}}$ e a aceleração $\ddot{\vec{v}}$ ou $\vec{\dot{v}}$. Algumas operações realizadas com vetores devem ser lembradas.

1.1. Soma:

Para efetuar a adição de dois vetores basta somar suas componentes, por exemplo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = a_i + b_i \qquad (1.2)$$

A última expressão indica que cada componente de $\vec{c}$ é a soma das componentes correspondentes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, exatamente igual à segunda expressão. Ou seja, a notação indicial (muitas vezes chamada apenas de tensorial ou de Einstein) é uma forma compacta de se escrever a notação aberta no sistema cartesiano. Deve-se comentar que a simbologia usada para descrever vetores na forma $\vec{v}$ é chamada notação vetorial ou matricial compacta, mas também pode ser usada na notação tensorial dyadica, a ser introduzida neste texto. A diferença entre as duas está relacionada à maior facilidade de se introduzir tensores e suas operações na notação dyadica do que na notação vetorial.

1.2. Subtração:

Para subtrair dois vetores basta subtrair cada componente, por exemplo:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = a_i - b_i \qquad (1.3)$$

Comenta-se ainda que o produto de um escalar por um vetor é feito multiplicando-se cada componente do vetor pelo escalar. Na expressão (1.3) pode-se definir a subtração como a soma do vetor $\vec{a}$ com o vetor oposto à $\vec{b}$, ou seja $-\vec{b}$, oriundo da multiplicação de $\vec{b}$ pelo escalar (-1).

1.3. Produto interno ou produto escalar.

Este produto entre vetores é usualmente chamado de produto escalar, pois seu resultado é um escalar. Na notação dyadica este produto é chamado de contração simples, pois retira um índice de cada ente (no caso vetor) envolvido na operação quando representado em notação indicial. Assim,

$$\alpha = \vec{v}^{\,t}\vec{g} = (v_1, v_2, v_3)\cdot\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \vec{v}\cdot\vec{g} = v_1.g_1 + v_2.g_2 + v_3.g_3 = v_i g_i = g_i v_i \qquad (1.4)$$

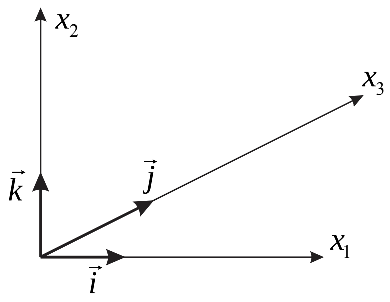
Na expressão (1.4) α é o escalar resultado da operação, a expressão $\vec{v}^{\,t}\vec{g}$ é conhecida da graduação e é aqui classificada como notação matricial ou vetorial, o sinal de transposto pode ser usado ou não e, quando utilizado, a ausência do sinal produto escalar (ponto centralizado na linha) é comum como no conhecido produto matriz vetor. Deve-se comentar ainda que um ponto não no centro da linha, mas na base da linha, continua sendo o sinal de multiplicação entre escalares e também será utilizado quando se desejar multiplicar um vetor por um escalar.

Também é observada na expressão (1.4) a notação matricial expandida, muito conhecida e usada, porém pouco econômica. Já a notação $\vec{v}\cdot\vec{g}$ é definida neste material como notação dyadica e também pode fazer uso do sinal de transposto quando for conveniente. A expressão $v_1.g_1 + v_2.g_2 + v_3.g_3$ é efetivamente a operação realizada e a expressão $v_i g_i$ é a notação indicial onde o índice repetido indica soma.

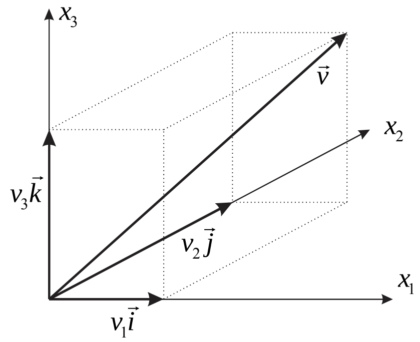
É importante notar que α não possui índice e, portanto, os índices contidos nos vetores $\vec{g}$ e $\vec{v}$ desaparecem na operação. Esse fato é representado na notação diádica pelo ponto ($\cdot$). Uma conclusão direta da notação indicial é a comutatividade do produto escalar, ou seja $v_i g_i = g_i v_i$ que também é identificada na expressão expandida $v_1.g_1 + v_2.g_2 + v_3.g_3 = g_1.v_1 + g_2.v_2 + g_3.v_3$.

1.4. Base

Na figura 1.1 definiu-se posição e vetor posição usando um sistema de coordenadas cartesianas. Em textos de álgebra linear haveria uma discussão sobre bases geradoras do espaço tridimensional baseada em vetores. Assim, é importante definir no sistema cartesiano a base ortonormal. Esta é constituída pelos vetores unitários (versores) $\vec{e}^{\,1}$ (ou $\vec{i}$), $\vec{e}^{\,2}$ (ou $\vec{j}$) e $\vec{e}^{\,3}$ (ou $\vec{k}$) que geram os eixos coordenados, veja figura 1.2.



(a) Base ortonormal



(b) Componentes de um vetor $\vec{v}$

Figura 1.2 – Base ortonormal – Componentes

Cada coordenada de um vetor é um escalar. Se cada escalar (coordenada) é multiplicado pelo versor gerador do correspondente eixo coordenado criam-se três vetores (componentes) cuja soma resulta no vetor original, ou seja:

$$\vec{v} = v_1.\vec{e}^1 + v_2.\vec{e}^2 + v_3.\vec{e}^3 = v_i.\vec{e}^i \tag{1.5}$$

Pensando em coordenadas a expressão (1.5) é facilmente demonstrada. Primeiramente as coordenadas dos versores geradores são

$$\vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Assim:

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Outra conclusão interessante resulta do produto escalar entre um vetor e os versores da base ortonormal,

$$\vec{v} \cdot \vec{e}^1 = v_1 ,\ \vec{v} \cdot \vec{e}^2 = v_2 ,\ \vec{v} \cdot \vec{e}^3 = v_3 \tag{1.8}$$

ou seja, o produto escalar de um vetor pelo versor gerador do espaço resulta na sua coordenada.

Em muitos textos, ao invés de se omitir a base e se trabalhar com as coordenadas dos vetores, mantém-se a base como na expressão (1.5). Na opinião deste autor, este rigor matemático é excessivo e dificulta a operacionalidade da notação indicial.

1.5. Módulo ou Norma Euclidiana de um vetor

Da figura 1.1 pode-se calcular o comprimento ou módulo de um vetor posição relativa como:

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{(x_1^Q - x_1^P)^2 + (x_2^Q - x_2^P)^2 + (x_3^Q - x_3^P)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \sqrt{r_i r_i} = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} \qquad (1.9)$$

Substituindo-se a diferença das coordenadas dos pontos pelas coordenadas do vetor posição relativa, observa-se que o comprimento do vetor posição é a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas coordenadas. Usando notação indicial fica claro que o produto escalar de um vetor por ele mesmo resulta no quadrado de seu módulo, que é finalmente representado em notação dyadica no final da expressão (1.9). Se o vetor não fosse relativo a posições, mas, por exemplo, força, as coordenadas teriam unidade de força e o módulo representa a intensidade desta força.

Assim, dividindo-se um vetor por seu módulo encontra-se o versor que indica a sua direção e sentido.

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} \qquad \text{ou} \qquad \eta_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_k v_k}} \qquad (1.10)$$

O vetor original pode ser escrito pelo produto entre seu módulo e o versor correspondente:

$$\vec{v} = \left|\vec{v}\right| . \vec{\eta} \qquad (1.11)$$

onde o produto de um escalar por um vetor é aqui indicado por um ponto na base da linha.

1.6. Cosseno diretor e outras implicações

Definido o módulo de um vetor, pela figura 1.3 pode-se concluir que as coordenadas do versor que indica sua direção e sentido são os cossenos diretores, ou seja, os cossenos dos ângulos formados pelo vetor e a base ortonormal ou eixos coordenados. Algebricamente chega-se a esta conclusão abrindo-se a expressão (1.10), como:

$$\eta_1 = \frac{v_1}{\left|\vec{v}\right|} = cos(\gamma_1), \; \eta_2 = \frac{v_2}{\left|\vec{v}\right|} = cos(\gamma_2), \; \eta_3 = \frac{v_3}{\left|\vec{v}\right|} = cos(\gamma_3) \text{ ou } \eta_k = \frac{v_k}{\sqrt{v_i v_i}} = cos(\gamma_k) \; (1.12)$$

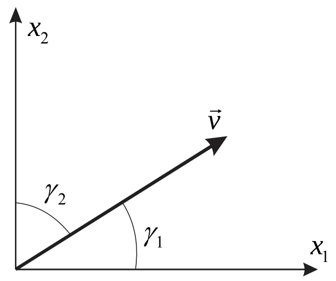


Figura 1.3 – Cossenos diretores – representação bidimensional

Uma implicação importante da definição dos cossenos diretores é que o produto escalar entre um vetor e o versor coordenado pode ser escrito a partir das equações (1.11) e (1.8) como:

$$\vec{v}\cdot\vec{e}^{\,k} = |\vec{v}|.\vec{\eta}\cdot\vec{e}^{\,k} = |\vec{v}|.n_k = |\vec{v}|cos(\gamma_k) \tag{1.13}$$

Se, ao invés de realizar o produto do vetor $\vec{v}$ com um versor da base $\left(\vec{e}^{\,k}\right)$ se escolher realizar o produto de $\vec{v}$ com um vetor $\vec{g} = |\vec{g}|.\vec{e}^{\,k}$ não unitário na direção e sentido de $\vec{e}^{\,k}$, encontra-se:

$$\vec{v}\cdot\vec{g} = \vec{v}\cdot\vec{e}^{\,k}.|\vec{g}| = |\vec{v}||\vec{g}|cos(\gamma_k) \tag{1.14}$$

Como a escolha da posição da base no espaço tridimensional é arbitrária, a fórmula (1.14) é geral, ou seja,

$$\vec{v}\cdot\vec{g} = |\vec{v}||\vec{g}|cos(\gamma) \tag{1.15}$$

e o valor do produto escalar entre os dois vetores pode ser avaliado pelo produto entre seus módulos e o cosseno do ângulo formado entre os dois vetores. Assim, uma forma de se determinar o ângulo formado entre dois vetores quaisquer no espaço pode ser dada por,

$$cos(\gamma) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{g}}{|\vec{v}||\vec{g}|} = \frac{\vec{g}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{g}|} = \frac{g_i v_i}{\sqrt{(v_k v_k)(g_\ell g_\ell)}} \tag{1.16}$$

Além disso, caso um dos vetores seja unitário, a equação (1.15) resulta na projeção do vetor não unitário na direção e sentido do versor adotado.

1.7. Tensores

Para os objetivos deste texto, antes de se definir outras operações com vetores, deve-se esclarecer que escalares, vetores e matrizes são casos particulares de tensores. Para se definir o que é tensor basta dizer que vetor é um tensor de ordem 1 (um), escalar é um tensor de ordem 0 (zero) e matriz é um tensor de ordem 2 (dois). Assim, a ordem de um tensor é definida pelo número de índices que este apresenta na notação indicial. A dimensão do tensor, tal como do vetor ou da matriz, está associada à dimensão do espaço (euclidiano) onde este for definido. Por exemplo, um tensor de ordem 1 e dimensão 4 é um vetor (ordem 1) com quatro componentes (dimensão 4), ou seja, definido em R^4.

As aplicações da mecânica dos materiais e das estruturas são, em sua grande maioria, definidas no R^3, assim, a dimensão dos tensores envolvidos (menos os escalares) é três. Em notação indicial isto indica que os índices variam de 1 até 3. Na notação dyadica ou na notação vetorial, um tensor não é expresso de forma tão simples, pois um tipo de letra diferente deve ser usado para cada ordem de tensor. Neste texto, para as notações dyadica ou vetorial, uma matriz (tensor de ordem 2) será definida por uma letra maiúscula sem seta sobrescrita, já um tensor de ordem 4 será definido por uma letra maiúscula em negrito. Na mecânica dos materiais e das estruturas, em geral, não é necessária a utilização de tensores de ordem 3 ou de ordem superior a 4, caso isto seja necessário, um comentário formal será feito para notação dyadica. Entretanto, tensores de qualquer ordem são facilmente representados na notação indicial, pois, como já comentado, sua ordem é igual ao número de índices. Veja os exemplos abaixo:

$$A \Leftrightarrow a_{ij} \qquad \text{Matriz ou tensor de ordem 2} \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{B} \Leftrightarrow b_{ijk\ell} \qquad \text{Tensor de ordem 4} \tag{1.18}$$

A dimensão destes tensores deve ser definida através de uma escrita do tipo $i,j,k,\ell = 1,3$, neste caso os tensores possuem dimensão 3. Tensores de ordem igual ou superior a 2 podem ter dimensões diferentes em cada índice, mas este fato não é comum na mecânica dos materiais.

1.8. Contração simples

Como comentado anteriormente, o produto escalar é uma contração simples entre dois tensores de ordem 1 (vetores). Porém, os produtos conhecidos como matriz-vetor, matriz-matriz também são contrações simples.

As expressões da tabela 1 possuem o mesmo significado, mas estão escritas em notações diferentes,

Tabela 1 – Algumas contrações simples em diferentes notações

Vetorial ou Matricial	Dyadica	Indicial
$\vec{v} = A\vec{g}$	$\vec{v} = A \cdot \vec{g}$	$v_k = a_{kj} g_j$
$C = AB$	$C = A \cdot B$	$c_{k\ell} = a_{kj} b_{j\ell}$
$\vec{v} = BC\vec{a}$	$\vec{v} = B \cdot C \cdot \vec{a}$	$v_j = b_{jk} c_{k\ell} a_\ell$
$C^t = B^t A^t$	$C^t = B^t \cdot A^t$	$c_{\ell k} = a_{kj} b_{j\ell} = b_{j\ell} a_{kj}$
$C = \vec{a}\boldsymbol{B}\vec{v}$ (incompleto)	$C = \vec{a} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \vec{v}$ (incompleto)	$c_{i\ell} = b_{ijk\ell} v_k a_j = a_j b_{ijk\ell} v_k$

Sugere-se ao leitor que verifique a última expressão da linha 4 da tabela 1 como exercício em notação indicial. Como dica, realize a operação conhecida para uma matriz 2x2 e depois aplique a fórmula indicial para todos os termos.

A operação da última linha da tabela não pode ser representada de forma completa pelas notações matricial ou dyadica, faltando informações com respeito a qual espaço (índice) a contração ocorre.

1.9. Contração dupla (ou superiores)

Aproveitando-se a perfeita adequação da notação indicial à descrição das contrações, define-se contração dupla como a operação tensorial que elimina dois índices dos dois tensores envolvidos. Da mesma forma, quando a contração é tripla, três índices desaparecem e assim sucessivamente. Veja os exemplos apresentados na tabela 2.

Tabela 2 – Algumas contrações duplas e triplas em diferentes notações

Vetorial ou matricial	Dyadica	Indicial
-	$A = \boldsymbol{B} : C$ (incompleto)	$a_{ij} = b_{ijk\ell} c_{k\ell}$
-	$\alpha = A : \boldsymbol{B} : C$ (incompleto)	$\alpha = a_{ij} b_{ijk\ell} c_{k\ell}$
-	$\beta = A : \boldsymbol{B} : C^t$ (incompleto)	$\beta = a_{ij} b_{ijk\ell} c_{\ell k} = a_{ij} b_{ij\ell k} c_{k\ell}$
-	$\vec{v} = \boldsymbol{B} \vdots \mathfrak{M}$ (incompleto)	$v_k = b_{ijk\ell} m_{ij\ell}$
-	$\vec{v} = \mathfrak{M} : A$ (incompleto)	$v_i = m_{ijk} a_{jk}$

Nos exemplos das últimas duas linhas da tabela 2 foi usado um tensor de ordem 3 chamado $\mathcal{M}$ e comentou-se que a operação está incompleta na notação dyadica pois não se pode informar qual o espaço que foi contraído. O mesmo se pode dizer de todas as operações apresentadas que envolvem contração dupla, a menos que para cada operação se informe explicitamente qual espaço contrai com qual espaço. Esta operação está explícita na notação indicial. Em geral, textos que utilizam apenas notação dyadica contam com o bom senso do leitor.

Apesar da notação indicial ser mais completa e dar origem com maior naturalidade às operações tensoriais, ela é limitada à representação em coordenadas cartesianas. Quando outro sistema de coordenadas é utilizado a notação dyadica, mesmo com suas limitações, será adotada.

1.10. Produto tensorial

Novamente, aproveitando-se da notação indicial, o produto tensorial é aquele que mantém o número de índices dos tensores envolvidos na operação, por exemplo:

$$A = \vec{v} \otimes \vec{g} \text{ (dyadica)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{ij} = v_i g_j \text{ (indicial)} \tag{1.19}$$

Matematicamente representa uma operação onde o produto cartesiano entre os espaços, no caso da expressão (1.19), foi realizado, ou seja, a operação possui domínio no R^3 que contém os vetores $\vec{v}$ e $\vec{g}$, e possui imagem em $R^3 \times R^3$ que compõe as nove componentes do tensor de ordem dois para os problemas tridimensionais da mecânica dos materiais e das estruturas.

Em notação matricial pode-se escrever a operação (1.19) como:

$$\vec{v}\,\vec{g}^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 g_1 & v_1 g_2 & v_1 g_3 \\ v_2 g_1 & v_2 g_2 & v_2 g_3 \\ v_3 g_1 & v_3 g_2 & v_3 g_3 \end{bmatrix} = A \tag{1.20}$$

Em geral, a operação produto tensorial aparece de maneira muito natural (e as vezes nem é notada) quando se utiliza notação indicial. Porém, nem sempre o produto tensorial é simples de se perceber em notação dyadica. Ao longo do texto diversas operações estarão presentes onde estas informações ficarão claras.

1.11. Produto vetorial

Como o próprio nome diz, o produto vetorial é aplicado apenas a vetores, ou seja, tensores de ordem um. O resultado do produto vetorial entre dois vetores é um terceiro vetor ortogonal aos vetores originais. Para se definir uma fórmula geral para o produto vetorial é interessante se partir das definições abstratas das propriedades deste produto para os versores geradores das coordenadas cartesianas, ou seja,

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} & \vec{j} \wedge \vec{j} = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \end{array} \quad (1.21)$$

Onde o símbolo $\wedge$ representa produto vetorial e a regra da mão direita é seguida, ou seja, o sistema de coordenadas definido na figura 1.2 é chamado destro-giro.
De forma geral, o produto vetorial entre dois vetores fica escrito como:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{g} \quad (1.22)$$

E, além disso, como definição abstrata adicional da operação, vale a distributiva na soma, ou seja:

$$\vec{v} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{v} \wedge \vec{a} + \vec{v} \wedge \vec{b} \quad (1.23)$$

Escrevendo-se os vetores da operação (1.22) como definidos na expressão (1.5) e usando a notação $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ no lugar de $\vec{e}^{k}$, escreve-se:

$$\vec{w} = \left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right) \wedge \left(g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k}\right) \quad (1.24)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva (1.23) e as definições (1.21) resulta:

$$\vec{w} = \left(v_2 g_3 - v_3 g_2\right)\vec{i} + \left(v_3 g_1 - v_1 g_3\right)\vec{j} + \left(v_1 g_2 - v_2 g_1\right)\vec{k} \quad (1.25)$$

Que é regra para cálculo do produto vetorial entre dois vetores.

Para verificar que o vetor resultante $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{g}$ basta lembrar que a escolha da base no espaço tridimensional é arbitrária e, portanto, pode-se escolher uma base de tal forma que $\vec{v}$ e $\vec{g}$ estejam contidos no plano gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Nesta situação $v_3 = g_3 = 0$ resultando:

$$\vec{w} = \left(v_1 g_2 - v_2 g_1\right)\vec{k} \quad (1.26)$$

Ou seja $\vec{w} \perp \vec{g}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$ tal como estabelecido pela definição de produto vetorial.

É de interesse conhecer o significado geométrico do valor do escalar $\left(v_1 g_2 - v_2 g_1\right)$. Pela figura 1.4 sabe-se que:

$$v_1 = |\vec{v}| cos\,\beta\,,\ v_2 = |\vec{v}| sen\beta\,,\ g_1 = |\vec{g}| cos\,\alpha\,,\ g_2 = |\vec{g}| sen\,\alpha \qquad (1.27)$$

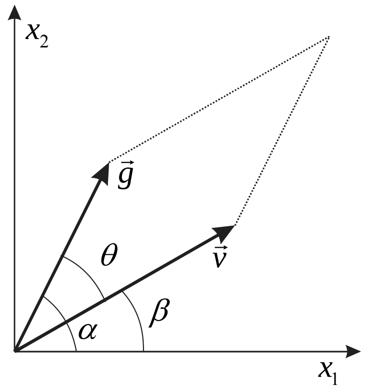


Figura 1.4 – Produto vetorial – vista superior

Que substituído em (1.26) e usando a seguinte propriedade trigonométrica

$$sen\,\theta = \left(cos\,\beta.sen\,\alpha - sen\,\beta.cos\,\alpha\right) \qquad (1.28)$$

resulta:

$$\vec{v} \wedge \vec{g} = |\vec{v}||\vec{g}|\left(sen\,\theta\right).\vec{k} \qquad (1.29)$$

Ou seja, o módulo do produto vetorial entre dois vetores representa a área do paralelogramo formado entre eles, veja figura 1.4. A figura 1.5 também pode ser aproveitada para visualizar o produto vetorial.

1.12. Determinante e produto vetorial

Uma forma muito comum de se apresentar o produto vetorial é utilizando a expressão conhecida de Sarrus para cálculo de determinantes de matrizes (tensores de ordem 2), como:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{g} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left(v_2 g_3 - v_3 g_2\right)\vec{i} + \left(v_3 g_1 - v_1 g_3\right)\vec{j} + \left(v_1 g_2 - v_2 g_1\right)\vec{k} \qquad (1.30)$$

Observando-se a figura 1.5, pretende-se calcular o volume do prisma definido pelos vetores $\left[\vec{v}, \vec{g}, \vec{r}\right]$. Ao se realizar o produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{g}$ encontra-se o vetor $\vec{w}$ ortogonal a estes vetores e com módulo igual à área da base do prisma. Realizando-se o produto escalar $\vec{w} \cdot \vec{r}$ encontra-se o produto da área da base pela altura do prisma (projeção de $\vec{r}$ na direção de $\vec{w}$) e, portanto seu volume. Algebricamente fica:

$$\left(\vec{v} \wedge \vec{g}\right) \cdot \vec{r} = \left(|\vec{v}||\vec{g}| sen\left(\theta\right)\right).|\vec{r}| cos\left(\gamma\right) = A.h = V \qquad (1.31)$$

Onde, nesta expressão, A e V são escalares e correspondem à área da base e ao volume do prisma, respectivamente.

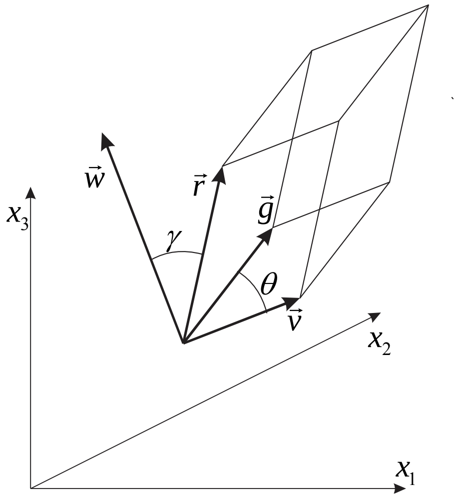


Figura 1.5 – Volume do prisma

Em coordenadas expandidas, a expressão $(\vec{v} \wedge \vec{g}) \cdot \vec{r}$ é escrita como:

$$V = (\vec{v} \wedge \vec{g}) \cdot \vec{r} = (v_2 g_3 - v_3 g_2) r_1 + (v_3 g_1 - v_1 g_3) r_2 + (v_1 g_2 - v_2 g_1) r_3 \tag{1.32}$$

Que significa substituir na expressão do determinante (Sarrus) a base ortonormal $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ pelas componentes do vetor $\vec{r}$, ou seja:

$$V = det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Caso um dos vetores envolvidos na expressão (1.32) ou (1.33) possa ser escrito como composição de outros dois (ou de um só), por exemplo, $\vec{r}$ está contido no plano de $\vec{v}$ e $\vec{g}$, o volume do prisma resulta nulo e, portanto, o determinante da equação (1.33) é zero. Desta forma se diz que os vetores são Linearmente Dependentes (LD) se o determinante da equação (1.33) é nulo, caso contrário são Linearmente Independentes (LI).

1.13. Tensor Delta de Kronecker

A notação indicial é muito importante para os desenvolvimentos desta disciplina, assim a definição do tensor identidade de ordem 2 nesta notação é apresentada. A ele se dá o nome de Delta de Koronecker descrito como:

$\delta_{ij} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad i = j$

$\delta_{ij} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad i \neq j$

ou ainda $\qquad \delta_{ij} = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j}$

Assim, o produto do Delta de Kronecker por um vetor resulta no próprio vetor e por outro tensor de ordem 2 resulta no próprio tensor, como:

$$v_k = \delta_{kj} v_j \qquad \text{e} \qquad a_{ij} = \delta_{ik} a_{kj} \tag{1.34}$$

1.14. Tensor de permutação cíclica de Levi-Cevita.

O tensor de permutação cíclica de Levi-Cevita é um tensor de ordem 3 que permite representar o produto vetorial ou o determinante de um tensor de ordem 2 utilizando-se a notação indicial. Quando seus três índices são diferentes entre si e seguem uma das sequências (1,2,3), (3,1,2) ou (2,3,1) seu valor é +1. Quando seus índices são diferentes entre si e seguem uma das sequências (1,3,2), (2,1,3) ou (3,2,1) seu valor é -1. Caso quaisquer dos índices sejam coincidentes, como por exemplo, em (1,1,2) ou (1,3,1) etc., seu valor é 0.
Assim, o produto vetorial da equação (1.30) fica escrito como:

$$w_k = \xi_{kij} v_i g_j \tag{1.35}$$

E o determinante da matriz indicada na equação (1.33) é dado por:

$$a = \xi_{ijk} v_i g_j r_k \tag{1.36}$$

É interessante observar que as componentes do tensor de Levi-Cevita podem ser calculadas a partir da base ortonormal escrita como $\left[\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}\right]$, da seguinte forma:

$$\xi_{ijk} = \left(\vec{e}^{\,i} \wedge \vec{e}^{\,j}\right) \cdot \vec{e}^{\,k} \tag{1.37}$$

Como treino ao uso da notação indicial sugere-se ao leitor que verifique as equações (1.34) até (1.37).

1.15. Rotação de sistema de referência

Um mesmo tensor pode ser representado em sistemas de eixos coordenados (ou bases ortonormais) diferentes. A diferença entre sistemas de coordenadas cartesianas é apenas a sua orientação no espaço. Em outras palavras, um tensor pode ser 'rotacionado' para que sua representação passe de um sistema para outro.

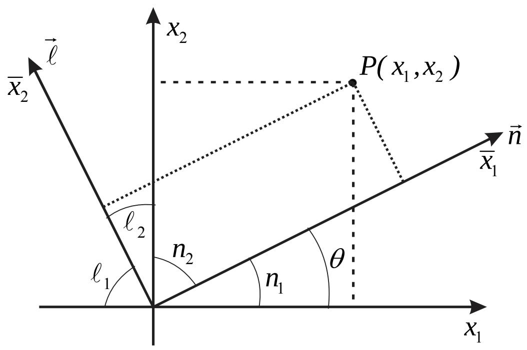


Figura 1.6 – Rotação de eixos coordenados – representação 2D

Na representação bidimensional, veja figura 1.6, o ponto P possui coordenadas $P=(x_1,x_2)$ em um sistema de coordenadas e $P=(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ em outro sistema. O ângulo de rotação θ entre os sistemas, no caso bidimensional, é facilmente verificado. Os cossenos diretores dos versores do sistema inclinado em relação ao sistema inicial são dados por:

$$n_1 = cos\theta,\ n_2 = sen\theta,\ \ell_1 = -sen\theta,\ \ell_2 = cos\theta \tag{1.38}$$

Portanto a relação entre as coordenadas do mesmo ponto é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou inversamente} \quad \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

Alternativamente, considerando o vetor posição e a matriz de rotação em notação dyadica escreve-se:

$$\vec{x} = R \cdot \vec{\overline{x}} \quad \text{ou inversamente} \quad \vec{\overline{x}} = R^t \cdot \vec{x} \tag{1.40}$$

Em notação indicial tem-se:

$$x_i = r_{ij}\overline{x}_j \quad \text{ou inversamente} \quad \overline{x}_i = r_{ji}x_j \tag{1.41}$$

Nas representações dyadica e indicial a operação tridimensional é idêntica à bidimensional, apenas sabendo-se que os índices variam de 1 até 3. O vetor unitário correspondente ao eixo $\overline{x}_3$ será chamado $\vec{m}$ e a matriz rotação fica:

$$R = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

Pode-se estender a operação de rotação para tensores de ordem superior, por exemplo, para tensor de ordem 2 escreve-se a seguinte equação no sistema de coordenadas original.

$$\vec{v} = A \cdot \vec{u} \tag{1.43}$$

Para se escrever esta equação no sistema rotacionado basta substituir os vetores escritos na configuração original pela primeira expressão de rotação (1.40),

$$R \cdot \vec{\bar{v}} = A \cdot R \cdot \vec{\bar{u}} \tag{1.44}$$

Multiplicando-se a equação (1.44) por R^t resulta:

$$R^t \cdot R \cdot \vec{\bar{v}} = R^t \cdot A \cdot R \cdot \vec{\bar{u}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\bar{v}} = \left(R^t \cdot A \cdot R\right) \cdot \vec{\bar{u}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\bar{v}} = \bar{A} \cdot \vec{\bar{u}} \tag{1.45}$$

Ou seja, a expressão que transforma o tensor de ordem 2 do sistema original para o sistema rotacionado é:

$$\bar{A} = R^t \cdot A \cdot R \qquad \text{ou inversamente} \qquad A = R \cdot \bar{A} \cdot R^t \tag{1.46}$$

Indicialmente se escreve:

$$\bar{a}_{ij} = r_{ki}\, a_{k\alpha}\, r_{\alpha j} \qquad \text{ou inversamente} \qquad a_{ij} = r_{ik}\, \bar{a}_{k\alpha}\, r_{j\alpha} \tag{1.47}$$

Uma forma alternativa de se provar a fórmula do giro para tensor de ordem 2 é utilizar a expressão (1.19) para se escrever uma matriz genérica e depois (1.41) nos dois vetores geradores para se escrever a matriz no novo sistema de referência.

Na mecânica dos materiais e das estruturas é importante saber como se procede a rotação de um tensor de ordem 4. Para tanto, escreve-se a seguinte relação entre dois tensores de ordem 2:

$$A = \boldsymbol{G} : B \tag{1.48}$$

Então, aplica-se a segunda das equações (1.46), ou seja:

$$R \cdot \bar{A} \cdot R^t = \boldsymbol{G} : R \cdot \bar{B} \cdot R^t \tag{1.49}$$

Não é possível continuar a operação sem aplicar a notação indicial, pois se perde a sequência de espaços contraídos, ou seja:

$$r_{ik}\, \bar{a}_{k\alpha}\, r_{j\alpha} = g_{ijm\ell} r_{m\beta}\, \bar{b}_{\beta\gamma}\, r_{\ell\gamma} \tag{1.50}$$

Assim, pós-multiplicar a expressão (1.50) por R representará um produto interno do lado esquerdo, mas um produto tensorial do lado direito, ou seja:

$$r_{ik}\, \bar{a}_{k\alpha}\, r_{j\alpha}\, r_{j\eta} = g_{ijm\ell}\, r_{m\beta}\, \bar{b}_{\beta\gamma}\, r_{\ell\gamma}\, r_{j\eta} \qquad \Rightarrow \qquad r_{ik}\, \bar{a}_{k\eta} = g_{ijm\ell}\, r_{m\beta}\, \bar{b}_{\beta\gamma}\, r_{\ell\gamma}\, r_{j\eta} \tag{1.51}$$

Pré-multiplicando-se (1.51) por R^t resulta:

$$r_{i\varepsilon}\, r_{ik}\, \bar{a}_{k\eta} = r_{i\varepsilon}\, g_{ijm\ell} r_{m\beta}\, \bar{b}_{\beta\gamma}\, r_{\ell\gamma}\, r_{j\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a}_{\varepsilon\eta} = r_{i\varepsilon}\, g_{ijm\ell} r_{m\beta}\, \bar{b}_{\beta\gamma}\, r_{\ell\gamma}\, r_{j\eta} \tag{1.52}$$

Rearranjando as posições dos tensores (permitido em notação indicial), resulta:

$$\bar{a}_{\varepsilon\eta} = \left(r_{i\varepsilon}\, r_{j\eta}\, g_{ijm\ell} r_{m\beta}\, r_{\ell\gamma}\right) \bar{b}_{\beta\gamma} = \bar{g}_{\varepsilon\eta\beta\gamma}\, b_{\beta\gamma} \qquad \text{ou} \qquad \bar{g}_{\varepsilon\eta\beta\gamma} = r_{i\varepsilon}\, r_{j\eta}\, g_{ijm\ell} r_{m\beta}\, r_{\ell\gamma} \tag{1.53}$$

Recuperando-se a notação dyadica escreve-se:

$$\bar{A} = \bar{\boldsymbol{G}} : \bar{B} \qquad \text{com} \qquad \bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{R}^t : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{R} \tag{1.54}$$

Com o tensor de giro de quarta ordem dado por:

$$\boldsymbol{R} = R \otimes R \qquad \text{ou em notação indicial} \qquad r_{m\beta\ell\gamma} = r_{m\beta}\, r_{\ell\gamma} \tag{1.55}$$

Como se pode observar, a expressão (1.53) possui mais informações do que a (1.54).

Para finalizar, o tensor identidade de quarta ordem deve transformar, por contração dupla, um tensor de segunda ordem nele mesmo, assim,

$$t_{ij} = t_{\alpha\beta} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} t_{\alpha\beta} \qquad \text{ou em notação dyadica} \qquad T = T : \boldsymbol{II} = \boldsymbol{II} : T \tag{1.56}$$

1.16. Comentários adicionais sobre notação indicial

Quando índices repetidos estão presentes em uma expressão, mas um deles está entre parêntesis, a soma não se aplica, por exemplo:

$$a_{i(i)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

ou seja, o vetor $a_{i(i)}$ representa os temos da diagonal do tensor A de ordem 2.

Outro caso de interesse é quando o índice entre parêntesis acompanha uma soma definida:

$$b_{ii(i)} = b_{111} + b_{222} + b_{333} \tag{1.59}$$

Finalmente, é convencionado não se utilizar os mesmos índices para representar somas diferentes em uma mesma expressão, por exemplo:

$$y_i = \phi_\ell Y_{\ell i} + G_m Y_{mi} \qquad \text{é melhor que} \qquad y_i = \phi_\ell Y_{\ell i} + G_\ell Y_{\ell i} \tag{1.60}$$

2. Cálculo diferencial e diversas notações

O cálculo diferencial é largamente utilizado nos desenvolvimentos da mecânica dos materiais e das estruturas, principalmente no que diz respeito à determinação das equações diferenciais de equilíbrio e na definição das diversas medidas de deformação. Assim, é importante que se definam as operações diferenciais nas notações mais usuais da literatura, de forma que o pesquisador esteja apto a entender os principais trabalhos científicos relacionados ao tema investigado. Deve-se esclarecer que este texto possui maior preocupação com a parte operacional das definições do que com a precisão e rigor matemático das mesmas.

2.1. Função ou campo escalar

Neste item será abordado o caso particular de funções escalares recordando definições importantes do cálculo diferencial em várias variáveis. No item seguinte estes conceitos serão estendidos para as chamadas funções tensoriais.

2.1.1. Definições básicas

Por exemplo, a distribuição de temperatura f em um corpo é um campo escalar, ou seja, é uma função de $R^3 \rightarrow R$ cujo domínio representa o corpo e a imagem a temperatura.

$$f : R^3 \rightarrow R \tag{2.1}$$

É comum se representar o campo escalar como:

$$f = f(x_1, x_2, x_3) \tag{2.2}$$

quando o domínio é bidimensional escreve-se:

$$f = f(x_1, x_2) \tag{2.3}$$

Uma vantagem em se explicar o campo escalar para um domínio bidimensional é a possibilidade de se realizar uma representação gráfica, veja a figura 2.1. Muitas vezes os estudantes têm dificuldade em entender que não é necessária a existência da representação gráfica para que as conclusões extraídas daí sejam válidas para qualquer dimensão de domínio e imagem.

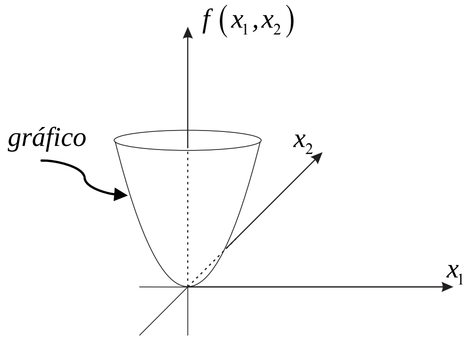


Figura 2.1 – Representação gráfica de função escalar

2.1.2. Derivadas parciais - Gradiente

De forma simplista, define-se derivada parcial na direção de x_1 como o limite da variação de $f(x_1,x_2)$ com relação à x_1 mantendo x_2 constante, ou seja:

$$f_{,1}(x_1,x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\left(\frac{f((x_1+\Delta x_1),x_2) - f(x_1,x_2)}{\Delta x_1}\right) \tag{2.4}$$

A primeira parte da equação (2.4) $f_{,1}$ introduz a notação indicial para derivadas parciais. Uma vírgula seguida de um índice i (por exemplo) indica derivada parcial em relação à x_i. A segunda notação é muito conhecida dos alunos de pós-graduação. A terceira expressão, a definição em si, mostra o detalhe de que a direção em que se mede a variação de f é a direção de x_1, ou seja, na mesma direção do versor gerador $\vec{i}$. Pode-se representar o vetor derivada direcional como:

$$\vec{v}_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} \tag{2.5}$$

representado no plano (x_1,x_2) que indica direção, sentido e intensidade da derivada parcial. A derivada parcial segundo x_1 poderia ser definida como a derivada direcional de f na direção do vetor $\vec{i}$.

Quando derivada parcial é na direção x_2 tem-se igualmente:

$$f_{,2}(x_1,x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \lim_{\Delta x_2 \to 0}\left(\frac{f(x_1,(x_2+\Delta x_2)) - f(x_1,x_2)}{\Delta x_2}\right) \tag{2.6}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{j} \tag{2.7}$$

Assim, pode-se construir um tensor de ordem 1 (vetor) chamado gradiente do escalar f como:

$$Grad(\ f\ ) = \overrightarrow{\nabla f} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f \ / \ \partial x_1 \\ \partial f \ / \ \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{pmatrix} = f_{,i} \tag{2.8}$$

onde se utilizaram todas as notações definidas no capítulo 1. Neste ponto é importante destacar que a operação que define o gradiente de uma função (escalar ou não) aumenta um índice na expressão e, portanto, no caso de função escalar, seu gradiente é um vetor (ou tensor de ordem 1).

2.1.3. Derivadas direcionais

Aplica-se a regra da cadeia para se calcular a derivada de f na direção de $\overline{x}_1$ (gerado por $\vec{n}$), veja figura 1.6, como:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_1} = v_1\, n_1 + v_2\, n_2 = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{n} \tag{2.9}$$

onde se usou a primeira expressão de (1.39) para se avaliar $\partial x_i \ / \ \partial \overline{x}_j$.

Assim, a derivada direcional pode ser calculada simplesmente pelo produto escalar entre o gradiente de f e o tensor de ordem 1 $\vec{n}$ (versor) que define a direção e sentido da derivada.

Utilizando-se a equação (2.9) em sua forma final, conclui-se, à luz da equação (1.15), que a direção de maior variação de f é a própria direção do gradiente de f. Ou seja, o gradiente de uma função indica a direção e sentido de sua maior variação em um determinado ponto. Da mesma forma, a direção de variação nula da função segue a direção ortogonal ao gradiente, ou seja, o gradiente de f é ortogonal à sua curva de nível. Deve-se lembrar que, tanto o gradiente quanto a curva de nível de f estão contidos no espaço gerador do domínio da f, ou seja, em uma função escalar de $R^2 \to R$ tanto o gradiente quanto a curva de nível estão contidas em R^2.

Exemplo

Neste exemplo pretende-se ilustrar aquilo que foi descrito nos itens anteriores. Seja a função escalar de $R^2 \to R$:

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \tag{2.10}$$

Seu gradiente, também função de (x_1, x_2), é dado por:

$$\overrightarrow{\nabla f} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

A expressão de uma curva de nível genérica para a função em questão é:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \tag{2.12}$$

ou seja, é uma circunferência de raio R.

Obviamente que para este exemplo as curvas de nível são circulares e os versores ortogonais a estas são dados pelos raios (as próprias coordenadas dos pontos sobre a curva) divididos por seus módulos, ou seja.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Da mesma forma, o gradiente da função f pode ser escrito em função do raio e do ângulo θ como:

$$\overrightarrow{\nabla f} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 2R\begin{pmatrix} cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

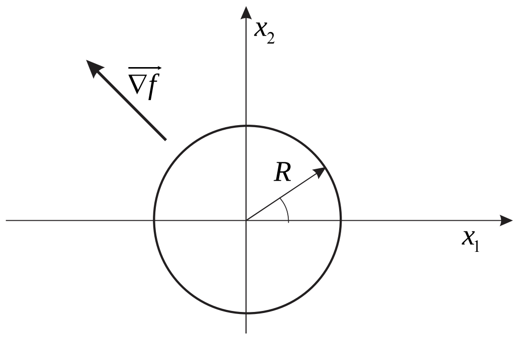


Figura 2.2 – Curva de nível e gradiente genéricos

Na figura 2.2 ilustram-se uma curva de nível e um vetor gradiente genéricos. Comparando-se (2.13) e (2.14), ou observando-se a figura 2.2, conclui-se que o gradiente de f realmente é ortogonal à curva de nível e sua intensidade vale $2R$.

Caso o domínio da função potencial esteja contido no R^3 não é possível fazer um gráfico para a função, mas suas curvas de nível serão superfícies no espaço tridimensional (domínio) e seu gradiente será ortogonal a esta superfície. Para espaços de dimensão superior não é possível se representar gráfico ou superfície de nível, porém o gradiente existe e indica a direção de maior crescimento da função. Derivadas direcionais são dadas pelo produto escalar (contração) entre o gradiente e a direção (tensor unitário) que se deseje avaliar a variação da função.

2.1.4. Giro do tensor gradiente

Se, ao invés de se calcular a derivada direcional na direção $\vec{n}$, conforme a expressão (2.9), se quiser calcular a derivada na direção de $\vec{\ell}$ (ou $\overline{x}_2$), a partir da figura 1.6 tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}_2}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_2}=v_1\,\ell_1+v_2\,\ell_2=\overrightarrow{\nabla f}\cdot\vec{\ell} \qquad (2.15)$$

ou seja, o gradiente da função f avaliado no sistema de eixos $\left(\vec{x}_1,\overline{x}_2\right)$ é dado como:

$$\begin{pmatrix}\partial f/\partial \overline{x}_1\\ \partial f/\partial \overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}n_1 & n_2\\ \ell_1 & \ell_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial f/\partial x_1\\ \partial f/\partial x_2\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{\overrightarrow{\nabla f}}}=R^t\cdot\overrightarrow{\nabla f} \qquad (2.16)$$

Desta forma conclui-se que o gradiente de uma função escalar opera como vetor. A inversa da equação (2.16) é escrita como:

$$\begin{pmatrix}\partial f/\partial x_1\\ \partial f/\partial x_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial f/\partial \overline{x}_1\\ \partial f/\partial \overline{x}_2\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\nabla f}=R\cdot\overline{\overline{\overrightarrow{\nabla f}}} \qquad (2.17)$$

A notação indicial também se aplica (observe a barra sobre os índices), ou seja:

$$f_{,\overline{i}}=r_{ji}\,f_{,j} \qquad \text{ou inversamente} \qquad f_{,i}=r_{ij}\,f_{,\overline{j}} \qquad (2.18)$$

2.2. Funções vetoriais e tensorias

Na seção anterior foram abordados alguns aspectos necessários para se trabalhar com as funções escalares. Nesta seção aqueles conceitos serão estendidos para se trabalhar com funções tensoriais de ordem 1 (vetoriais) ou de ordem qualquer (tensoriais).

2.2.1. Definições básicas

Por exemplo, a distribuição de deslocamentos $\vec{u}$ no espaço tridimensional, para um corpo também tridimensional, é uma função de $R^3\to R^3$ cujo domínio representa o corpo e a imagem a distribuição de deslocamentos.

$$\vec{u}:R^3 \;\to\; R^3 \qquad (2.19)$$

É comum se representar a função vetorial como:

$$\vec{u}=\vec{u}(x_1,x_2,x_3) \qquad \text{ou, indicialmente,} \qquad u_i=u_i\left(x_j\right) \quad \text{para} \quad i,j=1,2,3 \qquad (2.20)$$

quando o domínio é bidimensional basta saber que $i,j=1,2$

Neste caso é impossível fazer uma figura que represente o gráfico da função completa. Poderia se fazer o gráfico para cada componente de deslocamento caso o domínio (corpo) fosse bidimensional. Porém, tal gráfico não traria grandes informações. Assim, a partir de agora, os cálculos e definições são naturalmente aceitos por provas matemáticas (as quais não são objetos desse curso) ou evidências físicas. De qualquer forma, as definições e operações importantes são semelhantes e possuem significado análogo àquelas definidas para funções escalares.

2.2.2. Derivadas parciais – Gradiente – funções vetoriais

A derivada parcial de uma função vetorial é realizada pela aplicação da derivada parcial em cada uma de suas componentes, assim:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} \tag{2.21}$$

é a derivada parcial da primeira componente da função vetorial $\vec{u}\left(x_1,x_2,x_3\right)$ em relação à coordenada x_1. Esta operação pode ser repetida para cada componente de $\vec{u}$ (u_i) e para cada coordenada x_j.

Assim, da mesma forma que se organizou o gradiente da função escalar, equação (2.8) pode-se organizar o gradiente da função vetorial, ou seja:

$$Grad\left(\vec{u}\left(x_1,x_2,x_3\right)\right) = u_{i,j}\left(x_1,x_2,x_3\right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(x_1,x_2,x_3\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Na opinião deste autor, a melhor notação para se entender a construção do $Grad\left(\vec{u}\right)$ é a notação indicial $u_{i,j}$. A menos da vírgula, que é a operação derivada parcial, é claro que $u_{i,j}$ representa um tensor de ordem 2 (matriz) com linhas indicadas pelas componentes do vetor original $\vec{u}$ e colunas definidas pela direção de cada derivada parcial. Além disso, deve-se mencionar que a operação gradiente aumentou um índice na grandeza original de vetor para tensor de ordem 2, tal como comentado após a equação (2.8).

Pensando, por exemplo, na primeira linha do gradiente indicado na equação (2.22) como sendo o gradiente da função escalar u_1 e nas demais linhas como os gradientes das funções escalares u_2 e u_3 as definições que seguem são completamente análogas à feitas para função escalar. Comenta-se ainda que, para não fugir à maioria dos trabalhos contidos na bibliografia, utilizou-se a representação vertical do gradiente da função escalar (vetor coluna), pois não há mudança na expressão da derivada direcional (produto escalar do gradiente pela direção desejada) em notação vetorial. Teria sido mais consistente ter definido o gradiente da função escalar em uma linha, assim as linhas do tensor $Grad(\vec{u})$ seriam naturalmente o gradiente de cada componente de $\vec{u}$, como o são. Entretanto, isso não é necessário para se construir expressões simples e consistentes nos desenvolvimentos futuros.

2.2.3. Derivadas direcionais

Considerando os comentários realizados no item anterior, a derivada direcional de uma função vetorial na direção de um versor $\vec{n}$ qualquer é dada em notação indicial por:

$$u_{i,\vec{n}} = u_{i,j} n_j \tag{2.23}$$

ou seja, é a contração simples (ou produto interno) do tensor gradiente com a direção desejada. Em notação dyadica tem-se:

$$\vec{g} = Grad(\vec{u}) \cdot \vec{n} \tag{2.24}$$

Por exemplo, caso a direção que se pretenda calcular a derivada seja a direção $\vec{i}$ (geradora do eixo x_1) aplicando-se (2.23) ou (2.24) encontra-se:

$$Grad(\vec{u}) \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 \\ \partial u_2 / \partial x_1 \\ \partial u_3 / \partial x_1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

ou seja, recupera-se a derivada parcial de $\vec{u}$ na direção x_1. O mesmo vale para as demais direções.

2.2.4. Giro do tensor gradiente

Para relacionar o tensor gradiente (no caso de ordem 1) calculado no sistema de referência (x_1, x_2, x_3) com o mesmo gradiente calculado no sistema $(\vec{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ deve-se lembrar da formula de rotação de um vetor, equações de (1.39) até (1.42), ou seja, vale:

$$\vec{u} = R \cdot \vec{\overline{u}} \qquad \text{ou} \qquad u_i = r_{ij} \overline{u}_j \tag{2.26}$$

Em notação indicial $\bar{u}_j$ indica que a coordenada j segue o sistema de coordenadas $\left(\bar{\ }\right)$. Apenas na equação (2.18) fez-se uso da notação $\bar{j}$ como índice, pois não havia como se definir o escalar f em sistemas de coordenadas diferentes. Para facilitar a próxima passagem utiliza-se em (2.26) notação redundante, ou seja, chama-se $\bar{u}_j$ de $\bar{u}_{\bar{j}}$ para não se esquecer em qual sistema de coordenadas está se realizando a derivada parcial.

Assim derivando-se a expressão (2.26) em relação à ℓ no sistema de coordenadas original e lembrando-se que a matriz de rotação é constante, se escreve:

$$u_{i,\ell} = r_{ij}\bar{u}_{\bar{j},\ell} \tag{2.27}$$

Aplicando-se para cada componente $\bar{u}_{\bar{j},\ell}$ a expressão (2.18), tem-se

$$u_{i,\ell} = r_{ij}\bar{u}_{\bar{j},\ell} = r_{ij}\bar{u}_{\bar{j},\bar{k}}r_{\ell\bar{k}} \tag{2.28}$$

Finalmente, eliminando-se a notação redundante (barra sobrescrita nos índices) escreve-se:

$$u_{i,\ell} = r_{ij}\bar{u}_{j,k}r_{\ell k} \qquad \text{ou} \qquad Grad\left(\vec{u}\right) = R \cdot Grad\left(\bar{\vec{u}}\right) \cdot R^t \tag{2.29}$$

ou, inversamente

$$\bar{u}_{i,\ell} = r_{ji}u_{j,k}r_{k\ell} \qquad \text{ou} \qquad Grad\left(\bar{\vec{u}}\right) = R^t \cdot Grad\left(\vec{u}\right) \cdot R \tag{2.30}$$

Comparando-se as expressões (2.29) e (2.30) com as equações contidas em (1.46) conclui-se que o giro do gradiente de uma função vetorial é operado como o giro de um tensor de ordem 2, ou seja, o gradiente de uma função vetorial é realmente um tensor de ordem 2.

2.2.5. Operador derivada parcial

Em muitos trabalhos da literatura define-se o operador derivada parcial, que nada mais é do que um vetor onde as derivadas parciais nas direções do domínio da função estão dispostas verticalmente (vetor coluna), como:

$$Grad\left(\bullet\right) = \vec{\nabla}\left(\bullet\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\bullet\right)_{,1} \\ \left(\bullet\right)_{,2} \\ \left(\bullet\right)_{,3} \end{pmatrix} = \left(\bullet\right)_{,i} \tag{2.31}$$

onde o símbolo $\left(\bullet\right)$ representa que a função sobre a qual se deseja operar (aplicar as derivadas) será colocada no lugar do ponto.

Assim, o gradiente de f escalar é dado diretamente por:

$$Grad(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(f)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial(f)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial(f)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f)_{,1} \\ (f)_{,2} \\ (f)_{,3} \end{pmatrix} = (f)_{,i} = f_{,i} \tag{2.32}$$

Já o gradiente de uma $\vec{f}$ vetorial é dado pelo produto tensorial entre $\vec{f}$ e o operador derivada parcial, como:

$$Grad\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \otimes \nabla(\bullet) \tag{2.33}$$

que em notação indicial é muito mais óbvio:

$$f_{i,j} = (f_i)_{,j} = f_i(\bullet)_{,j} = (\bullet)_{,j}\, f_i \tag{2.34}$$

ou seja, como definido anteriormente, a operação derivada parcial indica a coluna do gradiente da função vetorial.

2.2.6. Generalização

A generalização da aplicação das derivadas parciais e a sua consequente geração de gradientes para tensores de ordem superior são muito simples quando utilizamos notação indicial. Por exemplo, seja o tensor A de ordem 2 com notação indicial $a_{\ell m}$ e dimensão dos espaços correspondentes aos seus índices igual à R^3, ou seja $\ell, m = 1,2,3$. Seja também seu domínio descrito no R^3 e base ortonormal, então:

$$Grad(A) = a_{\ell m,n} \qquad \text{com} \qquad n = 1,2,3 \tag{2.35}$$

Assim, o gradiente de um tensor de ordem 2 é um tensor de ordem 3 e uma derivada direcional do tensor original pode ser encontrada pela contração simples do tensor gradiente e a direção segundo a qual se deseja avaliar a derivada, como resultado tem-se, obviamente, um tensor de ordem 2, como:

$$\partial a_{\ell m} / \partial \vec{\varpi} = a_{\ell m,\alpha} \varpi_\alpha \tag{2.36}$$

A partir da equação (2.36) é possível se determinar a expressão de giro para o tensor de ordem 3. Caso o gradiente seja um tensor de ordem 4 sua expressão de giro segue a equação (1.53) ou (1.54).

Outra generalização importante para a mecânica dos materiais é a definição da matriz Hessiana de uma função potencial (ou tensor Hessiano de ordem 2). A matriz Hessiana, em notação indicial é simplesmente escrita como a segunda derivada da função potencial, ou seja:

$$h_{ij} = f_{,ij} \tag{2.37}$$

De forma aberta,essa expressão se torna:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.38}$$

A matriz Hessiana é realmente um tensor de ordem 2 e a fórmula de sua rotação é a mesma da equação (1.46). Observa-se ainda que a matriz Hessiana é simétrica pela comutatividade das derivadas parciais (Teorema de Shuwartz).

2.2.7. Divergente

No cálculo integral existe o chamado Teorema da Divergência (de Gauss ou Green), que define a relação entre as integrais de determinadas operações tensoriais no domínio de um corpo com operações no seu contorno. Na mecânica dos materiais e das estruturas este teorema é utilizado no equilíbrio global de um corpo, no balanço de quantidade de movimento do corpo e no balanço de energia. A operação tensorial realizada no domínio é chamada de divergente de uma função tensorial com ordem 1 ou maior. Além disso, será visto que a equação de equilíbrio local em um corpo contínuo coincide com o divergente do tensor de tensões.

O divergente é facilmente definido em notação indicial. Por exemplo, o divergente de uma função vetorial fica:

$$Div\left(\vec{f}\right) = f_{i,i} = f_{1,1} + f_{2,2} + f_{3,3} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{2.39}$$

Em notação dyadica o divergente resulta de uma operação similar ao produto escalar entre o operador derivada parcial e a função vetorial sobre a qual se quer operar o divergente, ou seja:

$$Div\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla}(\bullet) \cdot \vec{f} = \vec{f} . \vec{\nabla}(\bullet) \tag{2.40}$$

O divergente de um tensor de ordem dois é dado por:

$Div(\Sigma) = \sigma_{ij,j}$ ou em notação dyadica $Div(\Sigma) = \Sigma \cdot \vec{\nabla}(\bullet)$ (2.41)

É interessante mostrar o divergente do tensor de ordem 2 transposto, ou seja:

$Div(\Sigma^t) = \sigma_{ji,j}$ ou em notação dyadica $Div(\Sigma^t) = \vec{\nabla}(\bullet) \cdot \Sigma$ (2.42)

Deve-se observar que o resultado da operação divergente reduz uma dimensão do tensor sobre o qual este é aplicado. Por exemplo, na equação (2.41) o índice mudo j some.

2.2.8. Rotacional

O rotacional é usualmente aplicado em funções vetoriais (tensor de ordem 1) e não pode ser estendido para espaços com dimensão maior do que 3. Por analogia à definição de divergente que se confunde com o produto escalar entre o operador derivada e a função vetorial, o rotacional é definido como o produto vetorial entre a função vetorial e o operador derivada parcial, ou seja:

$$\vec{w} = Rot\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \wedge \vec{\nabla}(\bullet) \tag{2.43}$$

que em notação indicial fica:

$$w_k = \xi_{kij} v_{i,j} \tag{2.44}$$

Seu significado é mais importante para a mecânica dos fluidos do que para a mecânica dos sólidos. O rotacional é definido a partir de relações entre integrais de superfície com integrais de linha. Neste curso não utilizaremos a definição de rotacional em nossas deduções.

2.2.9. Diferencial de uma função tensorial

Sempre é interessante recordar a diferença entre derivada e diferencial. Para uma função de $R \to R$ a derivada pode ser entendida como a inclinação da reta tangente que passa pelo ponto onde a derivada foi avaliada, ou seja, a derivada mede a proporção ou razão instantânea entre uma variação da imagem em relação à variação do domínio, veja a figura 2.3. Em termos matemáticos isso se traduz por:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \alpha_0 \tag{2.45}$$

onde x_0 indica o ponto onde a derivada foi avaliada. Muitas vezes, quando a função é continuamente diferenciável, se omite x_0

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \alpha\left(x\right) \tag{2.46}$$

Por outro lado, o diferencial indica quanto a imagem varia quando uma variação infinitesimal é aplicada sobre a variável do domínio, ou seja:

$$df\big|_{x_0} = \alpha_0\, dx = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} dx \tag{2.47}$$

Em algumas situações df ao invés de ser chamado de diferencial de f é chamado de variação de f. Observa-se que α_0 é o coeficiente angular da reta tangente que passa pelo ponto x_0 onde se avaliou a derivada.

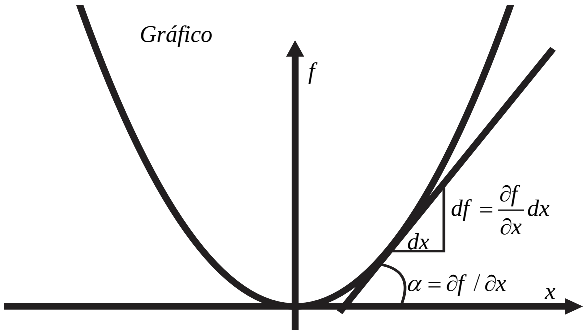


Figura 2.3 – Derivada e diferencial

Quando o domínio deixa de ser escalar o diferencial de uma função passa a depender de todas as dimensões do espaço onde o domínio é definido. Por exemplo, para uma função escalar $f : R^3 \to R$ o diferencial passa a ser definido como:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = f_{,i} dx_i = Grad\left(f\right) \cdot d\vec{x} = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} \tag{2.48}$$

onde se omitiu a coordenada onde se avaliou o gradiente. Observando-se a equação (2.48), o diferencial é avaliado pelo o produto escalar entre o gradiente de f e o vetor das variações infinitesimais que ocorrem nos eixos coordenados do domínio. No caso desta função escalar, cada componente do gradiente de f corresponde a uma das constantes que definem a inclinação do plano tangente ao gráfico de f.

Outra forma de se entender o diferencial é aplicando-o à avaliação de uma função na vizinhança de um ponto. Por exemplo, imagine que se conhece o valor da função vetorial $\vec{f} : R^3 \to R^3$ no ponto $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ e que se pretende avaliar seu valor em uma posição $\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) + \left(dx_1, dx_2, dx_3\right)$, então se escreve:

$$\vec{f}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \vec{f}\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) + Grad\left(\vec{f}\right) \cdot d\vec{x} \tag{2.49}$$

Passando-se $\vec{f}\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ para o lado esquerdo da equação retorna:

$$d\vec{f} = Grad\left(\vec{f}\right) \cdot d\vec{x} \tag{2.50}$$

ou em notação indicial:

$$df_i = f_{i,j} dx_j \tag{2.51}$$

A conhecida expansão em série de Taylor é baseada na expressão (2.49).

3. Força de superfície e Tensão de Cauchy

3.1. Introdução

Nos capítulos iniciais apresentaram-se as notações indicial, dyadica e de engenharia (abertas) a serem utilizadas ao longo do texto. Neste capítulo, e nos seguintes, pressupõe-se que o estudante possua os conceitos iniciais associados aos cursos de *Resistência dos Materiais* ou *Mecânica dos Sólidos*.

Cabe informar ao leitor que a maior parte do texto está relacionada ao comportamento elástico linear dos corpos deformáveis. Quando a elasticidade é assumida linear entende-se que a relação entre as tensões e deformações é linear e, além disso, espera-se que o corpo desenvolva pequenas rotações e pequenos deslocamentos. Neste contexto, a configuração de equilíbrio do corpo se confunde com a configuração indeformada e muitos dos conceitos podem ser introduzidos de forma intuitiva. Nesta condição, aceita-se que as deformações desenvolvidas são pequenas e muitos autores as chamam de deformações infinitesimais.

Entretanto, em algumas partes do texto serão definidas medidas de deformação completas (objetivas) que serão particularizadas para as pequenas deformações. Outras medidas de tensão, associadas a estas medidas de deformação, serão também introduzidas, indicando ao estudante caminhos para se aprofundar na elasticidade não linear, caso sua linha de pesquisa assim requeira.

O tensor de tensões de Cauchy, apresentado neste capítulo, é definido na configuração deslocada do sólido. Apesar deste aspecto não ser mencionado nos cursos de graduação, deve-se sempre ter isso em mente quando se desejar trabalhar com elasticidade não linear.

3.2. Força de superfície:

Antes de se iniciar a definição operacional da força de superfície, deve-se deixar claro que, devido à Terceira Lei de Newton (A toda ação há sempre uma ação oposta em igual intensidade), forças aplicadas sobre sólidos ou estruturas na realidade são sempre forças de contato entre corpos (ou força de campo, como gravidade e eletromagnetismo). Como nossos estudos são baseados na mecânica do contínuo e, portanto, não há corpos sem dimensão (área, volume ou comprimento nulos), as chamadas forças concentradas (e momentos) são abstrações matemáticas que servem para auxiliar na determinação de algumas soluções de problemas mecânicos.

Desta forma, fica claro que forças concentradas, representadas por vetores, são na realidade *equivalentes mecânicos* de forças distribuídas nas superfícies ou no domínio de corpos (sólidos deformáveis). Essas representações (forças e momentos concentrados) continuarão sendo usadas quando forem adequadas ao problema estudado.

Na figura 3.1 ilustra-se uma viga sustentando um saco de cimento. O saco de cimento é atraído pela Terra impondo uma força distribuída na viga, que por sua vez impõe uma força distribuída no saco impedindo sua aproximação à superfície da Terra. A viga é um sólido deformável e a força de superfície ilustrada possui intensidade e sentido.

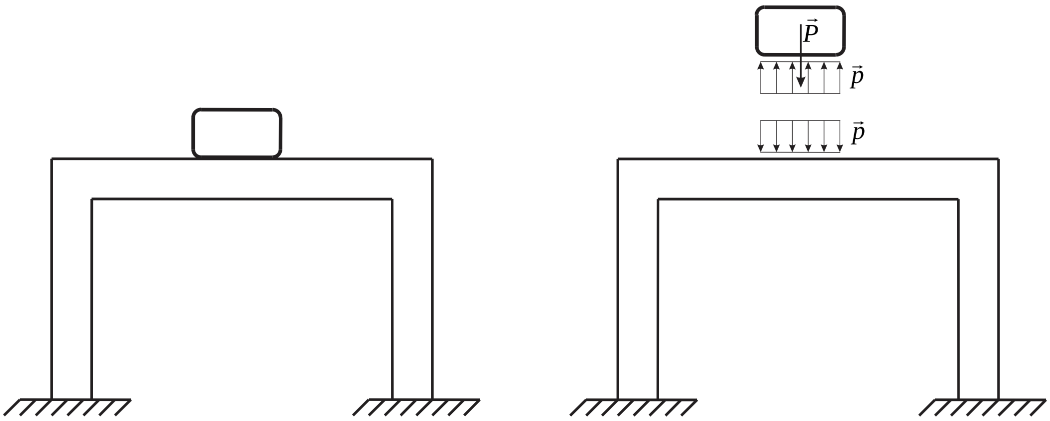


Figura 3.1 – (a) Situação real, (b) Representação esquemática

Para generalizar toma-se um corpo com forma qualquer, sujeito a um conjunto de forças de superfície, conforme ilustrado na figura 3.2. Em uma análise estática, a resultante de todas as forças aplicadas sobre o corpo deve resultar nula (Primeira Lei de Newton).

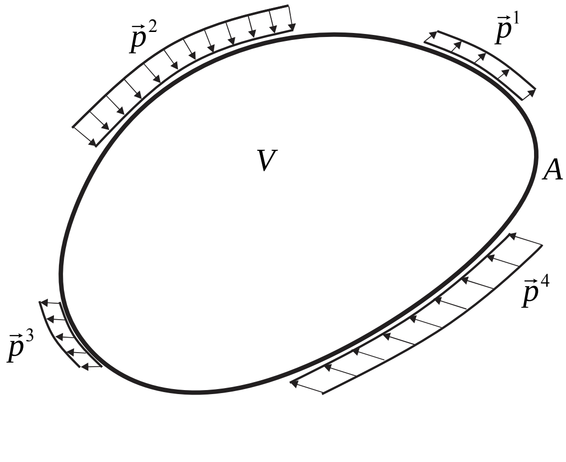
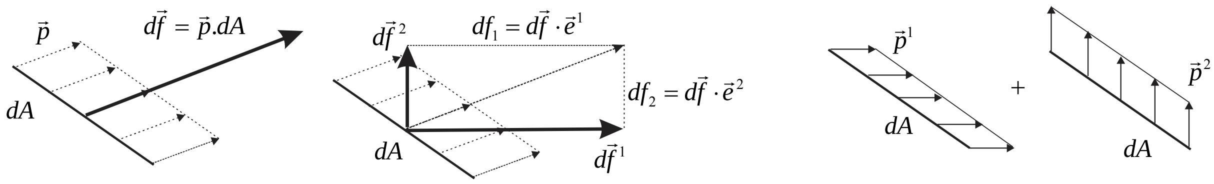


Figura 3.2 – Corpo genérico sob ação de diversas forças de superfície auto equilibradas

Destacando-se um infinitésimo de área qualquer da superfície pode-se definir um equivalente mecânico $d\vec{f}$ infinitesimal de força dado pela força de superfície $\vec{p}$ multiplicada pela área infinitesimal dA. Este equivalente mecânico é representado por um vetor, veja uma ilustração bidimensional na figura 3.3a, e pode ser decomposto em componentes segundo os eixos coordenados, conforme indica a figura 3.3b.



(a) Força equivalente (b) Componentes das forças (c) Componentes das forças de superfície

Figura 3.3 – Forças de superfície

As componentes da força infinitesimal são obviamente dadas pelas componentes da força de superfície multiplicadas pela área infinitesimal, veja figura 3.3c, conforme:

$$d\vec{f} = \vec{p}\,dA \qquad (3.1)$$

com

$$d\vec{f}^{1} = d\vec{f} \cdot \vec{e}^{1} = d\vec{f} \cdot \vec{i}\ , \quad d\vec{f}^{2} = d\vec{f} \cdot \vec{e}^{2} = d\vec{f} \cdot \vec{j} \qquad \text{e} \qquad d\vec{f}^{3} = d\vec{f} \cdot \vec{e}^{3} = d\vec{f} \cdot \vec{k} \qquad (3.2)$$

ou, aproveitando notação indicial , se escreve em forma de coordenadas ao invés de componentes:

$$df_i = p_i\,dA \qquad (3.3)$$

Assim, a força de superfície $\vec{p}$ opera como vetor e pode ser chamada vetor força de superfície. Para simplificar sua representação sobre uma superfície infinitesimal (ponto), sua representação será em forma de vetor ao invés de distribuída.

3.3. Tensão de Cauchy

O ente tensão quantifica, de forma contínua, a interação entre as partículas que constituem um sólido sujeito às ações externas. A resistência ao afastamento ou à aproximação de planos paralelos (ou superfícies paralelas) do contínuo é quantificada pela grandeza *componente de tensão normal*, enquanto a resistência ao deslizamento relativo entre planos paralelos (ou superfícies paralelas) é quantificada pela *componente de tensão de cisalhamento*.

Nos cursos de mecânica dos sólidos da graduação, estratégias mais ou menos simples foram apresentadas e aplicadas para o cálculo dessas componentes de tensão para os mais diversos problemas. A resistência do material é mais bem verificada para uma composição das componentes de tensão e não para componentes isoladas. A composição de todas as componentes de tensão em um ponto é chamada de estado de tensão.

3.3.1. Definição geral de estado de tensão em um ponto:

Imagine um corpo qualquer sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas aplicadas conforme a figura 3.4a. Fazendo-se um corte imaginário, separando o corpo em duas partes, surge por ação e reação uma distribuição de forças por unidade de superfície ($\vec{t}$) esboçada qualitativamente na figura 3.4b. Esta força por unidade de superfície não é normal nem tangencial à superfície de corte e, portanto, é chamada simplesmente de tensão (ou vetor tensão).

Comparando-se o vetor tensão como o vetor força de superfície, a única diferença entre eles é o fato de um ser interno ao corpo (atuando sobre um plano fictício) e o outro estar aplicado sobre o contorno do corpo, uma superfície real.

Extraindo-se um infinitésimo de área da superfície do corte, figura 3.4c, pode-se deduzir que a intensidade e a direção da força representada dependem do corte realizado. Além disso, pode-se indicar um infinitésimo de força pela expressão:

$$d\vec{F} = \vec{t}\, dA \qquad (3.4)$$

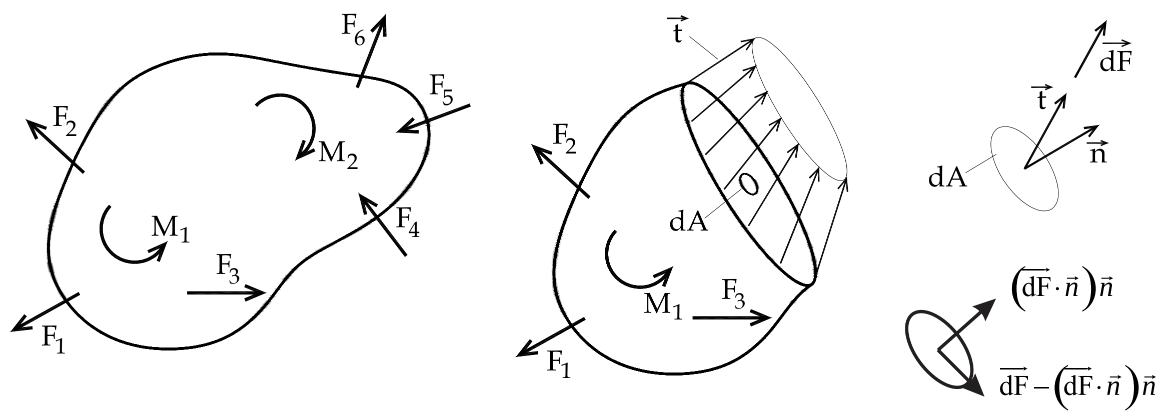


Figura 3.4– (a) Corpo em equilíbrio, (b) corte genérico, (c) infinitésimo de área

Se quisermos calcular a componente de força ortogonal ao infinitésimo de área basta fazer o produto escalar entre $d\vec{f}$ e $\vec{n}$. A componente tangencial é a diferença entre $d\vec{f}$ e a componente normal $d\vec{f} \cdot \vec{n}$, veja a figura 3.4c.

Para melhor se organizar as ideias e os procedimentos de cálculo, imagina-se que, ao invés de se fazer um único corte no corpo, realizam-se seis cortes, paralelos dois a dois, com distâncias nulas entre si e ortogonais aos eixos coordenados. Desta forma, separa-se do corpo um volume elementar em equilíbrio, conforme a figura 3.5a, onde existem planos de entrada (-) e de saída (+) que recebem os nomes dos eixos coordenados a eles ortogonais. Sobre as faces do volume elementar indicam-se os respectivos vetores de tensão, veja a figura 3.5a, colocando o índice que indica o plano em que este atua. Como os planos de entrada e saída na realidade representam o mesmo plano nos corpos "separados", por ação e reação sabe-se que as tensões em um plano de entrada possuem o mesmo valor das tensões em um plano de saída, porém sentido contrário.

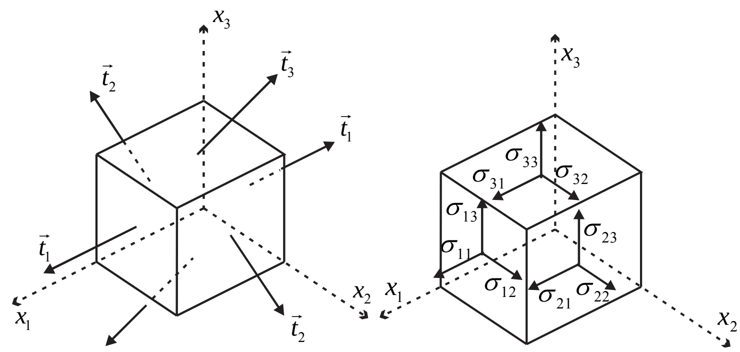


Figura 3.5 – (a) Vetores tensões sobre planos ortogonais, (b) Componentes de tensão e convenção de sinais.

Sem considerar os sentidos dos vetores $\vec{t}$ desenhados na figura 3.5a, pois estes foram simplesmente arbitrados, decompõem-se os vetores de tensão que atuam sobre cada face do volume elementar em componentes cartesianas, conforme a figura 3.5b, resultando nas chamadas componentes de tensão.

As componentes possuem dois índices, o primeiro referente ao plano onde atuam e o segundo indicando sua direção. A convenção de sinal fica definida como: Para os planos de saída (+) o sentido das componentes de tensão positivas coincide com o sentido dos eixos coordenados, tal como desenhado. Para os planos de entrada (-) as componentes positivas são contrárias aos sentidos dos eixos coordenados. Aqui se deve lembrar que, como a ação e reação é satisfeita, as componentes de tensão em faces opostas possuem o mesmo valor (e sinal) e são representadas em sentidos opostos.

As componentes de tensão são usualmente denominadas pela letra grega sigma (σ) ao invés de se utilizar a letra (t) que foi empregada para denominar o vetor de tensão.

É muito importante mencionar que as componentes ortogonais aos planos são chamadas simplesmente de tensões normais e sua convenção de sinal coincide com a estabelecida nos cursos de mecânica dos sólidos da graduação, ou seja, são positivas quando indicam tração e negativas na compressão. Além disso, as componentes que seguem direção tangencial ao plano de atuação são chamadas simplesmente de tensões de cisalhamento e sua convenção de sinal coincide com a convenção de força cortante estabelecida para barras gerais. É usual utilizar-se a letra grega tal (τ) para denominar a componente de cisalhamento, porém, em nosso curso, para se aproveitar as facilidades da notação indicial isto não será, em geral, feito.

Do exposto, ao invés de se organizar o ente tensão na forma vetorial, escolhe-se a organização na forma tensorial, ou seja:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \qquad (3.5)$$

Na expressão (3.5) as duas últimas notações são as preferidas e coincidem com aquelas utilizadas nos capítulos referentes à definição de notações matemáticas.

Estando o volume elementar da figura 3.5 em equilíbrio, pode-se calcular o equilíbrio de momentos, por exemplo, em torno do eixo x_3. Para tanto, visualiza-se a face x_1x_2 (ou o plano x_3) do volume elementar, conforme a figura 3.6, e deixam-se presentes apenas os infinitésimos de força que causam momento em torno do eixo x_3. Observe que os infinitésimos de força são resultado do produto entre a componente de tensão e sua área de atuação.

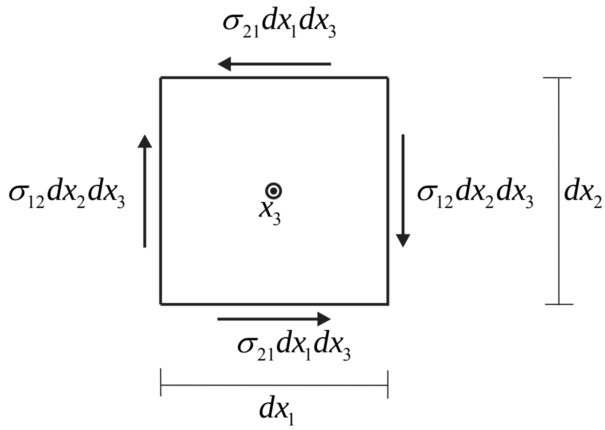


Figura 3.6 – Análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3

Realizando o equilíbrio tem-se:

$$(\sigma_{12}dx_2.dx_3).dx_1 = (\sigma_{21}dx_1.dx_3).dx_2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{3.6}$$

Donde, repetindo-se o procedimento para as outras faces, resultam expressões usualmente chamadas de Teorema de Cauchy, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \sigma^t \tag{3.7}$$

Assim, o tensor de tensões é simétrico e, portanto, têm-se apenas 6 componentes de tensão independentes, que explicitadas ficam.

$$\sigma = \sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.8}$$

Imagine que ao invés de se extrair o volume elementar da figura 3.5 retire-se do contínuo um volume tetraédrico conforme indicado na figura 3.7. Os planos que delimitam o tetraedro representado são três planos coordenados de entrada (-) e um plano inclinado cujo vetor normal (de saída) é $\vec{n}$. O vetor de tensões representado neste plano é $\vec{t}_n$ onde a letra *n* indica o plano. Deve-se observar que a área do plano *n* foi denominada dA, enquanto as áreas correspondentes aos planos coordenados são as suas projeções, ou seja:

Projeção no plano x_1 ou (x_2x_3) $\qquad n_1 \cdot dA$

Projeção no plano x_2 ou (x_1x_3) $\qquad n_2 \cdot dA$

Projeção no plano x_3 ou (x_1x_2) $\qquad n_3 \cdot dA$

Onde os índices correspondem às componentes do vetor normal unitário.

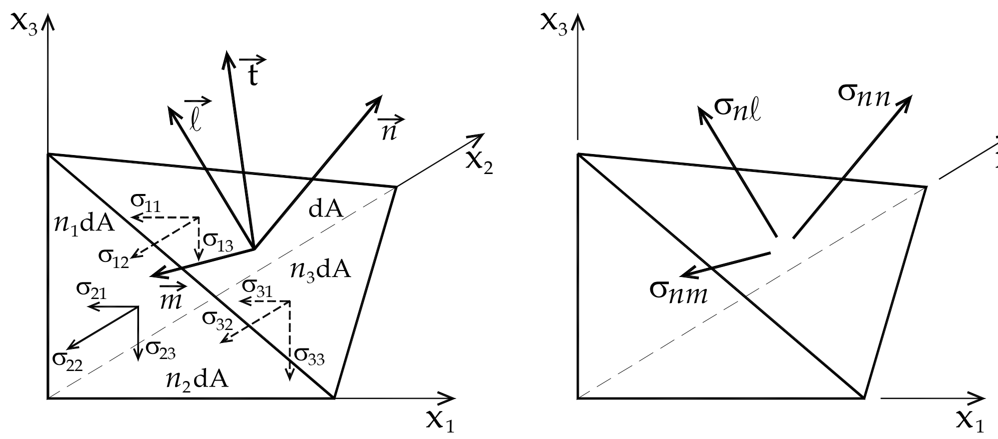


Figura 3.7 – Tetraedro elementar

Conhecendo-se os valores das áreas pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção coordenada, por exemplo, na direção 3,

$$\Sigma F_{x_3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 \cdot dA = \sigma_{13} \cdot n_1 \cdot dA + \sigma_{23} \cdot n_2 \cdot dA + \sigma_{33} \cdot n_3 \cdot dA \qquad \text{ou}$$

$$t_3 = \sigma_{13} \cdot n_1 + \sigma_{23} \cdot n_2 + \sigma_{33} \cdot n_3 \tag{3.9}$$

Analogamente, nas outras direções, tem-se:

$$t_2 = \sigma_{12} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 + \sigma_{32} \cdot n_3 \tag{3.10}$$

$$t_1 = \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 + \sigma_{31} \cdot n_3 \tag{3.11}$$

Obviamente que estas expressões podem ser compactadas em uma única utilizando-se a notação indicial:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \tag{3.12}$$

onde a última igualdade se deve à simetria do tensor de tensões. Ou em forma dyadica:

$$\vec{t} = \sigma^t \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} \tag{3.13}$$

Levando-se em consideração a simetria do tensor de tensões, esta expressão pode ser escrita de forma explícita, como:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Cauchy. Se o plano inclinado é uma superfície externa do corpo o vetor de tensão passa a ser entendido como força de superfície e as expressões (3.12), (3.13) ou (3.14) passam a relacionar o estado de tensão no ponto com as forças de superfície:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \qquad \text{ou} \qquad \vec{p} = \sigma^t \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} \tag{3.15}$$

Na figura 3.7 foram indicados versores (arbitrários) $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ sobre o plano inclinado seguindo a regra $\vec{\ell}\, x\, \vec{m} = \vec{n}$. Para se calcular as componentes de tensão na direção de cada um desses versores basta realizar os produtos internos $\sigma_{n\ell} = \vec{t} \cdot \vec{\ell}$, $\sigma_{nm} = \vec{t} \cdot \vec{m}$ e $\sigma_{nn} = \vec{t} \cdot \vec{n}$, ou seja:

$$\sigma_{nn} = n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 + n_3 \cdot t_3 \tag{3.16}$$

$$\sigma_{n\ell} = \ell_1 \cdot t_1 + \ell_2 \cdot t_2 + \ell_3 \cdot t_3 \tag{3.17}$$

$$\sigma_{nm} = m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + m_3 \cdot t_3 \tag{3.18}$$

Aplicando-se as equações (3.16) até (3.18) sobre (3.13), sem considerar a simetria da tensão, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{n\ell} \\ \sigma_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Observando-se que os versores $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ também podem representar planos ortogonais ao plano definido por $\vec{n}$, repetindo-se os procedimentos anteriores chega-se a fórmula:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{\ell n} & \sigma_{mn} \\ \sigma_{n\ell} & \sigma_{\ell\ell} & \sigma_{m\ell} \\ \sigma_{nm} & \sigma_{\ell m} & \sigma_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Esta expressão indica que um estado de tensão único pode ter valores numéricos diferentes de suas componentes conforme a orientação do sistema de eixos escolhido. Da mesma forma, a partir do estado de tensão escrito em um sistema de referência ortogonal pode-se encontrar seu correspondente em outro sistema ortogonal rotacionado. Fisicamente pode-se entender que, para um mesmo estado de tensão, os números que o representa podem ser diferentes conforme a orientação do plano de corte escolhido para a análise ou da orientação do volume elementar retirado do contínuo.

Lembrando-se que os versores $\vec{n}$, $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ formam uma base ortonormal no espaço euclidiano, veja capítulo 1, e que se organizou a tensão com o plano definindo na linha e a direção definindo a coluna, em notação dyadica a equação (3.20) fica

$$\bar{\sigma}^t = R^t \cdot \sigma^t \cdot R \qquad \text{ou} \qquad \sigma^t = R \cdot \bar{\sigma}^t \cdot R^t \tag{3.21a}$$

Ou, sem utilizar a simetria do tensor, transpondo toda a equação fica:

$$\bar{\sigma} = R^t \cdot \sigma \cdot R \qquad \text{ou} \qquad \sigma = R \cdot \bar{\sigma} \cdot R^t \tag{3.21b}$$

Onde a barra superior indica a tensão escrita no sistema de referência rotacionado $\left(\vec{\ell},\vec{m},\vec{n}\right)$ ou a tensão observada em um volume elementar cujos versores que geram suas faces são $\left(\vec{\ell},\vec{m},\vec{n}\right)$. Em notação indicial fica:

$\bar{\sigma}_{ij} = r_{ki}\,\sigma_{k\alpha}\,r_{\alpha j}$ ou inversamente $\sigma_{ij} = r_{ik}\,\bar{\sigma}_{k\alpha}\,r_{j\alpha}$

(3.22)

Observa-se, portanto, que o tensor de tensões é realmente um ***tensor***, pois opera como tal e, portanto, possui auto-valores e auto-vetores que representam, respectivamente, as tensões principais (máximas) e as direções principais.

3.3.2. Tensões principais

Aproveitando-se os conceitos apresentados nos cursos de graduação (tanto de resistência dos materiais quanto de álgebra linear), sabe-se que as máximas tensões normais são os auto-valores do tensor de tensões e, portanto, ocorrem em planos onde as tensões de cisalhamento são nulas. Assim, existe uma orientação no espaço para o elemento infinitesimal de sólido para a qual o tensor de tensões fica diagonal, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^{p} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ell\ell}^{p} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mm}^{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^{p} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix}^{p} \qquad (3.23)$$

Esta equação pode ser dividida para cada uma das direções principais, como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^{p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^{p} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^{p} = R^{t} \cdot \sigma \cdot \vec{n} \qquad (3.24)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{\ell\ell}^{p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^{p} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix}^{p} \qquad (3.25)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{mm}^{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^{p} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}^{p} \qquad (3.26)$$

que são totalmente equivalentes, bastando alterar a posição da linha da matriz de rotação e a posição da tensão principal calculada. Escolhendo-se o plano $\vec{n}$ para se realizar os cálculos, chamando-se σ_{nn}^{p} simplesmente de σ^{p} e pré multiplicando-se a equação (3.24) por R, se escreve:

$$\begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma^p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \sigma \cdot \vec{n} \tag{3.27}$$

e, operando-se o lado esquerdo, resulta:

$$\sigma^p.\vec{n} = \sigma^p \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \sigma \cdot \vec{n} \tag{3.28}$$

onde em $\sigma^p.\vec{n}$ o ponto na base da linha indica produto entre o escalar σ^p e tensor de ordem 1 $\vec{n}$, veja equação (1.11).

ou

$$\sigma \cdot \vec{n} = \sigma^p.\vec{n} \tag{3.29}$$

que é um problema padrão de auto-valor/auto-vetor onde σ^p (escalar) é o auto-valor e $\vec{n}$ é o auto-vetor. Pelo exposto após a equação (3.26) os outros dois problemas de auto-valor/auto-vetor resultantes são idênticos ao expresso em (3.29). Na sequênca mostra-se que existem três auto-valores e três auto-vetores independentes para a equação (3.29) e, portanto, o problema é integralmente determinado.

Para resolver o problema expresso em (3.28) ou (3.29) escreve-se:

$$\sigma^p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p \tag{3.30}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \left(\sigma_{11} - \sigma^p\right) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \left(\sigma_{22} - \sigma^p\right) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \left(\sigma_{33} - \sigma^p\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \qquad A \cdot \vec{n}^p = \vec{0} \tag{3.31}$$

Define-se a equação característica de (3.31) como:

$$Det(A) = 0 \tag{3.32}$$

Desenvolvendo-se o determinante a equação (3.32) resulta:

$$\left(\sigma^p\right)^3 - I_1\left(\sigma^p\right)^2 + I_2\sigma^p - I_3 = 0 \qquad (3.33)$$

onde

$$I_1 = \sigma_{ii}\,,\ I_2 = \begin{vmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{13}\\ \sigma_{31} & \sigma_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{vmatrix} \text{ e } I_3 = Det\left(\sigma\right) \qquad (3.34)$$

Como as tensões principais não podem ser dependentes do sistema de coordenadas adotado para se solucionar determinado problema físico, chamam-se as constantes I_1, I_2 e I_3 (escalares apesar da letra maiúscula) de invariantes de tensão. Isto significa que a equação (3.34) é única. Não se deve esquecer que as tensões principais também são invariantes de tensão, pois independem do sistema de coordenadas adotado.

O fato do tensor de tensões ser simétrico garante a existência de três raízes reais para a equação característica, que podem ser calculadas por procedimentos numéricos (Jacobi por exemplo) utilizados em calculadoras ou de forma fechada pelas expressões de Cardan transcritas abaixo,.

$$R = \frac{1}{2}\left(-\frac{I_1 I_2}{3} + I_3 + \frac{2I_1^3}{27}\right) \qquad (3.35a)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{I_1^2}{3} - I_2\right)^3 - R^2} \qquad (3.35b)$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + Q^2} \qquad (3.35c)$$

$$\theta = arctg\left(Q/R\right) \qquad \begin{cases} R > 0 & \Rightarrow 0 < \theta < \pi/2 \\ R < 0 & \Rightarrow \pi/2 < \theta < \pi \end{cases} \qquad (3.35d)$$

$$\sigma_1^p = 2\sqrt[3]{\rho}\,cos\left(\theta/3\right) + \frac{I_1}{3} \qquad (3.35e)$$

$$\sigma_2^p = 2\sqrt[3]{\rho}\,cos\left(\left(2\pi - \theta\right)/3\right) + \frac{I_1}{3} \qquad (3.35f)$$

$$\sigma_3^p = 2\sqrt[3]{\rho}\,cos\left(\left(2\pi + \theta\right)/3\right) + \frac{I_1}{3} \qquad (3.35g)$$

Como $Det(A) = 0$, veja equação (3.32), o sistema de equações resultante é indeterminado para a busca do auto-vetor correspondente. Isto significa que quando se calcula um auto-vetor encontra-se uma direção e qualquer múltiplo deste auto-vetor também é auto-vetor da equação (inclusive com mudança de sentido). Assim, cada auto-vetor será normalizado e será chamado de auto-versor. O auto-versor indica a direção e sentido do plano onde a tensão principal correspondente atua e seu oposto indica o plano oposto onde a mesma tensão atua, ou seja, conceito similar ao conceito de planos de entrada e saída.

Por exemplo, usando σ_1^p na equação (3.30) calcula-se $\vec{v}^{\,p1}$ (colocado no lugar de $\vec{n}^{\,p1}$ por não ser normalizado) como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}^{p1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

Arbitrando-se $v_1 = 1$ (poderia ter sido outra componente) escreve-se:

$$a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3 = -a_{i1} \qquad (3.37)$$

Tomando-se, por exemplo, as duas primeiras linhas deste sistema indeterminado, calculam-se v_2 e v_3, normaliza-se o resultado chegando à:

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \qquad (3.38)$$

Procede-se da mesma forma para os outros auto-valores determinando-se todos os auto-versores. Deve-se comentar que a escolha $v_1 = 1$ pode ser errada, pois v_1 pode ser nulo. Neste caso, não se consegue resolver (3.37) e deve-se arbitrar outra componente (v_2 ou v_3) com valor unitário. Observa-se que neste caso um dos outros auto-versores será $\vec{n}^t = (1{,}0{,}0)$, pois este deve ser ortogonal ao auto-vetor com componentes do tipo $(0, v_2, v_3)$. Para os outros auto-valores vale a mesma explicação.

Comenta-se ainda que as colunas da matriz de rotação R^p da equação (3.23) são os auto-versores calculados desde que organizados em uma sequência destro giro, ou seja $\vec{n}^1 \wedge \vec{n}^2 = \vec{n}^3$.

3.3.3. Máxima tensão de cisalhamento

Para se determinar os planos de máxima tensão de cisalhamento e, consequentemente, os valores das máximas tensões de cisalhamento é interessante tomar como sistema de referência original as direções principais. Assim, a componente normal de tensão em um plano $\vec{n}$ qualquer pode ser escrita a partir da primeira linha da equação (3.19) como:

$$\sigma_n = \sigma_{nn} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \sigma_1^p n_1^2 + \sigma_2^p n_2^2 + \sigma_3^p n_3^2 \qquad (3.39)$$

Para esse mesmo plano $\vec{n}$, usando-se as expressões (3.9), (3.10) e (3.11), lembrando que as direções de referência são as principais, escreve-se o vetor de tensões $\vec{t}$ e o quadrado de seu módulo como:

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^p n_1 \\ \sigma_2^p n_2 \\ \sigma_3^p n_3 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad t^2 = \left|\vec{t}\right|^2 = \left(\sigma_1^p\right)^2 n_1^2 + \left(\sigma_2^p\right)^2 n_2^2 + \left(\sigma_3^p\right)^2 n_3^2 \tag{3.40}$$

Na figura 3.7 pode-se calcular a resultante de tensão de cisalhamento (τ) no plano $\vec{n}$ como a composição das duas componentes arbitradas $\sigma_{n\ell}$ e σ_{nm} como:

$$\tau^2 = \sigma_{n\ell}^2 + \sigma_{nm}^2 \tag{3.41}$$

Além disso, pode-se escrever o quadrado do módulo do vetor de tensões $\vec{t}$ a partir de σ_{nn} (ou σ_n) e τ^2 como:

$$t^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \tag{3.42}$$

que, substituída em (3.40), resulta:

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \left(\sigma_1^p\right)^2 n_1^2 + \left(\sigma_2^p\right)^2 n_2^2 + \left(\sigma_3^p\right)^2 n_3^2 \tag{3.43}$$

Isolando τ^2 na equação (3.43) e substituindo-se σ_n^2 calculado a partir de (3.39) se escreve:

$$\tau^2 = \left(\left(\sigma_1^p\right)^2 n_1^2 + \left(\sigma_2^p\right)^2 n_2^2 + \left(\sigma_3^p\right)^2 n_3^2\right) - \left(\sigma_1^p n_1^2 + \sigma_2^p n_2^2 + \sigma_3^p n_3^2\right)^2 \tag{3.44}$$

lembrando-se que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad \text{tem-se, por exemplo,} \quad n_2 \frac{\partial n_2}{\partial n_1} + n_3 \frac{\partial n_3}{\partial n_1} = -n_1 \tag{3.45}$$

Buscam-se os cossenos diretores que fornecem valores críticos para τ. Para tanto, deriva-se a expressão (3.44) em relação a cada cosseno diretor (no caso n_1) e iguala-se a zero,

$$\begin{aligned} 2\tau \frac{\partial \tau}{\partial n_1} = 2\left(\left(\sigma_1^p\right)^2 n_1 + \left(\sigma_2^p\right)^2 n_2 \frac{\partial n_2}{\partial n_1} + \left(\sigma_3^p\right)^2 n_3 \frac{\partial n_3}{\partial n_1}\right) + \\ -4\left(\sigma_1^p n_1^2 + \sigma_2^p n_2^2 + \sigma_3^p n_3^2\right)\left(\sigma_1^p n_1 + \sigma_2^p n_2 \frac{\partial n_2}{\partial n_1} + \sigma_3^p n_3 \frac{\partial n_3}{\partial n_1}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Assumindo-se $\tau \neq 0$, encontram-se, por inspeção, todos os pontos críticos, ou seja:

$$n_i = 0 \qquad n_j = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad n_k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.47}$$

com i j e k assumindo valores de 1 à 3 em permutação cíclica, de forma ampliada,

$$\vec{n}^1 = \begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{n}^2 = \begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{n}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

ou seja, os planos que apresentam tensões de cisalhamento críticas formam ângulo de 45^0 com os planos principais. A tensão de cisalhamento máxima é obtida aplicando-se os versores da equação (3.48) na equação (3.44) e resulta, na ordem de aplicação dos versores:

$$\tau_{max} = max\left\{ \frac{\left|\sigma_1^p - \sigma_2^p\right|}{2}, \frac{\left|\sigma_1^p - \sigma_3^p\right|}{2}, \frac{\left|\sigma_3^p - \sigma_2^p\right|}{2} \right\} \tag{3.49}$$

Uma ilustração das três tensões de cisalhamento críticas é dada na figura 3.8

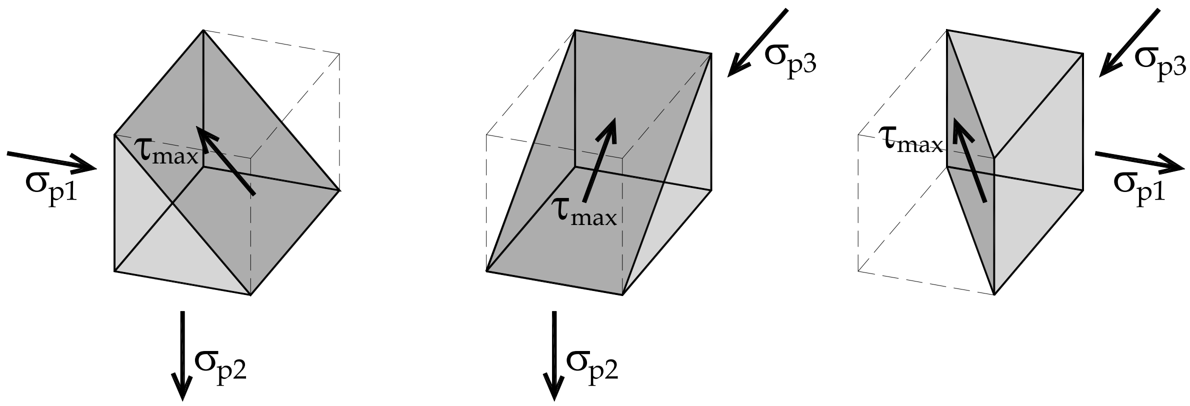


Figura 3.8 – Plano de máxima tensão de cisalhamento – 3 casos.

Deve-se esclarecer que nos planos de tensão de cisalhamento críticas existe tensão normal, apesar de não ilustrado na figura 3.8. Estas tensões são calculadas pela equação (3.39) e valem:

$$\vec{n}^1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \frac{\sigma_1^p + \sigma_2^p}{2} \tag{3.50}$$

$$\vec{n}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \frac{\sigma_1^p + \sigma_3^p}{2} \tag{3.51}$$

$$\vec{n}^3 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \frac{\sigma_2^p + \sigma_3^p}{2} \tag{3.52}$$

3.3.4. Espaço de soluções para o estado de tensões

Nos itens anteriores calcularam-se as máximas tensões normais e de cisalhamento para um estado de tensão tridimensional. Neste item pretende-se mostrar a representação do Círculo de Mohr para problemas tridimensionais, onde se podem visualizar os valores máximos, acima deduzidos, e a região de validade dos pares (σ_n, τ) sobre qualquer plano de corte desejado. No par (σ_n, τ) da figura 3.9 a componente τ é entendida como a resultante das tensões de cisalhamento ($\sigma_{n\ell}$ e σ_{nm}) sobre o plano $\vec{n}$, conforme descrito na expressão (3.42).

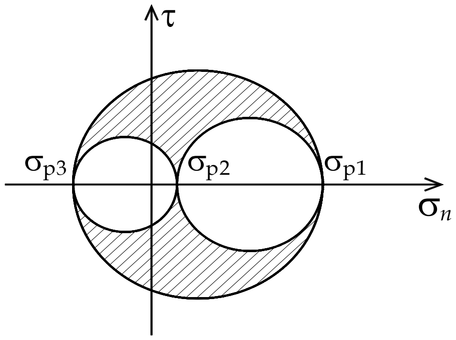


Figura 3.9 – Representação 3D do Círculo de Mohr

Primeiramente, resolve-se o sitema não linear de equações (3.39), (3.43) e a primeira de (3.45) em n_1^2, n_2^2 e n_3^2 como:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2^p)(\sigma_n - \sigma_3^p)}{(\sigma_1^p - \sigma_2^p)(\sigma_1^p - \sigma_3^p)} \tag{3.53}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3^p)(\sigma_n - \sigma_1^p)}{(\sigma_2^p - \sigma_3^p)(\sigma_2^p - \sigma_1^p)} \tag{3.54}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1^p)(\sigma_n - \sigma_2^p)}{(\sigma_3^p - \sigma_1^p)(\sigma_3^p - \sigma_2^p)} \tag{3.55}$$

Adota-se (por conveniência) $\sigma_1^p \geq \sigma_2^p \geq \sigma_3^p$ que resulta em denominador positivo na equação (3.53). Sabendo-se que $n_1^2 \geq 0$ escreve-se para a equação (3.53):

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2^p)(\sigma_n - \sigma_3^p) \geq 0 \tag{3.56}$$

ou, equivalentemente:

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2^p + \sigma_3^p}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2^p - \sigma_3^p}{2}\right)^2 \tag{3.57}$$

que representa a região fora de um dos círculos menores da figura 3.9.

Para $n_2^2 \geq 0$ resultra:

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1^p + \sigma_3^p}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1^p - \sigma_3^p}{2} \right)^2$$

(3.58)

que é a região interna do maior círculo.

Para $n_3^2 \geq 0$ resulta:

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1^p + \sigma_2^p}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1^p - \sigma_2^p}{2} \right)^2$$

(3.59)

que é a região externa do outro círculo menor.

Desta forma mostra-se que todas as possíveis componentes de tensão estão na área hachuradada figura 3.9 e que a máxima tensão de cisalhamento é, de fato, a dada pela equação (3.49), ou seja, o raio do maior círculo.

3.3.5. Tensões octaédricas e estados desviador e hidrostático de tensões.

No item anterior mostrou-se que as tensões críticas de cisalhamento são encontradas a partir de giros em torno dos eixos principais, pois uma das componentes dos versores que definem estes planos é nula, veja equação (3.48). Já os planos octaédricos são definidos por versores que possuem todas as componentes com o mesmo módulo quando o sistema de referência é composto pelos eixos principais, ou seja,

$$|n_1| = |n_2| = |n_3| = \sqrt{3}/3 \qquad (3.60)$$

Como resultado da equação (3.60) encontram-se 8 planos, com os versores sendo a bissetriz dos eixos principais nos oito octantes gerados por estes, veja um dos octantes e seu plano na figura 3.10.

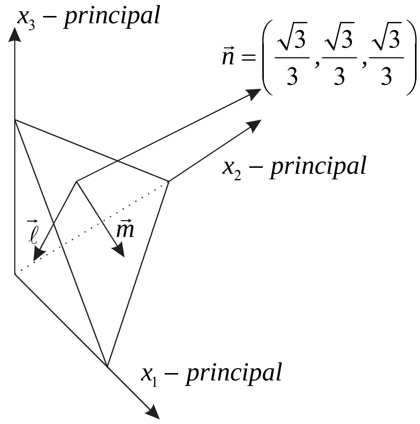


Figura 3.10 – Primeiro plano octaédrico

Para se calcular as tensões no plano octaédrico da figura 3.10 cujo versor normal é $\vec{n} = \sqrt{3}/3(1,1,1)$ é necessário se definir os versores $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ tangentes ao plano. Como a tensão de cisalhamento octaédrica vai ser a resultante de $\sigma_{n\ell}$ e σ_{nm}, como na equação (3.41), escreve-se,

$$\tau_{oct}{}^2 = \sigma_{n\ell}^2 + \sigma_{nm}^2 \tag{3.61}$$

Pelo mesmo motivo a escolha de $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ pode ser arbitrária. Por exemplo, adotando-se $\vec{\ell} = (1,-1,0)\sqrt{2}/2$ contido no plano $\vec{n}$ encontra-se $\vec{m} = \vec{n} \wedge \vec{\ell} = (1,1,-2)\sqrt{6}/6$. Aplicando-se estes versores na expressão (3.19) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{n\ell} \\ \sigma_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_2^p\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_2^p - \sigma_3^p\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_3^p\right) \end{Bmatrix} \tag{3.62}$$

Assim, a tensão de cisalhamento octaédrica pode ser encontrada aplicando-se (3.61) e (3.62), como:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\sigma_{n\ell}^2 + \sigma_{nm}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1^p - \sigma_2^p\right)^2 + \left(\sigma_1^p - \sigma_3^p\right)^2 + \left(\sigma_2^p - \sigma_3^p\right)^2} \tag{3.61b}$$

Para todos os outros planos octaédricos os resultados são os mesmos, assim τ_{oct} é dado pela equação (3.61b). Como se pode observar, equação (3.62), a tensão normal nos planos octaédricos é a tensão média, ou seja, o traço do tensor de tensões (primeiro invariante) dividido por 3. Usando a equação (3.49), à luz da figura 3.9, resulta o limite superior de τ_{oct}, como $\tau_{oct} < 0{,}9428\,\tau_{max}$.

Assim, a tensão de cisalhamento octaédrica também é uma boa medida da máxima tensão de cisalhamento.

O tensor de tensão hidrostática é definido por esta tensão média atuando em todas as direções, ou seja:

$$\sigma_h = \begin{bmatrix} I_1/3 & 0 & 0 \\ 0 & I_1/3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1/3 \end{bmatrix} = I_1/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} I \tag{3.63}$$

Esta tensão é chamada hidrostática, pois é invariante em relação à rotação, veja o desenvolvimento a seguir:

$$\bar{\sigma}_h = R^t \cdot \sigma_h \cdot R = \frac{I_1}{3} R^t \cdot I \cdot R = \frac{I_1}{3} I \tag{3.64}$$

Ao se subtrair de um estado de tensão qualquer seu tensor hidrostático define-se o chamado tensor desviador. Uma característica do tensor desviador é que nos seus planos octaédricos não há tensão normal. Para mostrar esta propriedade começa-se escrevendo o tensor desviador como:

$$\sigma_{des} = \sigma - \sigma_h \tag{3.65}$$

Aplica-se a rotação sobre os tensores para as direções principais, como:

$$\sigma_{des}^p = R_p^t \cdot \left(\sigma - \sigma_h\right) \cdot R_p = R_p^t \cdot \sigma \cdot R_p - R_p^t \cdot \sigma_h \cdot R_p = R_p^t \cdot \sigma \cdot R_p - \sigma_h \tag{3.66}$$

Já que σ_{des}^p e σ_h são diagonais, $R_p^t \cdot \sigma \cdot R_p$ também deve ser, ou seja, as direções principais de σ_{des} coincidem com as direções principais de σ. Assim,

$$\sigma_{des}^p = \sigma^p - \sigma_h \tag{3.67}$$

Assumindo-se as direções principais como nova referência, aplica-se a expressão (3.19) para se determinar as componentes da tensão desviadora no plano octaédrico, ou seja:

$$\sigma_{des}^{oct} = R_{oct}^t \cdot \left(\sigma^p - \sigma_h\right) \cdot \vec{n}_{oct} \tag{3.68}$$

Utilizando-se os versores definidos após a equação (3.61) escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{n\ell} \\ \sigma_{nm} \end{Bmatrix}_{des}^{oct} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_2^p\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_2^p - \sigma_3^p\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_3^p\right) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p}{3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_2^p\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_2^p - \sigma_3^p\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sigma_1^p - \sigma_3^p\right) \end{Bmatrix} \tag{3.69}$$

Assim, o estado de tensão pode ser dividido em uma componente desviadora e uma componente hidrostática. A primeira afere o quanto o estado de tensão desvia do estado hidrostático. Normalmente materiais dúcteis não falham quando submetidos à tensão hidrostática, portanto a tensão desviadora (ou mesmo a octaédrica) pode ser usada para definir critérios de resistência de materiais dúcteis.

Criando o espaço das tensões principais $(\sigma_1^p, \sigma_2^p, \sigma_3^p)$ representado na figura 3.11 como um sistema de eixos ortogonais, um estado de tensão completo (6 componentes) é representado por um único ponto (3 coordenadas principais invariantes). A componente hidrostática de tensão $(\sigma_h, \sigma_h, \sigma_h)$ (invariante) está contida no eixo hidrostático e, somada ao tensor desviador principal $(\sigma_1^{des\,p}, \sigma_2^{des\,p}, \sigma_3^{des\,p})$, resulta no tensor de tensões principal completo $(\sigma_1^p, \sigma_2^p, \sigma_3^p)$. O módulo da parcela desviadora corresponde à $\left|\sigma_{des}\right| = \sqrt{(\sigma_1^p - \sigma_h)^2 + (\sigma_2^p - \sigma_h)^2 + (\sigma_3^p - \sigma_h)^2} = \sqrt{3}\,\tau^{oct}$ tendo como referência os planos (ou direções) principais.

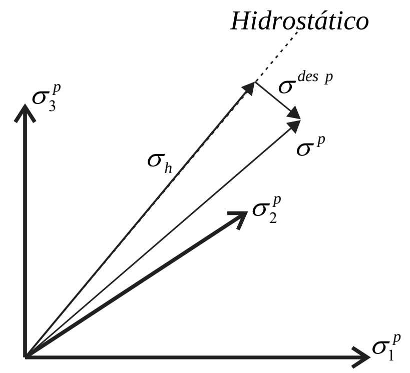


Figura 3.11 - Decomposição da tensão - ilustração no espaço das tensões principais

4. Equações de Equilíbrio em tensões - Equilíbrio Local:

Ao se considerar um corpo em equilíbrio, usando cortes arbitrários no contínuo, definiu-se o ente tensão. Neste capítulo o equilíbrio de um corpo genérico será estudado a partir da distribuição variável de tensões no interior do mesmo. Uma forma alternativa de se encontrar as equações que regem o equilíbrio no interior dos sólidos deformáveis é a escrita do equilíbrio global do corpo arbitrário com sua posterior transformação para o domínio.

Na literatura há controvérsias quanto à melhor forma de se apresentar este conteúdo, apesar de serem equivalentes. Neste texto será seguida a primeira estratégia onde se define primeiramente as equações diferenciais de equilíbrio no interior do corpo (equilíbrio local) com posterior transformação para o equilíbrio global. Na passagem específica da transformação deixar-se-á claro a possibilidade de se seguir o caminho inverso relizando-a para o equilíbrio de momentos.

4.1. Equação de equilíbrio no ponto – forma diferencial

Diferentemente do que foi realizado no capítulo anterior, ao invés de se considerar a terceira Lei de Newton (ação e reação) que informava de antemão a igualdade entre os vetores de tensão e, portanto, impunha a igualdade das componentes de tensão definidas para planos opostos em um único corte, será considerada a primeira Lei de Newton, visando estudar o equilíbrio do infinitésimo de volume escrito em tensões.

O elemento infinitesimal da figura 3.5 representava um único ponto no corpo e sua apresentação serviu para a definição das componentes de tensão. Agora este infinitésimo é entendido como uma porção do contínuo que possibilita visualizar a variação (diferencial) de qualquer grandeza $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ no interior do domínio, veja a figura 4.1. Para a disciplina em questão interessa a variação das componentes de tensão no interior do contínuo, veja a figura 4.2.

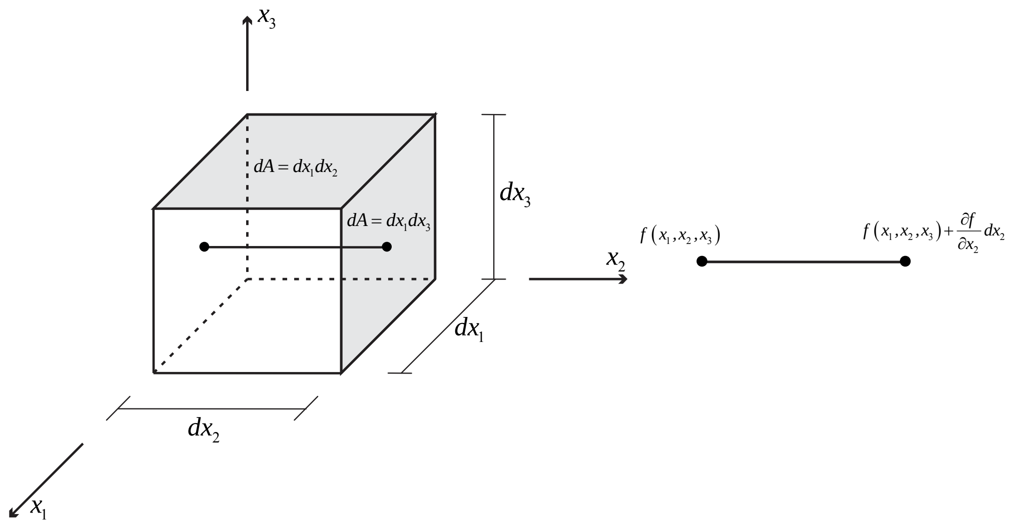


Figura 4.1 – Detalhes geométricos do elemento infinitesimal.

Na figura 4.2 observa-se que as tensões variam no contínuo segundo as direções cartesianas que indicam sua mudança infinitesimal do plano de entrada para o plano de saída. Além disso, pode-se observar na figura 4.2 a existência de forças de volume. A aceleração do infinitésimo é proporcional à resultante de forças e inversamente proporcional à sua massa $\left(\rho dx_1 dx_2 dx_3\right)$. A aceleração angular do infinitésimo é inversamente proporcional à sua inércia de rotação e proporcional à resultante de torque. Ou seja, imaginando-se este elemento infinitesimal livre do contínuo que o circunda, porém sujeito às tensões por este geradas, três equações de equilíbrio de translação (ou de movimento de translação) e três equações de equilíbrio em rotação (ou de movimento de rotação) podem ser escritas.

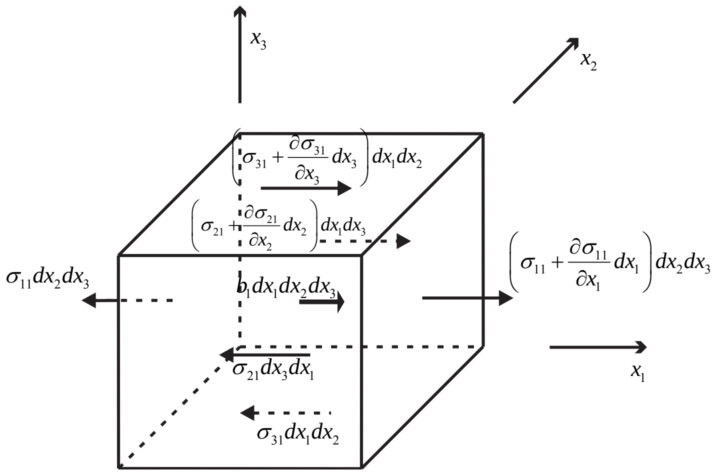


Figura 4.2 – Variação das tensões e equilíbrio na direção 1

Para todas as forças infinitesimais (incluindo todos os planos) na direção x_1, veja figura 4.2, tem-se.

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \rho \ddot{u}_1 dx_1 dx_2 dx_3\end{aligned} \tag{4.1}$$

Eliminando-se os termos que se anulam e lembrando-se que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, resulta:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1\right) dV = \rho \ddot{u}_1 dV \tag{4.2}$$

ou eliminando-se dV,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1\right) = \rho \ddot{u}_1 \tag{4.3}$$

que é a chamada equação diferencial de equilíbrio local (ou de movimento) na direção x_1.

Realizando-se as mesmas operações nas direções x_2 e x_3 resultam as equações de equilíbrio nas ouras direções, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2\right) = \rho \ddot{u}_2 \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3\right) = \rho \ddot{u}_3 \tag{4.5}$$

Em notação indicial se escreve simplesmente:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (4.6)$$

que representa matematicamente o equilíbrio local ou no ponto do contínuo.
Em notação dyadica, veja equação (2.42), reescreve-se a equação (4.6) como:

$$Div\left(\sigma^t\right) + \vec{b} = \rho \vec{\ddot{u}} \qquad (4.7)$$

Deve-se observar a coerência das expressões, onde o divergente de um tensor é um vetor.

Por enquanto, a solução do equilíbrio (sem utilizar a simetria do tensor de tensões) significaria em se resolver 9 componentes de tensão com apenas três equações de equilíbrio.

Para se estudar o equilíbrio de momento em torno do eixo x_3 (ou a equação de movimento – giro) incluindo a variação das tensões, uma nova versão da figura 3.6 pode ser vista na figura 4.3.

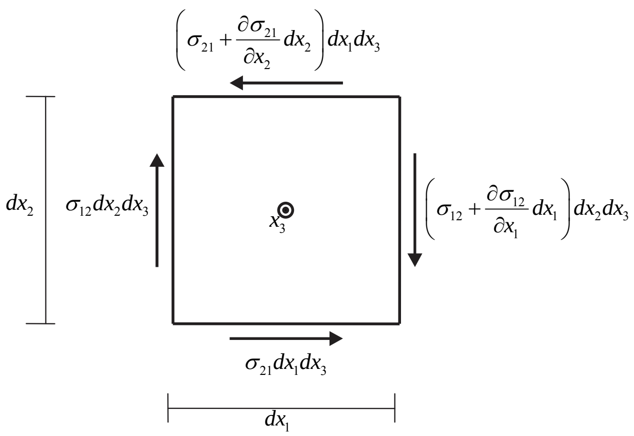


Figura 4.3 – Equação de movimento angular - torque

Como o ponto onde se calcula o momento é arbitrário escolhe-se o próprio eixo x_3 indicado resultando:

$$\begin{aligned}&\left(\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3\right)\frac{dx_2}{2} + \left(\sigma_{21} dx_1 dx_3\right)\frac{dx_2}{2} + \\ &-\left(\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3\right)\frac{dx_1}{2} - \left(\sigma_{12} dx_2 dx_3\right)\frac{dx_1}{2} = I_t \ddot{\theta}_3\end{aligned} \qquad (4.8)$$

No lado direito da expressão (4.8) observa-se a aceleração angular e o momento angular de inércia em torno do eixo x_3. Este último pode ser calculado e é dado por:

$$I_t = \left(\int_{-dx_1/2}^{dx_1/2}\int_{-dx_2/2}^{dx_2/2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) d\alpha_1 d\alpha_2\right) dx_3 = dx_3\left(dx_2 dx_1^3 + dx_1 dx_2^3\right)/12 \qquad (4.9)$$

Substituindo-se (4.9) em (4.8) escreve-se:

$$\left\{\sigma_{21} - \sigma_{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1\right)\right\} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{12} dx_3\left(dx_2 dx_1^3 + dx_1 dx_2^3\right)\ddot{\theta}_3 \qquad (4.10)$$

Pode-se substituir na equação (4.10) cada infinitésimo dx_i por $a_i d\alpha$, onde cada a_i é uma constante real e $d\alpha$ um infinitésimo qualquer, ou seja:

$$\left(\sigma_{21}-\sigma_{12}\right)a_1a_2a_3d\alpha^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}a_2-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}a_1\right)a_1a_2a_3d\alpha^4=\frac{d\alpha^5}{12}a_3\left(a_2a_1^3+a_1a_2^3\right)\ddot{\theta}_3S \quad (4.11)$$

Ou, simplificando,

$$\left(\sigma_{21}-\sigma_{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}a_2-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}a_1\right)d\alpha=\frac{d\alpha^2}{12}\left(a_1^2+a_2^2\right)\ddot{\theta}_3 \quad (4.11b)$$

Lembrando-se que um infinitésimo é tão pequeno quanto se queira (portanto nulo) resulta:

$$\sigma_{12}=\sigma_{21} \quad (4.12)$$

Assim, o Teorema de Cauchy se confirma para problemas dinâmicos incluido a variação das tensões no contínuo, pois se repetindo a operação nas outras direções resulta:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \quad (4.13)$$

Ou seja, as três equações contidas em (4.13) são resolvidas diretamente reduzindo o número de incógnitas de 9 para 6. Deve-se enfatizar que a simetria do tensor de tensões indica que as equações de equilíbrio em momento estão plenamente satisfeitas.

Como um dos objetivos da análise mecânica é se encontrar a distribuição de tensões em um sólido, para a solução das 6 componentes de tensão restantes tem-se apenas 3 equações de equilíbrio, equação (4.6), ou seja, o problema é indeterminado quando se utilizam apenas as equações de equilíbrio. Em teoria de estruturas dir-se-ia que o problema é hiperestático.

Para se resolver este problema deve-se considerar que o corpo é deformável e se utilizar as relações de deslocamento-deformação e as relações tensão-deformação que completarão 15 equações e 15 incógnitas. Na teoria de estruturas (preocupada com a flexão) as relações deslocamento-deformação podem ser associadas à relação deslocamento-curvatura (onde a hipótese cinemática de Euler-Bernoulli é aplicada) e as relações deformação-tensão podem ser associadas à relação momento-curvatura (onde a Lei de Hooke unidimensional é aplicada).

Em princípio, neste texto, considerar-se-á relação linear entre tensões e deformações e relação linear entre deslocamentos e deformações, constituindo-se a Elasticidade Linear. Atenção às condições de contorno será dada em momento oportuno. Finalmente, em determinadas partes do texto serão introduzidos conceitos da Elasticidade Não linear.

4.2. Equações globais de equilíbrio

4.2.1. Equilíbrio de forças ou equações de movimento de translação

A equação global de equilíbrio, ou melhor, a equação de movimento de um corpo qualquer é escrita diretamente da Segunda Lei de Newton. A quantidade de movimento é uma grandeza vetorial e é dada por:

$$\vec{Q} = \int_V \rho \dot{\vec{u}} dV \tag{4.14}$$

onde V é o volume do corpo em análise, veja figura 4.4.

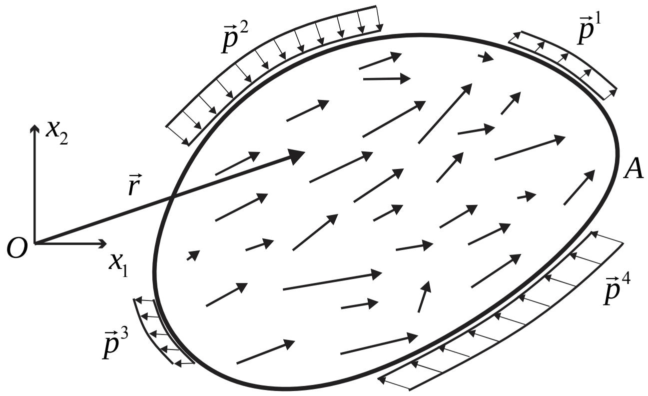


Figura 4.4 – Corpo em movimento

Como já comentado anteriormente, as forças aplicadas no corpo podem ser divididas em dois tipos, as forças de superfície $\vec{p}$ e as forças de volume $\vec{b}$, veja a figura 4.1. A resultante de forças aplicadas é calculada como:

$$\vec{R} = \int_V \vec{b}\, dV + \int_A \vec{p}\, dA \tag{4.15}$$

Pela segunda Lei de Newton a variação em relação ao tempo da quantidade de movimento é igual á resultante de forças aplicada no corpo, ou seja:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\dot{\vec{u}}}{dt} dV = \int_V \rho \ddot{\vec{u}}\, dV \tag{4.16}$$

Igualando (4.15) à (4.16) resulta,

$$\int_V \vec{b}\, dV + \int_A \vec{p}\, dA = \int_V \rho \ddot{\vec{u}}\, dV \tag{4.17}$$

Em notação indicial a equação (4.17) fica.

$$\int_V b_i\, dV + \int_A p_i\, dA = \int_V \rho \ddot{u}_i\, dV \tag{4.18}$$

Caso se pretenda fazer análises estáticas, o lado direito da equação (4.18) é nulo. É importante se mostrar que a equação local de equilíbrio (4.6) ou (4.7) é equivalente à equação global (4.17) ou (4.18). Isto é feito integrando-se a equação (4.7) no volume do corpo, como:

$$\int_V Div\left(\sigma^t\right) dV + \int_V \vec{b}\, dV = \int_V \rho\ddot{\vec{u}}\, dV \qquad (4.19)$$

Lembrando-se do Teorema de Gauss (ou Green), que relaciona a integral do divergente de uma função no volume de um corpo com a integral do produto interno desta função com o versor normal à superfície do corpo, tem-se:

$$\int_V Div\left(\sigma^t\right) dV = \int_A \sigma^t \cdot \vec{n}\, dA = \int_A \vec{p}\, dA \qquad (4.20)$$

onde se aplicou a fórmula de Cauchy (3.15).

Para um próximo desenvolvimento é interessante se apresentar a equação (4.20) em notação indicial, como:

$$\int_V \sigma_{ji,j}\, dV = \int_A \sigma_{ji} n_j\, dA = \int_A p_i\, dA \qquad (4.21)$$

Substituindo-se (4.20) em (4.19) resulta exatamente a equação de equilíbrio (4.17) ou (4.18). Ou seja, os equilíbrios Local e Global são equivalentes.

4.2.2. Equilíbrio em momentos ou equações de movimento de rotação

O momento das forças de superfície em relação ao ponto O, veja figura 4.1, (escolhido como a origem do sistema de coordenadas) pode ser escrito em notações dyadica e indicial como:

$$\int_A \vec{r} \wedge \vec{p}\, dA = \int_A \vec{r} \wedge \sigma^t \cdot \vec{n}\, dA \quad \text{ou} \quad \int_A \xi_{kij} r_i p_j dA = \int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{\ell j} n_\ell dA \qquad (4.22)$$

É interessante se reunir os três primeiros tensores da última representação da equação (4.22) em um único tensor de ordem 2, como:

$$\int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{\ell j} n_\ell dA = \int_A \eta_{k\ell} n_\ell dA = \int_A \eta \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4.23)$$

Aplicando-se o Teorema de Gauss sobre (4.23) tem-se:

$$\int_A \eta_{k\ell} n_\ell dA = \int_V \eta_{k\ell,\ell}\, dV \quad \text{ou} \quad \int_A \eta \cdot \vec{n}\, dA = \int_V Div\left(\eta\right) dV \qquad (4.24)$$

Estas passagens, que parecem excessivas, servem para se entender que todas as variáveis envolvidas, tensão e distância, são transformadas para o domínio de forma coerente, ou seja, agora a distância será medida dos pontos do domínio ao ponto de referência e a derivada de $\eta_{k\ell}$ é a derivada do produto $r_i \sigma_{\ell j}$, pois ξ_{kij} é constante, ou seja

$$\int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{\ell j} n_\ell dA = \int_V \xi_{kij} \left(r_i \sigma_{\ell j} \right)_{,\ell} dV = \int_V \xi_{kij} \left(r_i \sigma_{\ell j,\ell} + r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \right) dV \tag{4.25}$$

Soma-se ao momento da força de superfície o momento da força de domínio em relação ao mesmo ponto de referência, resultando:

$$\begin{aligned} m_k &= \int_V \xi_{kij} \left(r_i \sigma_{\ell j,\ell} + r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \right) dV + \int_V \xi_{kij} r_i b_j \, dV = \\ &= \int_V \xi_{kij} r_i \left(\sigma_{\ell j,\ell} + b_j \right) dV + \int_V \xi_{kij} r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \, dV \end{aligned} \tag{4.26}$$

O momento resultante gera a aceleração dos pontos do domínio que pelo Princípio D'Alambert fica:

$$\vec{m} = \int_V \vec{r} \wedge \left(\rho \ddot{\vec{u}} \right) dV \qquad \text{ou} \qquad m_k = \int_V \rho \xi_{kij} r_i \ddot{u}_j \, dV \tag{4.27}$$

Igualando-se (4.26) e (4.27) resulta:

$$\int_V \rho \xi_{kij} r_i \ddot{u}_j \, dV = \int_V \xi_{kij} r_i \left(\sigma_{\ell j,\ell} + b_j \right) b_j \, dV + \int_V \xi_{kij} r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \, dV \tag{4.28}$$

Rearranjando-se a equação (4.28) escreve-se:

$$\int_V \xi_{kij} r_i \left(\rho \ddot{u}_j - \sigma_{\ell j,\ell} - b_j \right) dV = \int_V \xi_{kij} r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \, dV \tag{4.29}$$

Comparando-se o núcleo da integral do lado esquerdo da equação (4.29) com a equação (4.6) encontra-se:

$$\int_V \xi_{kij} r_{i,\ell} \sigma_{\ell j} \, dV = 0_k \tag{4.30}$$

Como o vetor posição pode ser escrito como $r_i = x_i$ tem-se $r_{i,\ell} = \delta_{i\ell}$, que aplicado em (4.30) resulta:

$$\int_V \xi_{k\ell j} \sigma_{\ell j} \, dV = 0_k \tag{4.31}$$

Essa igualdade é satisfeita quando o núcleo é identicamente nulo. Para estudar essa condição, basta aplicar as propriedades do tensor de Levi-Cevita, dadas no item 1.4, ou seja:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \qquad \text{para} \quad k = 3 \tag{4.32}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \qquad \text{para} \quad k = 2 \tag{4.33}$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \qquad \text{para} \quad k = 1 \tag{4.34}$$

Observa-se que cada k representa o equilíbrio de momento em torno de cada eixo x_k . Assim, a equação (4.31) verifica a fórmula de Cauchy (4.13) a partir do equilíbrio global de momentos para um sólido arbitrário. Observa-se que, neste item, completou-se o ciclo contrário nas deduções, ou seja, não se integrou o equilíbrio local para se encontrar o global, mas se saiu do equilíbrio global até se determinar o equilíbrio local.

5. Cinemática dos corpos deformáveis - Deformações

Conforme comentado no final da seção 4.1, a apresentação dos conceitos não lineares estará presente ao longo do texto e simplificações para a elasticidade linear serão feitas para que se possa avançar em técnicas de solução e aplicações gerais em capítulos futuros. A cinemática dos corpos deformáveis será apresentada de forma didática, iniciando-se por relações uniaxiais para, na sequência, se apresentar o conceito de engenharia para as componentes tridimensionais de deformação com sua generalização para representações tensoriais e, finalmente, sua simplificação para problemas em pequenas deformações, deslocamentos e giros.

5.1. Conceituação uniaxial

Para se conceituar a deformação longitudinal observe o ensaio de tração da barra indicada na figura 5.1. Antes de se aplicar a força $\vec{F}$, na configuração inicial, marcaram-se dois pontos x^A e x distantes Δx entre si. Após a aplicação da ação externa ocorre uma mudança de configuração, para a qual os pontos marcados passaram a ocupar as posições $y^A = f\left(x^A\right)$ e $y = f\left(x\right)$. A função f indica a mudança de configuração que poderia não ser fruto da ação de uma força, mas de temperatura ou outro tipo de ação qualquer.

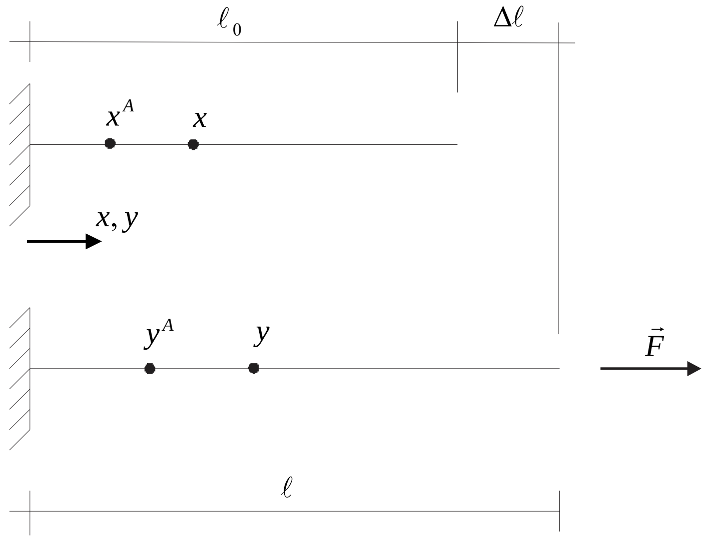


Figura 5.1 – Mudança de configuração

Na configuração atual a distância entre os pontos marcados passa a ser $\Delta y = y - y^A = f\left(x\right) - f\left(x^A\right)$. Da figura 5.1 define-se deformação longitudinal média, como:

$$\varepsilon_{med} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \tag{5.1}$$

Para se medir com maior precisão a deformação no ponto A pode-se definir deformação média na vizinhança finita de A como:

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\left(y - y^A\right) - \left(x - x^A\right)}{\left(x - x^A\right)} \tag{5.2}$$

A equação (5.2) pode ser reescrita de duas formas:

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\left(f(x) - f\left(x^A\right)\right)}{\left(x - x^A\right)} - 1 \tag{5.3}$$

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\left(y - x\right) - \left(y^A - x^A\right)}{\left(x - x^A\right)} = \frac{u(x) - u\left(x^A\right)}{\left(x - x^A\right)} \tag{5.4}$$

onde u é o deslocamento na direção uniaxial de um ponto genérico. Define-se a deformação no ponto A fazendo-se o limite das equações (5.3) ou (5.4) quando x se aproxima de x^A, ou seja, a vizinhança passa a ser infinitesimal, como:

$$\varepsilon\left(x^A\right) = \left(\lim_{x \to x^A} \frac{\left(f(x) - f\left(x^A\right)\right)}{\left(x - x^A\right)} \right) - 1 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^A} - 1 = \lambda\left(x^A\right) - 1 \tag{5.5}$$

$$\varepsilon\left(x^A\right) = \left(\lim_{x \to x^A} \frac{\left(u(x) - u\left(x^A\right)\right)}{\left(x - x^A\right)} \right) = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x^A} \tag{5.6}$$

A expressão (5.6) informa que a deformação longitudinal em um problema uniaxial pode ser expressa como a derivada do deslocamento em relação à coordenada que define o problema. Esta expressão é, em geral a mais usada e conhecida, porém em elasticidade não linear a forma (5.5) resulta em procedimentos de cálculo mais simples. Neste caso, a grandeza λ é chamada alongamento de Cauchy-Green, ou simplesmente alongamento. Ainda, como o ponto A é arbitrário, as fórmulas (5.5) e (5.6) valem pra qualquer posição x, ou seja:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - 1 = \lambda(x) - 1 = \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dy - dx}{dx} \tag{5.7}$$

onde as duas últimas representações, apesar de matematicamente inapropriadas, levam a um entendimento físico importante que remonta à definição da deformação média, ou seja, a diferença entre o comprimento infinitesimal final e o comprimento infinitesimal inicial dividida pelo comprimento inicial de uma fibra do material é a deformação de engenharia no ponto. O alongamento relativo em um ponto é dado pela razão entre comprimento infinitesimal final e o comprimento infinitesimal inicial de uma fibra do material.

Apesar de estar além dos objetivos deste texto, é importante informar que quando a configuração inicial do corpo é tomada como referência, a medida de deformação e todas as outras grandezas associadas são chamadas Lagrangianas. Caso a configuração final (ou atual) de um corpo seja tomada como referência, a deformação (por exemplo $\ln(dx/dy)$) e todas as outras grandezas associadas são chamadas Eulerianas. Sem a simplificação de pequenos deslocamentos, a Tensão de Cauchy é uma grandeza Euleriana, pois é definida na configuração atual do corpo. Entretanto, na elasticidade linear esta tensão será tratada como se fosse Lagrangiana, pois a configuração final se confunde com a inicial.

5.2. Deformação de engenharia multiaxial

Neste item, os conceitos de deformação de engenharia serão ampliados para sólidos gerais. As ilustrações serão apresentadas para corpos bidimensionais, porém as definições e fórmulas são aplicadas para sólidos bi e tridimensionais.

5.2.1. Deformação longitudinal

Todo sólido deformável em equilibro estático ou em movimento, sujeito a ações externas, muda de forma ou de configuração, veja a figura 5.2. A função $\vec{f}$ descreve a mudança da configuração inicial B_0 para a configuração atual B de um corpo genérico. Esta função é considerada, nesse estudo, contínua e continuamente diferenciável até a segunda derivada e é chamada simplesmente função mudança de configuração.

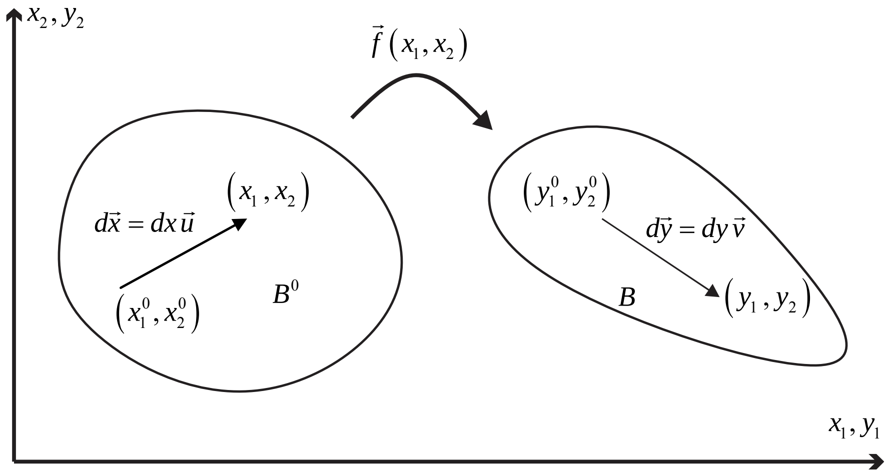


Figura 5.2 – Mudança de configuração

Na figura 5.2 os vetores infinitesimais $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$ são dados pelos seus comprimentos infinitesimais dx e dy (sempre positivos, pois o material não pode degenerar - virar do avesso) e suas direções especificadas pelos versores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Podem-se repetir as expressões (2.49) até (2.51) observando-se agora que $\vec{f}$ possui significado físico, ou seja, pode-se escrever $d\vec{y}$ como uma função de $d\vec{x}$ pela seqüência:

$$\vec{f}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\vec{f}\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)+Grad\left(\vec{f}\right)\cdot d\vec{x} \tag{5.8}$$

Passando-se $\vec{f}\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$ para o lado esquerdo da equação retorna:

$$d\vec{y}=d\vec{f}=Grad\left(\vec{f}\right)\cdot d\vec{x}=A\cdot d\vec{x} \tag{5.9}$$

ou em notação indicial, :

$$dy_i = f_{i,j}dx_j = a_{ij}dx_j \tag{5.10}$$

Para simplificar a notação dyadica, chamou-se o gradiente da função mudança de configuração de A, tensor de ordem 2.

Calcula-se o comprimento dy conforme a equação (1.9),

$$dy^2 = d\vec{y}^t \cdot d\vec{y} \tag{5.11}$$

onde o símbolo transposto é utilizado para auxiliar na notação dos tensores de ordem 2 a serem aplicados. Substituindo-se a equação (5.9) na equação (5.11) resulta:

$$dy^2 = d\vec{x}^t \cdot A^t \cdot A\cdot d\vec{x} \tag{5.12}$$

Substituindo-se a representação $d\vec{x}=dx\,\vec{u}$ em (5.12), escreve-se:

$$dy^2=\left(\vec{u}^t\cdot A^t\cdot A\cdot\vec{u}\right)dx^2 \qquad \frac{dy^2}{dx^2}=\left(\vec{u}^t\cdot A^t\cdot A\cdot\vec{u}\right) \tag{5.13}$$

Assim, com base naquilo que foi descrito no item anterior, para se medir uma deformação longitudinal de engenharia na direção de $\vec{u}$ (referência em B^0 - Lagrangiana) deve-se fazer:

$$\varepsilon_u=\frac{dy}{dx}-1=\lambda_u-1 \tag{5.14}$$

ou seja, como dx e dy, apesar de infinitesimais são positivos, tem-se:

$$\lambda_u=\sqrt{\vec{u}^t\cdot A^t\cdot A\cdot\vec{u}} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_u=\sqrt{\vec{u}^t\cdot A^t\cdot A\cdot\vec{u}}-1 \tag{5.15}$$

Deve-se comentar que a relação dy/dx na equação (5.14) não indica derivada, mas a relação entre os comprimentos infinitesimais dy e dx que não estão na mesma direção·

Neste ponto é interessante se definir o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green,

$$C = A^t \cdot A \qquad \text{com} \qquad C^t = A^t \cdot A \qquad \text{simétrico} \tag{5.16}$$

grandeza importante na elasticidade não linear e que será abordada novamente nos próximos itens deste capítulo.

5.2.2. Distorção

Marcando-se duas linhas ortogonais no corpo indeformado (configuração B^0), veja figura 5.3, a distorção de engenharia é definida pela quantidade angular (em radianos) do quanto estas linhas deixam de ser ortogonais após a mudança de configuração, ou seja:

$$\gamma_{uv} = \frac{\pi}{2} - \theta \tag{5.17}$$

Aqui é importante lembrar que radiano é adimensional, pois é uma medida relativa entre o comprimento de um arco e o raio que o gerou e, portanto, pode ser usado como medida de deformação. Como será visto adiante, é preferível definir a semi-distorção ou distorção matemática ε_{uv} como,

$$\varepsilon_{uv} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{5.18}$$

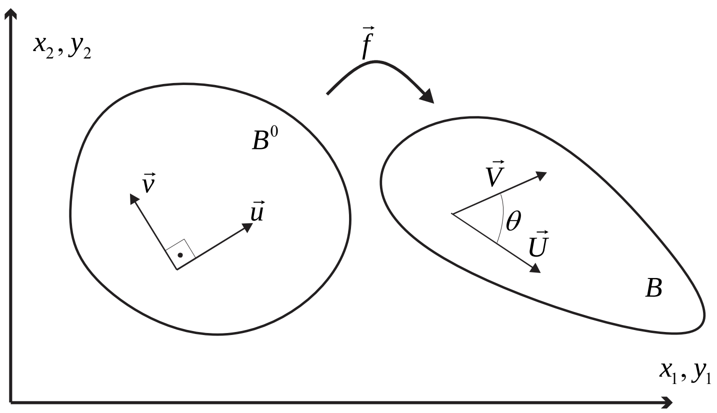


Figura 5.3 – Distorção

Na figura 5.3 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são versores na configuração inicial enquanto $\vec{U}$ e $\vec{V}$ são vetores não unitários na configuração atual, pois acompanham a mudança de forma do corpo. Da figura 5.2 e da equação (5.9) ou (5.10) se escreve:

$$d\vec{y} = dx\, A \cdot \vec{u} \qquad \text{e} \qquad d\vec{y} = dy \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \lambda_u dx \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \tag{5.19}$$

portanto,

$$A \cdot \vec{u} = \lambda_u \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{A \cdot \vec{u}}{\lambda_u} \tag{5.20}$$

o mesmo vale para a direção $\vec{v}$, veja figura 5.3,

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{A \cdot \vec{v}}{\lambda_v} \tag{5.21}$$

O ângulo θ pode ser calculado como mostrado na equação (1.16), ou seja:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{U}^t \cdot \vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|} = \frac{\vec{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} = \frac{\vec{V}^t \cdot \vec{U}}{|\vec{U}||\vec{V}|} \tag{5.22}$$

Assim, a semi-distorção fica dada por:

$$\varepsilon_{uv} = \varepsilon_{vu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{u}^t \cdot C \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v}\right)\right) \tag{5.23}$$

onde C é o tensor de alongamento de Cauchy-Green , veja a equação (5.16).

Para o caso tridimensional, um terceiro versor $\vec{w}$, ortogonal à $\vec{u}$ e $\vec{v}$ deve ser considerado e também se calculam as semi-distorções nos planos definidos por $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e por $\vec{w}$ e $\vec{v}$.

Para se calcular as "componentes" cartesianas da deformação em questão, calculam-se os valores de ε_u, ε_v, ε_w, ε_{uv}, ε_{uw} e ε_{vw} adotando-se $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{k}$, versores coordenados, como:

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{c_{11}} - 1, \qquad \varepsilon_{22} = \sqrt{c_{22}} - 1, \qquad \varepsilon_{33} = \sqrt{c_{33}} - 1 \tag{5.24}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{c_{ij}}{\lambda_i \lambda_j}\right)\right) \qquad \text{para} \qquad i \neq j \tag{5.25}$$

onde o tensor de alongamento de Cauchy-Green, equação (5.16), foi utilizado. Assim as componentes do tensor C estão diretamente associadas às componentes cartesianas de deformação. Observa-se que cada componente cartesiana do tensor de Cauchy-Green pode ser encontrada aplicando-se $c_{ij} = \vec{e}^i \cdot C \cdot \vec{e}^j$, onde $\left(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\right) = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

As equações (5.24) podem ser reescritas usando a definição de alongamento longitudinal, ou seja,

$$\varepsilon_{11} = \lambda_{11} - 1, \qquad \varepsilon_{22} = \lambda_{22} - 1, \qquad \varepsilon_{33} = \lambda_{33} - 1 \tag{5.26}$$

Observando-se (5.20) e (5.24) é óbvio que $C_{i(i)} = \lambda_{i(i)}^2$.

Poderia se cogitar em escrever as "componentes cartesianas" da deformação não linear de engenharia (equações (5.24) e (5.25)) na forma de um tensor de ordem 2, porém, o arranjo resultante não é um tensor, pois ao se aplicar a fórmula de rotação sobre este arranjo em forma de matriz, não se encontraria a medida correspondente de deformação na direção desejada. Para tanto, é necessário se aplicar a rotação sobre o tensor de alongamento de Cauchy-Green para depois se calcular as novas "componentes" da deformação não linear de engenharia.

O tensor de Cauchy-Green é realmente um tensor, pois da equação (2.30) se escreve:

$$\overline{A} = R^t \cdot A \cdot R \qquad \text{ou} \qquad A = R \cdot \overline{A} \cdot R^t \tag{5.27}$$

assim, de (5.16)

$$C = A^t \cdot A = R \cdot \overline{A}^t \cdot R^t \cdot R \cdot \overline{A} \cdot R^t = R \cdot \overline{A}^t \cdot \overline{A} \cdot R^t = R \cdot \overline{C} \cdot R^t \tag{5.28}$$

ou resumidamente:

$$C = R \cdot \overline{C} \cdot R^t \qquad \text{ou inversamente} \qquad \overline{C} = R^t \cdot C \cdot R \tag{5.29}$$

ou seja, vale a fórmula do giro de tensores para o tensor dealongamento de Cauchy-Green.

5.3. Deformação de Green-Lagrange

Analisando-se as "componentes" de deformação não linear de engenharia e seu significado geométrico intuitivo, constata-se que as deformações longitudinais nas direções cartesianas podem ser medidas com o uso dos termos da diagonal do tensor de alongamento de Cauchy-Green e que as componentes de distorção podem ser medidas com as componentes fora da diagonal deste tensor.

Assim, define-se o tensor de Deformações de Green-Lagrange (ou apenas Green) como:

$$E = \frac{1}{2}\left(C - I\right) \qquad \text{ou} \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{5.30}$$

Para melhor esclarecer as passagens a serem apresentadas nos próximos itens, escreve-se também o tensor de Green como função dos deslocamentos. Para tanto, lembra-se da definição de deslocamento já usada na equação (5.4), escrita em notação indicial como:

$$u_i\left(x_1, x_2, x_3\right) = y_i\left(x_1, x_2, x_3\right) - x_i \tag{5.31}$$

Assim, o gradiente do deslocamento é escrito como:

$$u_{i,j}\left(x_1, x_2, x_3\right) = y_{i,j}\left(x_1, x_2, x_3\right) - \delta_{ij} \tag{5.32}$$

ou, em notação dyadica:

$$\nabla\vec{u} = A - I \qquad \text{ou} \qquad A = \nabla\vec{u} + I \tag{5.33}$$

Substituindo-se a segunda das (5.33) em (5.16) resulta:

$$C = \left(\nabla\vec{u} + I\right)^t \cdot \left(\nabla\vec{u} + I\right) = \nabla\vec{u}^t \cdot \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t + \nabla\vec{u} + I \tag{5.34}$$

Conseqüentemente, a deformação de Green é dada em função do deslocamento por:

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u}^t \cdot \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t + \nabla\vec{u}\right) \qquad \text{ou} \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i}u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,j}\right) \tag{5.35}$$

5.4. Deformação linear

Como comentado no início deste material, a maior parte da disciplina aqui abordada tem interesse na elasticidade linear, porém é importante localizar o estudante nas simplificações da linearização das soluções. Começa-se relacionando com maior detalhe os elementos da diagonal do tensor de deformações de Green com as "componentes" longitudinais cartesianas da deformação de engenharia, por exemplo, fazendo-se $\vec{u} = \vec{i}$ determina-se

$$c_{u(u)} = \left(1,0,0\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_{11} \tag{5.36}$$

que, juntamente com as equações (5.30), (5.24) ou (5.36) resulta:

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + 1\right)\left(\lambda_1 - 1\right) = \frac{\left(\lambda_1 + 1\right)}{2}\varepsilon_{11} \tag{5.37}$$

Quando a deformação é pequena, o alongamento relativo é muito próximo da unidade $\left(\lambda_1 \cong 1\right)$, pois não há mudança significativa de comprimento das fibras do material, portanto:

$$E_{11} \cong \varepsilon_{11}, \qquad E_{22} \cong \varepsilon_{22} \qquad E_{33} \cong \varepsilon_{33} \tag{5.38}$$

Outra forma de se chegar à mesma conclusão é escrevendo-se E_{11} a partir da equação (5.35), ou seja, em função do deslocamento, como,

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(u_{1,1}u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}\right) \tag{5.39}$$

Lembrando-se, a partir das equações (5.31), (5.32), (5.33) e (5.14), que,

$$u_{1,1} = (y_1 - x_1)_{,1} = y_{1,1} - 1 = \lambda_1 - 1 = \varepsilon_{11} \tag{5.40}$$

Escreve-se,

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{11}\right) = \frac{\varepsilon_{11}^2}{2} + \varepsilon_{11} \tag{5.41}$$

Assim, quando a deformação longitudinal é pequena, vale a equação (5.38). Observando-se a equação (5,38) aflora a intenção de se desprezar $\nabla\vec{u}^t \cdot \nabla\vec{u}$ da representação (5.35) para representar pequenas deformações. Neste sentido, deve-se mostrar que, quando a distorção é pequena, os termos fora da diagonal de E se aproximam dos termos correspondentes do tensor de deformação linear, definido como,

$$\varepsilon^{lin} = \frac{\nabla\vec{u}^t + \nabla\vec{u}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ij}^{lin} = \frac{\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}{2} \tag{5.42}$$

Seja a semi-distorção não linear de engenharia medida no plano formado por $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = \vec{j}$ (equação (5.23)), ou seja:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{c_{12}}{\lambda_1\lambda_2}\right)\right) \tag{5.43}$$

Realizando-se a expansão em série de Taylor do arco-cosseno em torno de $c_{12} = 0$ tem-se:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{c_{12}}{\lambda_1\lambda_2} + O\left(c_{12}^3\right)\right)\right) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{c_{12}}{2} + \frac{1}{2}O\left(\left(\frac{c_{12}}{\lambda_1\lambda_2}\right)^3\right) \tag{5.44}$$

Introduzindo-se a hipótese de pequenas deformações para qualquer compoente, tem-se $\lambda_i \cong 1$ e, portanto, resulta:

$$\varepsilon_{ij}^{lin} \cong \frac{1}{2}c_{ij} = E_{ij} \qquad \text{para} \qquad i \neq j \tag{5.46}$$

Desta forma, conclui-se que a deformação linear (pequenos deslocamentos, deformações e rotações) é dada pela expressão (5.42).

5.5. Limitações da deformação linear para movimentos de corpo rígido

Apesar de se ter mencionado que a medida de deformação linear vale para pequenas deformações, deslocamentos e rotações, a prova de que os deslocamentos e rotações devem ser pequenos ainda não foi apresentada. Para tanto, tomam-se funções de translação e de rotação pura sobre um corpo qualquer e se verifica se a deformação resultante é nula. Caso a deformação resultante não seja nula a medida de deformação possui limitações, ou, utilizando-se o jargão científico, é não objetiva.

5.5.1. Movimento de corpo rígido - Translação

A função mudança de configuração que representa translação é:

$$y_i = f_i\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_i + d_i \tag{5.47}$$

onde d_i é o vetor deslocamento constante, assim,

$$u_i\left(x_1, x_2, x_3\right) = d_i \tag{5.48}$$

Desta forma encontram-se:

$$\nabla\vec{f} = A = I \qquad\qquad \nabla\vec{u} = 0 \tag{5.49}$$

Aplicando-se as equações (5.30), (5.35) ou (5.42) conclui-se que tanto a deformação de Green quanto a deformação linear não registram deformação para translações de corpo rígido.

5.5.2. Movimento de corpo rígido - Rotação

Para simplificar, em uma representação bidimensional, a função mudança de configuração que representa rotação pura é dada por:

$$\begin{matrix} y_1 = x_1\cos(\theta) - x_2\mathrm{sen}(\theta) \\ y_2 = x_1\mathrm{sen}(\theta) + x_2\cos(\theta) \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} u_1 = x_1\cos(\theta) - x_2\mathrm{sen}(\theta) - x_1 \\ u_2 = x_1\mathrm{sen}(\theta) + x_2\cos(\theta) - x_2 \end{matrix} \tag{5.50}$$

Portanto,

$$A = R, \qquad C = R^t \cdot R = I, \qquad E = 0 \tag{5.51}$$

$$\nabla\vec{u} = R - I, \quad \left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t\right) = R + R^t - 2I, \quad \varepsilon^{lin} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

ou seja, para rotação de corpo rígido a deformação de Green é objetiva, mas a deformação linear não é, pois registra deformação onde não há.

Entretanto, se o giro for pequeno $\cos\theta \to 1$ a deformação inadequada desaparece. Assim, a deformação linear pode ser utilizada como boa aproximação quando os giros forem pequenos.

A figura 5.4 mostra como um elemento infinitesimal contido em um corpo que sofre grandes deslocamentos está sujeito a grandes rotações e, portanto, a deformação linear fica limitada a pequenos deslocamentos, rotações e deformações. Desta forma, uma análise que utiliza a medida linear de deformação, equação (5.42), é chamada de análise linear geométrica.

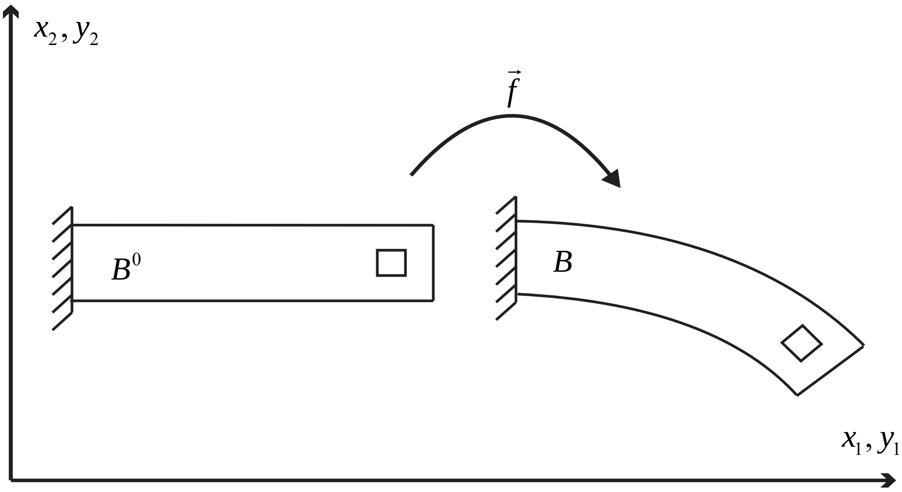


Figura 5.4 - Grandes rotações de um infinitésimo em corpo flexível

5.6. Deformações e direções principais.

Tendo em vista as definições (5.30) e (5.42) tanto a deformação de Green, quanto a deformação linear são tensores. Observe aqui que a definição de semi-distorção que aparece na equação (5.42), possibilita definir a deformação linear como tensor. Assim, todas as operações definidas para tensões são válidas tanto para medidas de deformação linear quanto para deformações não lineares objetivas, como a deformação de Green. Assim, o giro do tensor de deformações pode ser escrito como feito para tensões pela equação (3.20). No que diz respeito à deformação linear, que a partir de agora será chamada apenas de ε, é importante se definir operacionalmente as deformações e direções principais. Obviamente que estas fórmulas também valem para a deformação de Green.

Na representação tridimensional, as deformações principais correspondem às deformações longitudinais máximas que ocorrem em um ponto do contínuo. Sua determinação é feita através da solução do seguinte problema de auto-valor e auto-vetor:

$$\varepsilon \cdot \vec{n} = \varepsilon^p . \vec{n} \tag{5.53}$$

onde ε^p é um escalar e corresponde às deformações principais (auto-valores) e $\vec{n}$ são as direções principais. Segundo as direções principais não ocorre distorção. A solução da equação (5.53) é semelhante à solução da equação (3.29). Neste caso, a equação característica do problema fica:

$$\left(\varepsilon^p\right)^3 - I_1\left(\varepsilon^p\right)^2 + I_2\varepsilon^p - I_3 = 0 \tag{5.54}$$

onde

$$I_1 = \varepsilon_{ii}\,,\ I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} \text{ e } I_3 = Det\left(\varepsilon\right) \tag{5.55}$$

Como as deformações principais não podem ser dependentes do sistema de coordenadas adotado para se solucionar determinado problema físico, chamam-se as constantes I_1, I_2 e I_3 como invariantes de deformação

O fato do tensor de deformações ser simétrico garante a existência de três raízes reais para a equação característica, e podem ser calculadas por procedimentos numéricos (Jacobi por exemplo) utilizados em calculadoras, ou de forma fechada pelas expressões de Cardan transcritas abaixo,

$$R = \frac{1}{2}\left(-\frac{I_1 I_2}{3} + I_3 + \frac{2I_1^3}{27} \right) \tag{5.56a}$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{I_1^2}{3} - I_2 \right)^3 - R^2} \tag{5.56b}$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + Q^2} \tag{5.56c}$$

$$\theta = arctg\left(Q / R\right) \qquad \begin{cases} R > 0 & \Rightarrow 0 < \theta < \pi / 2 \\ R < 0 & \Rightarrow \pi / 2 < \theta < \pi \end{cases} \tag{5.56d}$$

$$\varepsilon_1^p = 2\sqrt[3]{\rho}\, cos\left(\theta / 3\right) + \frac{I_1}{3} \tag{5.56e}$$

$$\varepsilon_2^p = 2\sqrt[3]{\rho}\, cos\left(\left(2\pi - \theta\right) / 3\right) + \frac{I_1}{3} \tag{5.56f}$$

$$\varepsilon_3^p = 2\sqrt[3]{\rho}\, cos\left(\left(2\pi + \theta\right) / 3\right) + \frac{I_1}{3} \tag{5.56g}$$

Conhecido cada auto-valor, a busca do auto-vetor correspondente é feita exatamente como apresentado para tensões no capítulo 3.

A semi-distorção máxima é dada por:

$$\varepsilon_{max} = max\left\{ \frac{\left|\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p\right|}{2}, \frac{\left|\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p\right|}{2}, \frac{\left|\varepsilon_3^p - \varepsilon_2^p\right|}{2} \right\} \tag{5.57}$$

e, portanto, a distorção máxima fica $\gamma_{\max} = 2\varepsilon_{\max}$. As direções de semi-distorção máximas formam ângulo de 45^o com as direções principais e as deformações longitudinais segundo estas direções valem $\varepsilon_{long}(45^o) = \dfrac{\varepsilon_i^p + \varepsilon_j^p}{2}$ para o plano que forma 45^o com os planos principais $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Pode-se definir o plano octaédrico em deformações da mesma forma que para tensões. Apenas comenta-se que as direções principais das deformações nem sempre coincidem com as direções principais das tensões. Este comportamento depende das propriedades elásticas do corpo analisado, como será mostrado no capítulo 6.

Voltando-se ao comentário após a equação (4.13) sobre a busca da solução da distribuição de tensões no sólido analisado, comenta-se que, na elasticidade linear, a expressão (5.42) gera seis equações que relacionam os três deslocamentos às seis componentes de deformação. Assim, aumentou-se o número de incógnitas para 15 ($\sigma, \varepsilon, \vec{u}$) e o número de equações para nove, equações (4.6) e (5.42). Para a solução do problema faltam as seis relações tensão/deformação que serão abordadas no próximo capítulo.

É importante comentar que o procedimento de cálculo dos invariantes de qualquer tensor simétrico de ordem 2, como por exemplo a deformação de Green e o alongamento de Cauchy Grenn são exatamente os mesmos descritos para tensão e deformação linear. Procedimento análogo pode ser seguido para o gradiente da mudança de configuração A, lembrando que este não é simétrico e a solução da equação característica pode ser mais complicada.

5.7. Equações de compatibilidade em deformações

A equação (5.42) contém seis expressões que relacionam diretamente os deslocamentos às deformações lineares. Caso se conheça a distribuição de deslocamentos no corpo analisado, a distribuição de deformações é facilmente encontrada aplicando-se a equação (5.42). Entretanto, na maior parte das soluções analíticas da elasticidade linear determina-se primeiramente o campo de tensões ou deformações para então se determinar o campo de deslocamentos no corpo.

Na determinação destas soluções analíticas, ou mesmo na proposição de soluções aproximadas, deve-se saber que não é com qualquer campo de deformações que se constroem soluções completas. As restrições dos possíveis campos de deformação são chamadas de equações de compatibilidade em deformações e são determinadas a partir de operações diferenciais e combinações entre as componentes de deformação linear, usando-se as expressões contidas em (5.42).

Por exemplo, toma-se de (5.42) explicitamente o cálculo de ε_{11}, ε_{22} e ε_{12}, ou seja:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \qquad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \qquad \varepsilon_{12} = \left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)/2 \tag{5.58}$$

derivando-se ε_{11} duas vezes em relação à x_2 e ε_{22} duas vezes em relação a x_1 e somando-se encontra-se:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = u_{1,221} + u_{2,112} \tag{5.59}$$

agora aplicando-se a derivada cruzada sobre ε_{12} encontra-se:

$$\varepsilon_{12,12} = \left(u_{1,221} + u_{2,112}\right)/2 \tag{5.60}$$

e, portanto, tem-se:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\,\varepsilon_{12,12} = \gamma_{12,12} \tag{5.61}$$

Da mesma forma, com mais trabalho algébrico se encontram:

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} = 2\,\varepsilon_{23,23} = \gamma_{23,23} \tag{5.62}$$

$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} = 2\,\varepsilon_{13,13} = \gamma_{13,13} \tag{5.63}$$

$$\varepsilon_{11,23} = \left(-\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{13,2} + \varepsilon_{12,3}\right)_{,1} \tag{5.64}$$

$$\varepsilon_{22,13} = \left(\varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{13,2} + \varepsilon_{12,3}\right)_{,2} \tag{5.65}$$

$$\varepsilon_{33,12} = \left(\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{12,3}\right)_{,3} \tag{5.66}$$

Estas seis equações são dependentes e podem ser ainda transformadas em 3 equações diferenciais de quarta ordem independentes. Entretanto, este processo será realizado nas técnicas de soluções após a apresentação das relações tensão-deformação.

6. Relações constitutivas ou tensão-deformação

As definições de tensão e deformação apresentadas nos capítulos anteriores não dependem do material constituinte do sólido, mas as relações entre estas grandezas sim e são muitas vezes chamadas de relações constitutivas. Como os materiais são diversos é natural que existam diversas leis que relacionam as tensões às deformações.

Em geral, para níveis baixos de tensão, a maioria dos materiais estruturais apresenta comportamento elástico, ou seja, quando solicitados mudam de forma e quando a solicitação deixa de existir retornam à configuração inicial. Nesta condição a lei constitutiva é denominada elástica.

Mesmo para baixos níveis de tensão alguns materiais possuem comportamento viscoso, isto é, sua lei constitutiva dependente da taxa temporal (velocidade) da aplicação das solicitações externas. Quando o material apresenta comportamento viscoso, mas retorna à configuração indeformada na ausência das ações externas, a lei constitutiva é denominada viscoelástica.

Quando o nível de tensão aumenta significativamente os materiais começam a apresentar uma mudança de comportamento irreversível. Isto ocorre porque as ligações entre grãos, cristais, moléculas e átomos podem estar sendo desfeitas. Usualmente, para os níveis de tensão associados à mecânica dos sólidos, a deterioração do material é vista de forma contínua e apenas as ligações entre grãos e cristais são consideradas. Cada material apresenta diferentes comportamentos na evolução da deterioração. De forma geral dois extremos podem ser mencionados, a deterioração plástica para a qual durante a evolução da deterioração o material continua apresentando coesão; e a deterioração frágil para a qual a coesão do material se degenera rapidamente. Na primeira condição o material é chamado de dúctil e sua lei constitutiva elastoplástica; na segunda condição o material é chamado de frágil e a teoria do dano é empregada para se definir a lei constitutiva associada.

Neste texto, será abordado o comportamento elástico dos materiais e, antes de se definir as leis constitutivas elásticas, é importante se apresentar os principais critérios de resistência ou falha, que, neste curso, limitam os níveis de tensão a serem impostos nos materiais para que estes se comportem de maneira elástica. Em cursos mais avançados, as superfícies geradas pelos critérios de resistência passam a controlar, além do limite de falha, a sua evolução.

6.1. Principais critérios de resistência:

Uma informação de interesse é que os materiais dúcteis apresentam grandes deformações antes de atingirem a situação de ruína, enquanto os materiais frágeis rompem com níveis muito pequenos de deformação. É usual dizer de forma simplista que os materiais dúcteis avisam quando ocorrerá a ruína, enquanto os materiais frágeis rompem sem aviso.

Deve-se observar ainda que materiais considerados dúcteis na temperatura ambiente podem romper de forma frágil (sem aviso) em baixas temperaturas, como, por exemplo, em aeronaves e espaçonaves. Neste texto as tensões limite de referência indicam que o material inicia a sua degeneração, ou seja, antes de atingi-las o material continua elástico. Como não será tratado o comportamento não linear do material após o limite elástico, as superfícies serão chamadas de superfícies de ruína, apesar de certos materiais ainda terem uma boa reserva de resistência após o limite elástico.

6.1.1. Critério de Rankine

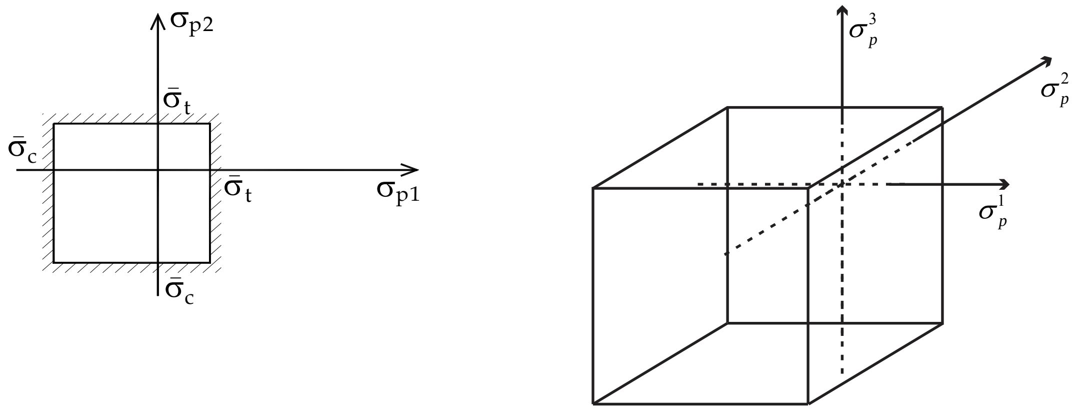
O critério de resistência de Rankine (1820-1872), ou critério da máxima tensão normal, é um critério muito simples e aplicado no passado a materiais frágeis. Limita as tensões principais a valores limite de tração ($\bar{\sigma}_t$) ou compressão ($\bar{\sigma}_c$), ou seja:

$$\bar{\sigma}_c < \sigma_1^p < \bar{\sigma}_t \tag{6.1}$$

$$\bar{\sigma}_c < \sigma_2^p < \bar{\sigma}_t \tag{6.2}$$

$$\bar{\sigma}_c < \sigma_3^p < \bar{\sigma}_t \tag{6.3}$$

Para materiais frágeis é usual ter-se $\left|\bar{\sigma}_t\right| < \left|\bar{\sigma}_c\right|$. Sua representação no espaço das tensões principais pode ser visto na figura 6.1. Um estado de tensões ($\sigma_1^p, \sigma_2^p, \sigma_3^p$) no interior do espaço definido pela superfície do critério é seguro, enquanto um exterior não é seguro.



(a) $\sigma_p^3 = 0$ (b) Espaço das tensões principais

Figura 6.1 – Representação do critério de Rankine

No espaço tridimensional das tensões principais observa-se que o eixo onde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (trissetriz dos eixos coordenados) representa a parcela hidrostática de um estado tensão, veja, por exemplo, a equação (3.69). Assim, o critério de Rankine é sensível à parcela hidrostática, pois caso esta cresça (ou diminua) o ponto que representa o estado de tensão pode sair da região delimitada pela superfície de ruína e, assim, o material pode romper. Ainda, na representação no espaço das tensões principais a componente desviadora é entendida como um vetor ortogonal ao eixo hidrostático que indica o quanto o estado de tensão estudado desvia de um estado hidrostático, veja as expressões (3.65) até (3.69) e figuras 3.11 e 6.3.

Na prática, verifica-se o critério aplicando-se as expressões (6.1) à (6.3), quando satisfeitas o material é seguro, caso contrário há ruína.

6.1.2. Critério de Tresca ou da máxima tensão de cisalhamento

O critério de resistência de Tresca (1814-1885), ou critério da máxima tensão de cisalhamento é aplicado a materiais dúcteis. Em ensaios de tração (ou compressão) simples observa-se que os planos de ruina de materiais dúcteis formam 45^o em relação ao plano principal, além disso, observa-se que a ruína é independente da componente hidrostática de tensão. Assim, a expressão deste critério é dada por:

$$\left|\tau_{max}\right| = max\left\{\left|\sigma_1^p - \sigma_2^p\right|/2;\left|\sigma_3^p - \sigma_2^p\right|/2;\left|\sigma_1^p - \sigma_3^p\right|/2\right\} < \bar{\tau} = \bar{\sigma}/2 \qquad (6.4)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a resistência à tração ou compressão uniaxial aferida em ensaio correlato.

Na figura 6.2 apresentam-se três representações do critério de Tresca. A primeira no plano de Mohr (σ_n,τ), a segunda no espaço das tensões principais e a terceira considerando-se $\sigma_3^p = 0$. Na representação no plano de Mohr, caso o maior círculo que representa o estado de tensão estudado, veja figura 3.9, não intercepte as linhas limite o estado de tensão é seguro. Nas representações tridimensional ou bidimensional um ponto interno (estado de tensão) é seguro e um externo é não seguro. Na prática, verifica-se o critério aplicando-se a expressão (6.4), quando satisfeita o material é seguro, caso contrário há ruína.

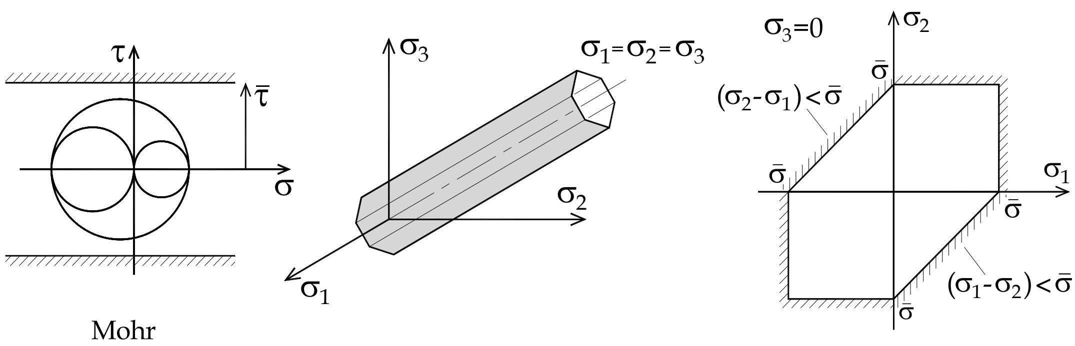


Figura 6.2 – Representações do critério de Tresca

Observa-se na representação tridimensional que a variação da componente hidrostática (segundo o eixo inclinado onde $\sigma_1^p = \sigma_2^p = \sigma_3^p$) não gera ruína e que a ruína depende apenas da componente desviadora, ortogonal ao eixo hidrostático.

6.1.3. Critério de von-Mises ou da máxima tensão octaédrica

Este critério é atribuído à von-Mises (1883-1953) e é aplicado aos materiais dúcteis. Portanto é independente da componente hidrostática de tensão. Também é chamado de

Critério da Máxima energia de Distorção e pode ser considerado uma regularização do critério de Tresca. Sua fórmula é dada por:

$$\sqrt{\left(\sigma_1^p-\sigma_2^p\right)^2+\left(\sigma_1^p-\sigma_3^p\right)^2+\left(\sigma_2^p-\sigma_3^p\right)^2}<\sqrt{2}\bar{\sigma}=2\sqrt{2}\bar{\tau}=3\bar{\tau}_{oct} \tag{6.5}$$

Sua analogia com o valor da tensão de cisalhamento octaédrica (ou tensão desviadora no plano octaédrico) pode ser vista comparando-se a equação (6.5) com as equações (3.63) e (3.69).

Outra informação importante para futuras leituras referentes à plasticidade é que se definindo o segundo invariante do tensor desviador,veja equação (3.34), como:

$$J_2=-\left[\begin{vmatrix}\sigma_{22}^{des} & \sigma_{23}^{des}\\ \sigma_{32}^{des} & \sigma_{33}^{des}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{11}^{des} & \sigma_{13}^{des}\\ \sigma_{31}^{des} & \sigma_{33}^{des}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{11}^{des} & \sigma_{12}^{des}\\ \sigma_{21}^{des} & \sigma_{22}^{des}\end{vmatrix}\right] \tag{6.6}$$

pode-se mostrar que o termo no interior da raiz quadrada da equação (6.5) vale $6J_2$, valor muito empregado para desenvolvimento de métodos numéricos para análise não linear física.

As representações bidimensional $\sigma_3^p=0$ e tridimensional do critério podem ser vistas na figura 6.3. Nesta figura, também é mostrado o significado da tensão de cisalhamento octaédrica, que, como já foi definido, é a resultante das tensões de cisalhamento no plano definido pelo vetor trissetor das direções principais. Nesse plano a tensão normal é igual à tensão hidrostática, $\sigma_n=\sigma_h$.

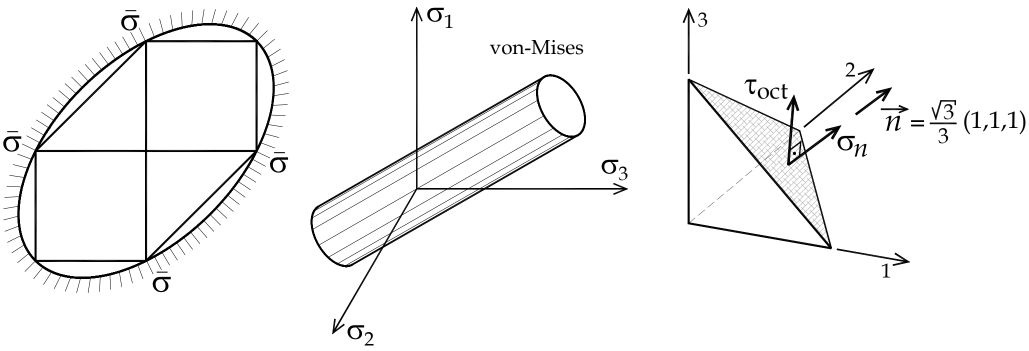


Figura 6.3 – Representações do Critério de von-Mises

Como se pode observar na representação onde $\sigma_3^p=0$, o critério de von-Mises coincide com o de Tresca para estados uniaxiais de tensão e é menos conservador para outras situações. Na prática, verifica-se o critério aplicando-se a expressão (6.5), quando satisfeita o material é seguro, caso contrário há ruína.

6.1.4. Critério de Mohr-Coulomb

Este critério é aplicado a materiais frágeis e é atribuído à Otto-Mohr (1835-1918). É associado ao nome de Coulomb por existir uma explicação fenomenológica associada ao atrito no que diz respeito à dependência da ruína de materiais frágeis às tensões hidrostáticas. Quanto maior a compressão hidrostática maior a resistência ao cisalhamento (deslizamento relativo entre superfícies paralelas – atrito) do material e quanto maior a tração hidrostática, menor essa resistência.

Quando $\sigma_3^p = 0$ uma representação muito simples do critério pode ser adaptada do critério de Tresca (figura 6.2) considerando resistências diferentes à tração e compressão, veja figura 6.4.

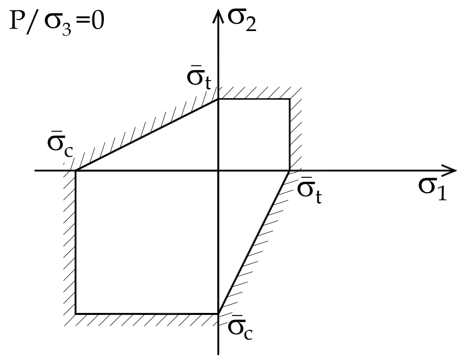


Figura 6.4 – Representação gráfica do Critério de Mohr-Coulomb para $\sigma_3^p = 0$

Em geral, a tensão de ruptura à tração é menor que o módulo da tensão de ruptura à compressão e o trecho onde as tensões principais possuem sinal trocado são unidos por linhas retas. Esta figura pode ser confirmada de forma aproximada realizando-se ensaios em laboratório e representa uma correção significativa no critério de Rankine.

No caso de $\sigma_3^p = 0$ as expressões do critério são extraídas da figura 6.4 e, caso satisfeitas, implicam estado seguro, caso contrário, indicam ruína. As expressões ficam:

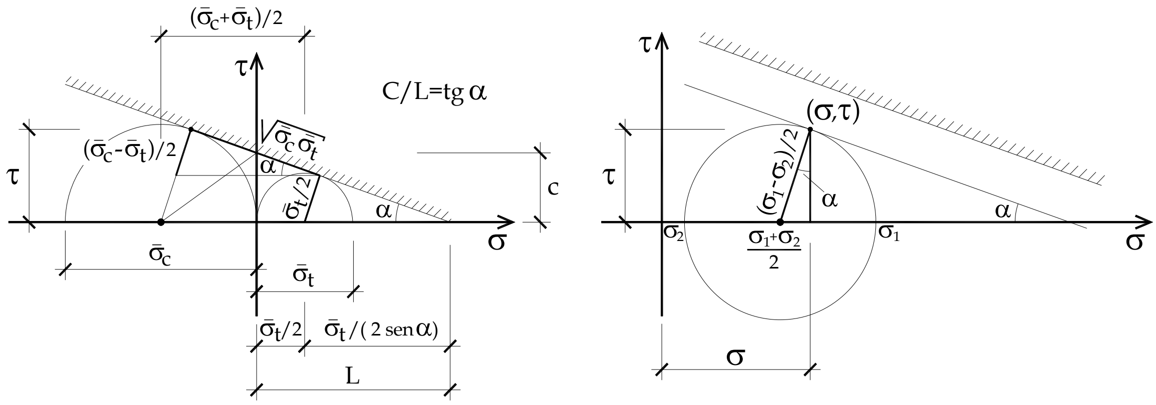
$$\text{Se } \sigma_1^p > 0 \text{ e } \sigma_2^p > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^p < \bar{\sigma}_t \\ \sigma_2^p < \bar{\sigma}_t \end{cases} \tag{6.7a}$$

$$\text{Se } \sigma_1^p < 0 \text{ e } \sigma_2^p < 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}_c < \sigma_1^p \\ \bar{\sigma}_c < \sigma_2^p \end{cases} \tag{6.7b}$$

$$\text{Se } \sigma_1^p > 0 \text{ e } \sigma_2^p < 0 \Rightarrow \frac{|\bar{\sigma}_c|}{\bar{\sigma}_t}\sigma_1^p - \sigma_2^p < |\bar{\sigma}_c| \tag{6.7c}$$

Se $\sigma_1^p < 0$ e $\sigma_2^p > 0 \Rightarrow \sigma_2^p - \dfrac{\bar{\sigma}_t}{|\bar{\sigma}_c|}\sigma_1^p < \bar{\sigma}_t$ (6.7d)

Por serem estas expressões limitadas ao caso onde $\sigma_3^p = 0$ pode-se criar uma envoltória no espaço de Mohr para se estender o estudo ao estado tridimensional de tensão usando as três circunferências da figura 3.9. Isto é feito traçando-se duas circunferências críticas para os estados uniaxiais, uma com apenas $\bar{\sigma}_t$ e outra com apenas $\bar{\sigma}_c$, conforme a figura 6.5.



(a) Traçado da superfície (b) Determinação do par (σ,τ)

Figura 6.5 – Critério de Mohr-Coulomb

A reta tangente aos círculos de Mohr resultantes dos ensaios uniaxiais (tração e compressão) corresponde à superfície limite, ou seja, qualquer círculo de Mohr que intercepte a linha limite indica ruína. Esta afirmação, respeitando a ordem $\sigma_1^p > \sigma_3^p > \sigma_2^p$, é representada pela seguinte fórmula:

$\tau < c - \sigma \cdot tan(\alpha)$ ou $\tau + \sigma \cdot tan(\alpha) < c$ (6.8)

Com o par (σ,τ) mostrado na figura 6.5b dado por:

$$\sigma = \frac{\sigma_1^p + \sigma_2^p}{2} + \frac{|\sigma_1^p - \sigma_2^p|}{2} sen(\alpha),\ \tau = \frac{|\sigma_1^p - \sigma_2^p|}{2} cos(\alpha) \quad (6.9)$$

As constantes aplicadas são:

$$tan(\alpha) = \frac{|\bar{\sigma}_c| - \bar{\sigma}_t}{2\sqrt{|\bar{\sigma}_c|\bar{\sigma}_t}},\ c = \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{\sigma}_c|\bar{\sigma}_t},\ sen(\alpha) = \frac{|\bar{\sigma}_c| - \bar{\sigma}_t}{|\bar{\sigma}_c| + \bar{\sigma}_t},\ cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{|\bar{\sigma}_c|\bar{\sigma}_t}}{|\bar{\sigma}_c| + \bar{\sigma}_t} \quad (6.10)$$

onde α é chamado ângulo de atrito interno e c coesão do material.

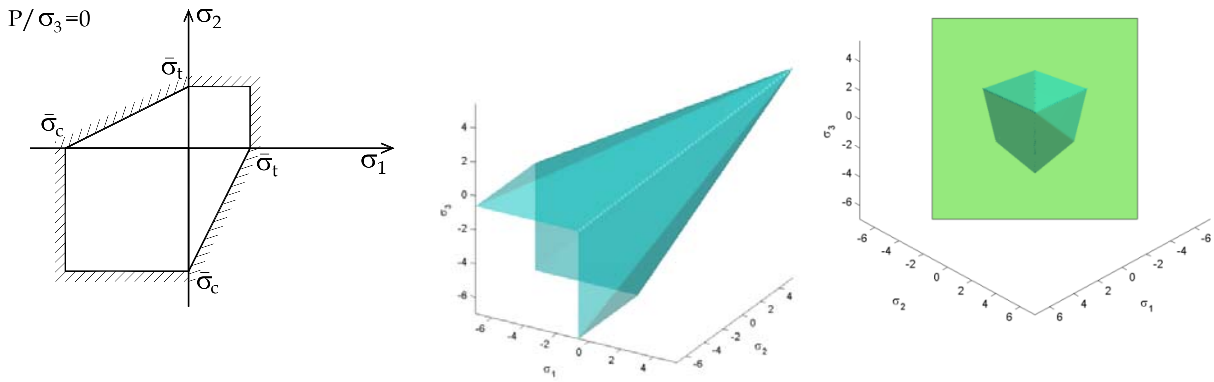
Para se evitar a necessidade de se ordenar as tensões principais, escreve-se a expressão geral tridimensional do critério como:

$$max\left\{\frac{\left|\sigma_{p1}-\sigma_{p2}\right|}{2},\frac{\left|\sigma_1^p-\sigma_3^p\right|}{2},\frac{\left|\sigma_3^p-\sigma_2^p\right|}{2}\right\}+\frac{sen(\alpha)}{2}\cdot\left(\sigma_1^p+\sigma_2^p+\sigma_3^p\right)<\frac{\bar{\sigma}}{2} \qquad (6.11)$$

com

$$\bar{\sigma}=\frac{2\bar{\sigma}_t\left|\bar{\sigma}_c\right|}{\left|\bar{\sigma}_c\right|+\bar{\sigma}_t} \qquad (6.12)$$

Como se pode observar o critério é dependente da tensão hidrostática e da máxima tensão de cisalhamento. De forma grosseira poderia se dizer que é uma adaptação do critério de Tresca para contemplar a influência da tensão hidrostática. A figura 6.6 representa a superfície de ruína no espaço tridimensional das tensões principais. O cruzamento desta superfície com o plano $\sigma_3^p=0$ resulta na figura 6.4.



(a) $\sigma_3^p=0$ (b) Espaço das tensões principais (c) Vista pelo vetor trissetor (plano de Naday)

Figura 6.6 – Critério de Mhor-Coulomb

Na prática, verifica-se o critério aplicando-se a expressão (6.11), quando satisfeita o material é seguro, caso contrário há ruína.

6.1.5. Critério de Drucker-Prager

Este critério, também aplicado na verificação à ruína de materiais frágeis, é atribuído à Drucker (1918-2001) e Prager (1903-1980). Da mesma forma que o critério de von-Mises pode ser considerado uma suavização do critério de Tresca, o critério de Drucker-Prager pode ser considerado uma suavização da superfície de Mohr-Coulomb. Na figura 6.7 podem-se observar as representações tridimensional e bidimensional $\sigma_p^3=0$ para o critério. A fórmula geral é dada por:

$$\sqrt{\left(\sigma_1^p-\sigma_2^p\right)^2+\left(\sigma_1^p-\sigma_3^p\right)^2+\left(\sigma_3^p-\sigma_2^p\right)^2}+\sqrt{2}sen(\alpha)\cdot\left(\sigma_1^p+\sigma_2^p+\sigma_3^p\right)<\sqrt{2}\bar{\sigma} \qquad (6.13)$$

que no caso de $\sigma_p^3=0$ fica:

$$\sqrt{\left(\sigma_1^p\right)^2+\left(\sigma_2^p\right)^2-\sigma_1^p\sigma_2^p}+sen(\alpha)\left(\sigma_1^p+\sigma_2^p\right)<\bar{\sigma} \qquad (6.14)$$

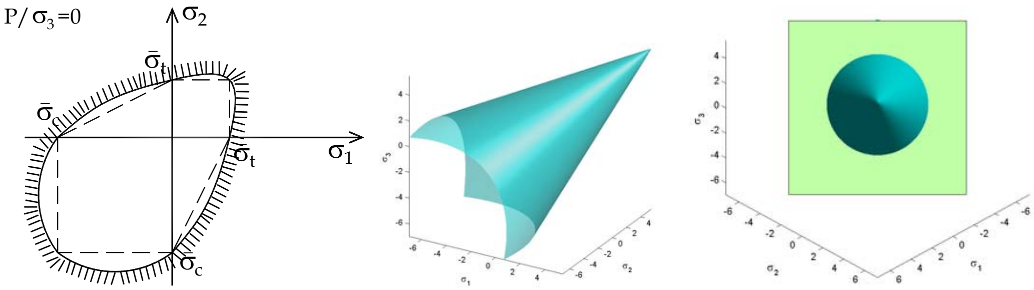


Figura 6.7 – Critério de Drucker-Prager

Todas as constantes do critério são as mesmas do critério de Mohr-Coulomb. No caso em que $\sigma_p^3=0$ deve-se atentar para o fato de que

$$\bar{\sigma}_t=\frac{\bar{\sigma}}{1+sen(\alpha)} \qquad \text{e} \qquad \left|\bar{\sigma}_c\right|=\frac{\bar{\sigma}}{1-sen(\alpha)} \qquad (6.15)$$

indicando a coincidência dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Pragerpara para ensaios uniaxiais.

Na prática, verifica-se o critério aplicando-se a expressão (6.13), quando satisfeita o material é seguro, caso contrário há ruína. Para os objetivos deste curso $\bar{\sigma}$ definirá o limite elástico, ao invés da ruína. A seguir será definida a Lei Constitutiva Elástica, que será admitida no comportamento dos corpos estudados.

6.2. Leis constitutivas elásticas

Atualmente, a abordagem energética é a mais indicada para se descrever a elasticidade, pois a consideração da elasticidade não linear, incluindo grandes deslocamentos e deformações, se torna muito mais simples e direta. Entretanto, como seqüência didática se escolhe (primeiramente) apresentar de forma fenomenológica a Lei de Hooke para materiais isótropos que relaciona, de forma linear, as tensões de Cauchy e as deformações lineares. Portanto, limitada a pequenos deslocamentos, rotações e deformações.

Na seqüência, apresentam-se a generalização da Lei de Hooke contemplando notação tensorial (dyadica e indicial) bem como a generalização dos conceitos energéticos para se construir leis constitutivas mais gerais, lineares e não lineares. Das considerações energéticas resultam propriedades importantes de simetria e um conceito de tensão baseado nos conjugados energéticos. Finalmente, retorna-se à elasticidade linear descrevendo-se alguns tipos de isotropia e anisotropia possíveis de serem representados pelo tensor constitutivo elástico.

6.2.1. Conceituação tridimensional para materiais isótropos

Materiais isótropos são aqueles que possuem propriedades físicas iguais em qualquer direção, os materiais metálicos e cerâmicos, em geral, podem ser considerados isótropos, desde que o tamanho dos grãos seja suficientemente pequeno para garantir uma distribuição homogênea em todo o contínuo.

Para materiais isótropos pode-se tomar o volume elementar da figura 3.5, independentemente de sua orientação, e observar as deformações ocorridas ao se aplicar, isoladamente, cada componente de tensão, veja a figura 6.8. Deve-se lembrar nessas observações, que o corpo é infinitesimal e que as deformações ocorridas são pequenas. No capítulo 5 a definição de pequenas deformações já foi abordada, equação (5.42) onde definiu-se a componente de deformação longitudinal e a distorção ou deformação por cisalhamento. Quando estas definições são observadas à luz das figuras 6.8 e 6.9 também se entende que a deformação longitudinal mede o afastamento relativo entre planos paralelos do contínuo e a distorção mede o deslizamento relativo entre planos paralelos do contínuo.

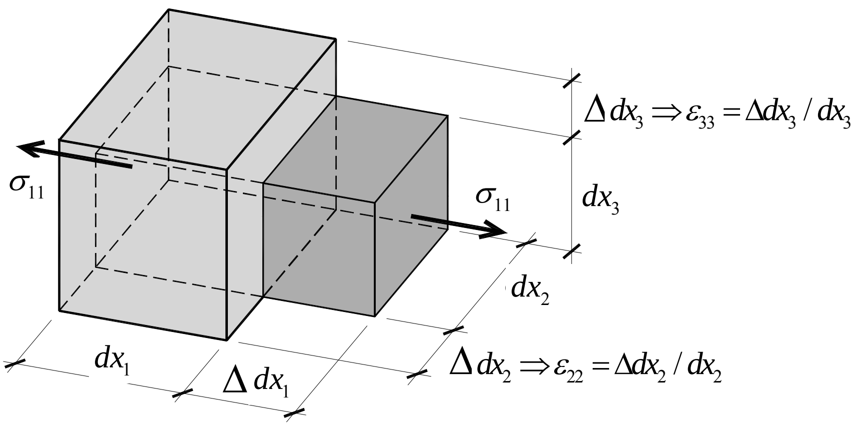


Figura 6.8 – Idealização de ensaio de tração na direção x_1

Em um ensaio de tração (material isótropo) aplicando-se apenas a componente de tensão σ_{11} (em um elemento de volume livre de ações nos outros planos) resultam deformações ε_{11}, ε_{22} e ε_{33} tal como ilustra a figura 6.8. Como o ensaio é uniaxial a relação entre σ_{11} e ε_{11} já é conhecida dos conceitos abordados em cursos de graduação, ou seja, para a Lei de Hooke uniaxial admite-se proporcionalidade entre tensão e deformação:

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} / E \qquad (6.16)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e $\varepsilon_{11} = \Delta dx_1 / dx_1$ é a deformação longitudinal na direção x_1.

Neste caso ocorre redução nas larguras dx_2 e dx_3 do elemento infinitesimal, definidas como as deformações longitudinais $\varepsilon_{22} = \Delta dx_2 / dx_2$ e $\varepsilon_{33} = \Delta dx_3 / dx_3$. Estas reduções, pelo fato do material ser isótropo, são iguais e guardam uma relação (que depende do material) com a deformação ε_{11}, ou seja:

$$\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \qquad (6.17)$$

onde $\nu = |\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}| = |\varepsilon_{33} / \varepsilon_{11}|$ é o coeficiente de Poisson. Substituindo-se (6.16) em (6.17) encontra-se a relação entre as deformações longitudinais e a tensão σ_{11}, desde que esta última seja aplicada isoladamente.

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} / E \qquad \varepsilon_{22} = -\nu\sigma_{11} / E \qquad \varepsilon_{33} = -\nu\sigma_{11} / E \qquad (6.18)$$

Procedendo-se de forma análoga para σ_{22} e σ_{33} (aplicados isoladamente) encontram-se:

$$\varepsilon_{22} = \sigma_{22} / E \qquad \varepsilon_{11} = -\nu\sigma_{22} / E \qquad \varepsilon_{33} = -\nu\sigma_{22} / E \qquad (6.19)$$

$$\varepsilon_{33} = \sigma_{33} / E \qquad \varepsilon_{11} = -\nu\sigma_{33} / E \qquad \varepsilon_{22} = -\nu\sigma_{33} / E \qquad (6.20)$$

Lembrando-se que os deslocamentos, rotações e deformações são pequenos, análise linear, vale a superposição de efeitos, ou seja, quando as três componentes de tensão normal estão aplicadas simultaneamente, resultam as três componentes longitudinais de deformação dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \qquad (6.21)$$

Observe que a notação empregada em (6.21) não é indicial nem dyadica, é chamada notação de Voigt onde os tensores são representados na forma de pseudo-vetores e o tensor constitutivo elástico é representado na forma de uma matriz. Esta notação é particularmente útil na definição fenomenológica das leis constitutivas.

Deve-se observar na figura 6.8, que não surge distorção nos planos do elemento infinitesimal ao se aplicar as componentes de tensão normal. Este tipo de influência cruzada apareceria em materiais anisotrópicos, que possuem propriedades mecânicas diferentes para diferentes direções, como será visto mais adiante.

Seja agora aplicada apenas a componente de tensão σ_{12}, conforme a figura 6.9. Como se observa, surge apenas a distorção γ_{12} ou semi-distorção ε_{12}. Adotando-se também a proporcionalidade entre tensão e deformação resulta:

$$\gamma_{12} = \left(\pi/2-\theta\right) = \sigma_{12}/G \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{12} = \sigma_{12}/2G \qquad (6.22)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal. Para um material isótropo a aplicação da tensão de cisalhamento isolada gera apenas a distorção correspondente, conforme figura 6.9.

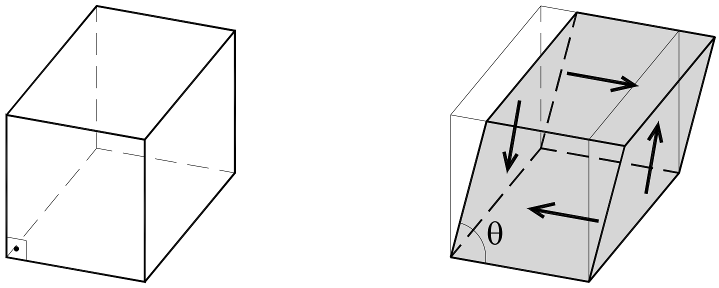


Figura 6.9 – Tensão de cisalhamento σ_{12} e distorção $\left(\pi/2-\theta\right)$ correspondente.

Repetindo-se o procedimento para σ_{13} e σ_{23} escrevem-se:

$$\varepsilon_{13} = \sigma_{13}/2G \qquad (6.23)$$

$$\varepsilon_{23} = \sigma_{23}/2G \qquad (6.24)$$

Reunindo-se as equações (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24) escreve-se a Lei de Hooke generalizada para materiais isótropos na notação de Voigt como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \qquad (6.25)$$

A forma como os tensores de tensão e deformação são escritos na notação de Voigt é chamada de pseudo-vetor e as regras de giro de vetor não são aplicadas. Entretanto a inversa da expressão (6.25) pode ser calculada normalmente, já que esta equação representa apenas um sistema linear de equações, e resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \qquad (6.26)$$

Desta forma, conhecidas (medidas por meio de algum dispositivo) as deformações, encontram-se as tensões em um determinado ponto do sólido isótropo analisado. Em aplicações de engenharia, dispositivos de controle industrial, baseados nas medidas de deformação, são desenvolvidos para aferir o comportamento de equipamentos em tempo real.

Observando-se as equações (6.25) e (6.26) identificam-se as seis equações faltantes para a definição do problema da elasticidade linear para materiais isótropos. Entretanto mais algumas considerações são necessárias para o bom conhecimento do assunto e abertura para futuros desenvolvimentos em outras disciplinas.

6.2.2. A Lei de Hooke como aplicação linear entre tensores de ordem 2

Apesar da notação de Voigt, as expressões (6.25) e (6.26) indicam claramente que a Lei de Hooke é uma relação linear entre tensões e deformações. Ou seja, em notação indicial ou dyadica a Lei de Hooke generalizada fica escrita para um material qualquer como:

$$\sigma_{ij} = c_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \mathcal{C} : \varepsilon \qquad (6.27)$$

onde o tensor $\mathcal{C}$ de ordem 4 é chamado tensor constitutivo elástico e seu inverso $\mathcal{D}$ é chamado de tensor de flexibilidade, que aplicado sobre a tensão resulta:

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijk\ell}\sigma_{k\ell} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \mathcal{D} : \sigma \qquad (6.28)$$

Em uma lei constitutiva geral escrita como a equação (6.27) pode-se imaginar que o tensor constitutivo elástico possui 81 coordenadas (ou constantes elásticas) independentes. Entretanto, pela simetria dos tensores de deformação e de tensão pode-se escrever:

$$\sigma_{ji} = c_{ijk\ell}\varepsilon_{\ell k} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{ij} = c_{ji\ell k}\varepsilon_{k\ell} \qquad (6.29)$$

ou seja o tensor constitutivo elástico apresenta uma simetria intrínseca que reduz o número de constantes independentes à 36. Em princípio, este número seria correspondente a uma matriz constitutiva na representação de Voigt cheia e não simétrica. Entretanto, nos próximos itens será mostrado por princípios energéticos que essa matriz deve ser simétrica, portanto, o número máximo de constantes elásticas independentes para um material anisotrópico é 21.

6.2.3. Energia de deformação para materiais elásticos - conceituação uniaxial

È de interesse, para a obtenção de leis constitutivas elásticas consistentes válidas para pequenas e grandes deformações, a definição da energia específica de deformação e da energia de deformação armazenada em um corpo quando este se deforma. Para tanto, imagine um trecho infinitesimal de barra elástica submetida a uma força uniaxial crescente tal como mostra a Figura 6.10

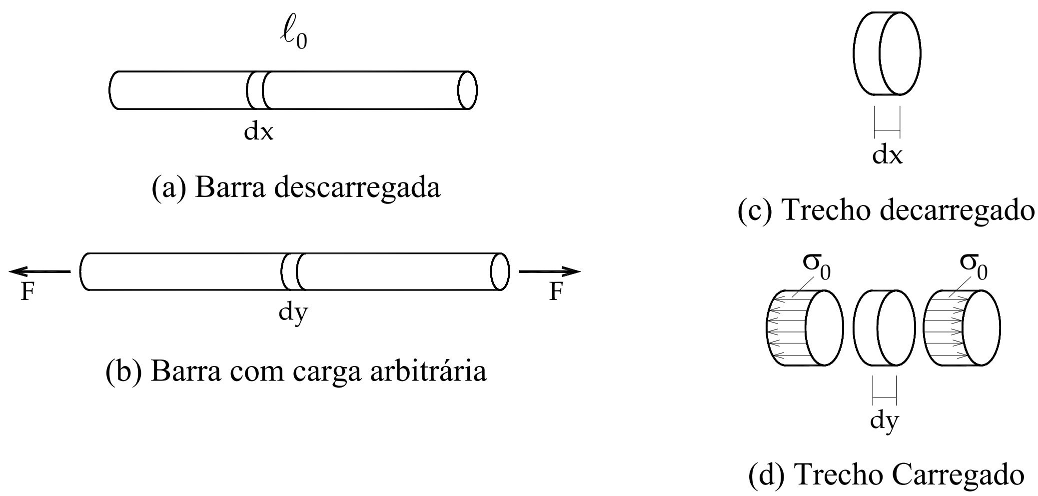


Figura 6.10 – Barra submetida à força uniaxial

A deformação Lagrangiana longitudinal associada à Figura 6.10 já foi definida na equação (5.7) como:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \tag{6.30}$$

sendo dy o comprimento atual do infinitésimo de barra, quando solicitada. O comprimento inicial do infinitésimo é, para a situação descarregada, dx.

Para se definir a energia específica de deformação considera-se a inexistência da energia cinética e o valor de ε cresce de zero até seu valor atual em pequenos acréscimos $d\varepsilon$ independentemente do tempo e em cada nível de tensão $\sigma(\varepsilon)$, gerando o gráfico da Figura 6.11. A energia de deformação por unidade de volume (energia específica de deformação) u_e^L pode ser definida como a área sob o gráfico da figura 6.11 ou o trabalho (por unidade de volume) realizado pela tensão ao imprimir deformação no contínuo:

$$u_e^L = \int_0^{\varepsilon} \sigma^0(\varepsilon) d\varepsilon \tag{6.31}$$

onde o índice L indica Lagrangiano, pois a medida de deformação é escrita tendo como referência a configuração inicial. Da mesma forma, a tensão indicada σ^0 deve ser medida em relação à área inicial (tensão nominal) de forma que esta seja também uma medida Lagrangiana. Observa-se que a dependência de σ^0 em relação à ε já foi constatada de maneira fenomenológica no item anterior, porém, neste item não se pré-define o tipo de dependência da tensão em relação à deformação. Na figura 6.11 a energia específica de deformação é quantificada pela área sob o gráfico que relaciona tensão e deformação.

Para se perceber que u_e^L representa energia por unidade de volume, basta uma simples análise dimensional, ou seja:

$$u_e^L \propto \frac{F}{L^2} = \frac{FL}{L^3} = \frac{W}{V} \tag{6.32}$$

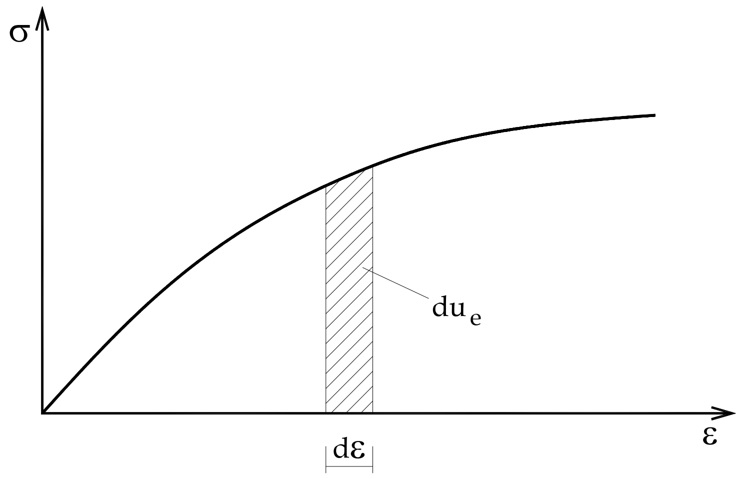


Figura 6.11 – Gráfico Tensão x Deformação uniaxial

A energia de deformação total acumulada no corpo pode ser calculada como a integral da energia específica de deformação (no caso Lagrangiana) sobre o volume inicial do corpo, ou seja

$$U_e = \int_{V_0} u_e^L dV_0 \tag{6.33}$$

Voltando-se à equação (6.31) constata-se que,

$$\sigma^0(\varepsilon) = \frac{du_e^L}{d\varepsilon} \tag{6.34}$$

ou seja, se é possível conhecer uma expressão para a energia específica de deformação (em função da deformação) de um determinado material, a lei constitutiva pode ser escrita pela expressão (6.34). Duas definições estão presentes em (6.34), a primeira é que se existe explicitamente $u_e^L(\varepsilon)$ o material é dito hiperelástico, veja a figura 6.12a, e a segunda é que tensão é "conjugada energética" da deformação, pois é encontrada como a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação.

Por exemplo, para um problema uniaxial, seja a função energia especifica de deformação:

$$u_e^L(\varepsilon) = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \tag{6.35}$$

Então, a tensão conjugada energética de ε é:

$$\sigma^0(\varepsilon) = \frac{\partial u_e^L}{\partial \varepsilon} = E\,\varepsilon \tag{6.36}$$

Se forem consideradas pequenas deformações, a área da seção transversal pode ser considerada constante ($\sigma \cong \sigma^0$) e a relação (6.36) passa a ser a Lei de Hooke uniaxial, ou seja:

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{6.37}$$

Conclui-se, portanto, que a Lei de Hooke uniaxial pode ser escrita na forma quadrática (6.35) para pequenas deformações. Observar que um potencial quadrático é muitas vezes chamado convexo. No jargão da elasticidade matemática os potenciais admitidos como geradores de leis constitutivas consistentes devem ser convexos.

Conceito de Lei Constitutiva não linear (uniaxial)

Ainda com referência aos conceitos de energia de deformação e conjugado energético definem-se, de maneira genérica, leis constitutivas hiperelásticas não lineares. Seja, por exemplo, a seguinte expressão para a energia específica de deformação (uniaxial) encontrada em laboratório para um determinado material:

$$u_e^L = \frac{b}{2}\varepsilon^2 + \frac{c}{3}\varepsilon^3 + \ldots. + a_1\varepsilon^{-1} + a_2\varepsilon^{-2} + \ldots. \tag{6.38}$$

de onde se calcula a tensão nominal conjugada, como:

$$\sigma^0 = \frac{du_e^L}{d\varepsilon} = b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \ldots. \tag{6.39}$$

que resulta em uma relação não linear entre a tensão e a deformação conjugada, veja a figura 6.12. Da equação (6.39) pode-se escrever uma relação diferencial entre tensão e deformação conjugadas, como:

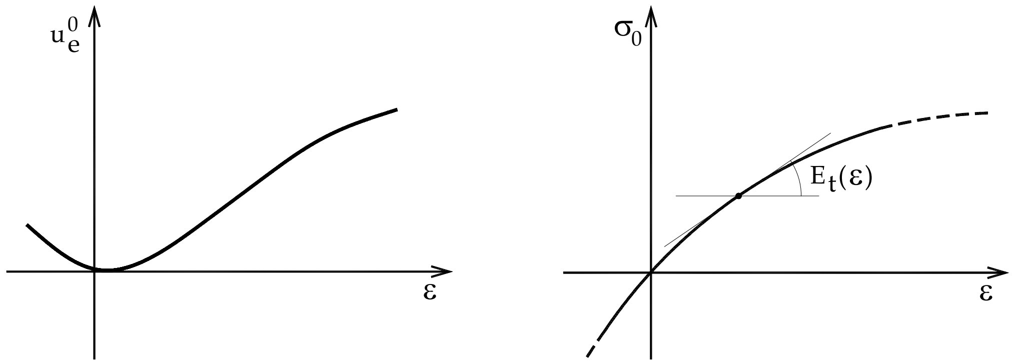
$$d\sigma^0 = \frac{d\sigma^0}{d\varepsilon} d\varepsilon = E_t^0(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (6.40)$$

onde o chamado módulo de elasticidade tangente nominal $E_t^0(\varepsilon)$ é dado por:

$$\frac{d^2 u_e^L}{d\varepsilon^2} = E_t^0(\varepsilon) = b + 2c\varepsilon + ... \qquad (6.41)$$

que pode ser visto no detalhe da figura 6.12b.

O módulo de elasticidade tangente nominal expressa a rigidez do material para cada nível de deformação medido. Desta forma, os conceitos simplificados da elasticidade linear são ampliados para contemplar materiais com comportamento elástico não linear, ou seja, aqueles que não possuem módulo de elasticidade constante, conforme a figura 6.12. Se a deformação for pequena, a tensão nominal passa a ser a tensão de Cauchy e as expressões (6.38) até (6.41) representam uma relação elástica não linear entre a tensão de Cauchy e a deformação linear.



(a) Energia específica de deformação (b) Lei constitutiva não linear

Figura 6.12 – Comportamento hiper-elástico não linear

Outras medidas de tensão (conceituação uniaxial)

Da mesma forma que se estabeleceu a expressão (6.38) como função da deformação linear, pode se estabelecer, para um material qualquer, uma expressão semelhante escrita em função da deformação de Green uniaxial, como:

$$u_e^G = \frac{b}{2} E^2 + \frac{c}{3} E^3 + ... + a_1 E^{-1} + a_2 E^{-2} + ... \qquad (6.42)$$

Caso se deseje que as expressões (6.42) e (6.38) representem um mesmo material, os valores escalares das energias específicas de deformação para as mesmas etapas de ensaios físicos devem ser iguais, o que implica em coeficientes diferentes para calibração dos modelos.

Derivando-se a equação (6.42) em relação à deformação de Green encontra-se uma medida de tensão chamada de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, como:

$$S = \frac{\partial u_e^L}{\partial E} = bE + cE^2 + \ldots \tag{6.43}$$

E o módulo de rigidez tangente da Lei constitutiva em questão, ou módulo constitutivo elástico, é dado pela segunda derivada da energia específica de deformação, como:

$$K(E) = \frac{\partial^2 u_e^L}{\partial E^2} = b + 2cE + \ldots \tag{6.44}$$

As definições apresentadas em (6.42), (6.43) e (6.44) não possuem nenhuma simplificação geométrica e são muito usadas nos desenvolvimentos de códigos computacionais para análise não linear geométrica de sólidos e estruturas. Deve-se comentar que a tensão de Piola-Kirchhof de segunda espécie não possui significado fenomenológico, mas pode ser relacionada com a tensão de Cauchy. Esse assunto é abordado com detalhes em disciplinas de elasticidade não linear.

6.2.4. Energia de deformação e leis constitutivas 3D

À luz da definição uniaxial de energia especifica de deformação e observando as figuras 6.8 e 6.9, conclui-se que cada componente de tensão trabalha na mesma direção da componente associada (conjugada) de deformação e a generalização da equação (6.31) para pequenas deformações, deslocamentos e rotações é escrita como:

$$u_e^L = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) : d\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad u_e^L = \int_0^\varepsilon \sigma_{k\ell}(\varepsilon) d\varepsilon_{k\ell} \tag{6.45}$$

Como a energia específica de deformação é um escalar, sua derivada em relação à deformação (tensor de ordem 2) resulta em um tensor de ordem 2, que pelo conceito de conjugado energético é a tensão conjugada, ou seja:

$$\sigma = \frac{\partial u_e^L}{\partial \varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial u_e^L}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u_e^L}{\partial \varepsilon_{ji}} = \sigma_{ji} \tag{6.46}$$

onde, da simetria do tensor de deformações, resulta diretamente a simetria do tensor de tensões.

Efetuando-se a segunda derivada da energia específica de deformações em relação às componentes de deformação resulta o tensor constitutivo elástico tangente, ou seja:

$$C_{ijk\ell}(\varepsilon) = \frac{\partial^2 u_e^L}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{k\ell}} = \frac{\partial^2 u_e^L}{\partial \varepsilon_{k\ell} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{k\ell ij}(\varepsilon) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C} = \frac{\partial^2 u_e^L}{\partial E \partial E} \tag{6.47}$$

onde uma nova simetria do tensor constitutivo elástico surge, além daquela devida à simetria dos tensores de deformação e tensão dada pela equação (6.29) ou (6.46). Esta nova simetria aplicada à notação de Voigt indica que a "Matriz constitutiva Elástica" é simétrica e, portanto, resultam apenas 21 constantes elásticas independentes a serem determinadas para o material anisotrópico mais geral possível.

Quando a energia específica de deformações é uma forma quadrática, ou seja:

$$u_e^H = u_e^L = \frac{1}{2}\varepsilon_{oz} C_{oz\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \qquad \text{ou} \qquad u_e^H = \frac{1}{2}\varepsilon : \mathcal{C} : \varepsilon \tag{6.48}$$

onde o superscrito H representa Lei de Hooke. A relação tensão deformação passa a ser linear para pequenas deformações, como:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial u_e^H}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{oz}}{\partial \varepsilon_{ij}} C_{oz\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{oz} C_{oz\alpha\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{1}{2}\left(\delta_{oi}\delta_{zj} C_{oz\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{oz} C_{oz\alpha\beta}\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{oz} C_{ozij} \right) = C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{6.49}$$

onde, na última passagem, se usou a simetria do tensor constitutivo da expressão (6.47).

Em notação dyadica apresentam-se muito menos informações, mas fica:

$$\sigma = \frac{\partial u_e^H}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} : \mathcal{C} : \varepsilon + \varepsilon : \mathcal{C} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{1}{2}\left(II : \mathcal{C} : \varepsilon + \varepsilon : \mathcal{C} : II \right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{C} : \varepsilon + \varepsilon : \mathcal{C} \right) = \mathcal{C} : \varepsilon \tag{6.50}$$

onde $II_{ijk\ell} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}$ é o tensor identidade de ordem 4.

Para grandes deslocamentos e rotações, tudo pode ser repetido usando-se, por exemplo, a deformação de Green e o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, sem se preocupar com o significado fenomenológico das grandezas, ou seja:

$$u_e^G = \int_0^E S(E) : dE \qquad \text{ou} \qquad u_e^G = \int_0^E S_{k\ell}(E) dE_{k\ell} \tag{6.51}$$

$$S = \frac{\partial u_e^G}{\partial E} \qquad \text{ou} \qquad S_{ij} = \frac{\partial u_e^G}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial u_e^G}{\partial E_{ji}} = S_{ji} \tag{6.52}$$

$$K_{ijk\ell}(E) = \frac{\partial^2 u_e^G}{\partial E_{ij}\partial E_{k\ell}} = \frac{\partial^2 u_e^G}{\partial E_{k\ell}\partial E_{ij}} = K_{k\ell ij}(E) \tag{6.53}$$

Assumindo-se potencial quadrático para a energia de deformação escrita em deformação de Green resulta a chamada Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhof, ou seja:

$$u_e^{SVK} = \frac{1}{2} E_{oz} K_{oz\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \qquad \text{ou} \qquad u_e^{SHK} = \frac{1}{2} E : \mathcal{K} : E \tag{6.54}$$

Com

$$S_{ij} = K_{ijk\ell} E_{k\ell} \qquad \text{ou} \qquad S = \mathcal{K} : E \tag{6.55}$$

Na disciplina elasticidade não linear ou mecânica do contínuo será demonstrado que se pode relacionar a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie com a tensão de Cauchy em grandes deslocamentos e deformações, como:

$$\sigma = \frac{A \cdot S \cdot A^t}{Det(A)} \tag{6.66}$$

onde A é o gradiente da função mudança de configuração, veja equações (5.9) e (5.10). A equação (6.66) permite a identificação de significado fenomenológico das análises não lineares geométricas.

6.3. Lei de Hooke generalizada - anisotropia e ortotropia elástica

Na seção anterior mostraram-se algumas possibilidades para se construir leis constitutivas elásticas incluindo-se a possibilidade de se considerar anisotropia e não linearidade. Nesta seção pretende-se analisar melhor a Lei de Hooke generalizada definida pelas equações (6.49) ou (6.50), reescritas como

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \mathcal{C} : \varepsilon \tag{6.67}$$

limitando-se os estudos à elasticidade linear, conforme os principais objetivos do texto e da disciplina atendida.

Para um entendimento mais simples das expressões, abre-se a equação (6.67) e identificam-se cada termo transformando a notação tensorial na notação de Voigt, escrevendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1113} & \bar{C}_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2213} & \bar{C}_{2223} \\ & & C_{3333} & \bar{C}_{3312} & \bar{C}_{3313} & \bar{C}_{3323} \\ & & & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1213} & \bar{C}_{1223} \\ & Sim & & & \bar{C}_{1313} & \bar{C}_{1323} \\ & & & & & \bar{C}_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.68}$$

onde $\bar{C}_{ijk\ell} = 2C_{ijk\ell}$ pelo fato de se utilizar apenas uma das componentes simétricas de deformação na expressão (6.68) enquanto as duas são utilizadas em (6.67). Como comentado após a equação (6.47) o tensor constitutivo elástico possui apenas 21 constantes independentes e não nulas para representar um material anisotrópico geral.

Pela inversa expressão (6.68) observa-se que as tensões de cisalhamento causam alongamento e as tensões normais causam distorção em um material anisotrópico. Um material anisotrópico é chamado ortótropo quando existe um sistema de eixos cartesianos especial para o qual a influência cruzada entre cisalhamento e normal e a influência entre cisalhamentos não ocorrem. Nesta situação o tensor constitutivo escrito na notação de Voigt toma a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{C}_{1212} & 0 & 0 \\ & Sim & & & \bar{C}_{1313} & 0 \\ & & & & & \bar{C}_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.69}$$

onde existem 9 constantes independentes.

A figura 6.13 mostra um material composto por uma matriz isótropa e fibras dispostas ortogonalmente entre si que quando considerado homogêneo é um material ortótropo. E a partir desta figura é fácil se identificar o tensor constitutivo elástico com a forma (6.69). Além disso, é possível se construir a relação inversa, a partir de observações fenomenológicas, tal como aquela feita para material isótropo, como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.70}$$

onde, pela simetria, $E_i \nu_{(i)j} = E_j \nu_{(j)i}$ para $i \neq j$. Nesta representação o número de constantes independentes também é 9.

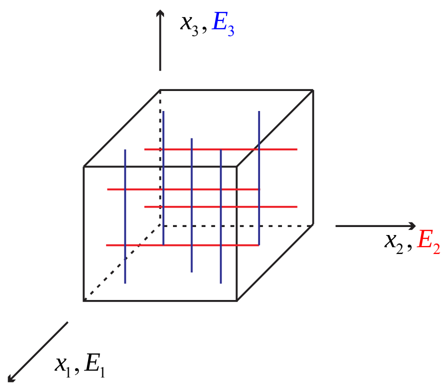


Figura 6.13 – Exemplo de material ortótropo

Na figura 6.14 pode-se ver um exemplo de material transversalmente isótropo, ou seja, pode-se aplicar um giro no tensor constitutivo em torno do eixo de ortotropia (no caso x_3) que o tensor constitutivo elástico não se altera. Neste caso a matriz de flexibilidade fica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E & -\nu_{32}/E & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \tag{6.71}$$

para o qual o número de constantes independentes é 6 E, E_3, ν, $\nu_{13} = \nu_{23}$, $G_{13} = G_{23}$, e G.

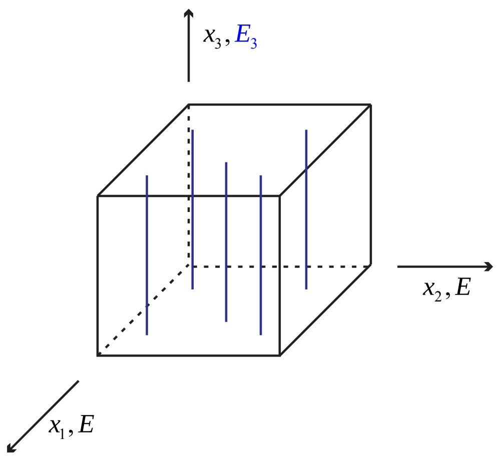


Figura 6.14 – Exemplo de material transversalmente isótropo

Para materiais isótropos, valem as equações (6.25) e (6.26). Atenção para o fato de que, neste caso,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.72}$$

ou seja, existem apenas duas constantes elásticas independentes, veja demonstração a partir da equação (6.73). O mesmo é válido para o material transversalmente isótropo e o número de constantes elásticas independentes cai de 6 para 5.

Seja um estado de tensão particular em um ponto de um material isótropo dada por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ o & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Voigt} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.73}$$

Aplicando-se a Lei de Hooke (6.25) ou (6.67) encontra-se o estado de deformação correspondente.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau/2G \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{dyadica} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \tau/2G & 0 \\ \tau/2G & 0 & 0 \\ o & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

Determinam-se as tensões normais atuantes em dois planos ortogonais com direções dadas por:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\ell} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.75}$$

ou seja, pelas equação (3.19) ou (3.20) encontram-se:

$$\sigma_{n(n)} = \vec{n}^t \cdot \sigma \cdot \vec{n} = \tau \quad \text{e} \quad \sigma_{\ell(\ell)} = \vec{\ell}^t \cdot \sigma \cdot \vec{\ell} = -\tau \tag{6.76}$$

Da mesma forma, aplicando-se (3.20) com deformação no lugar da tensão se encontra o valor da componente $\varepsilon_{n(n)}$

$$\varepsilon_{n(n)} = \vec{n}^t \cdot \varepsilon \cdot \vec{n} = \tau/2G \tag{6.77}$$

É possível também se aplicar (6.25) sobre $\sigma_{n(n)}$ e $\sigma_{\ell(\ell)}$ da quação (6.76) para se encontrar $\varepsilon_{n(n)}$, pois o tensor constitutivo elástico é igual em qualquer direção para um material isótropo, assim,

$$\varepsilon_{n(n)} = \frac{\sigma_{n(n)}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\ell(\ell)} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau \tag{6.78}$$

Mas, a componente de deformação $\varepsilon_{n(n)}$ deve ser única, portanto, igualam-se as expressões (6.77) e (6.78), resultando a expressão (6.72).

É importante se escrever a Lei de Hooke e o tensor constitutivo isótropo em notações indicial e dyadica. Primeiramente se escreve a equação (6.25) de forma aberta:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}\right) = \frac{1}{2G}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \tag{6.79a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2G}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \tag{6.79b}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2G}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \tag{6.79c}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12} \tag{6.79d}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2G}\sigma_{13} \tag{6.79e}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23} \tag{6.79f}$$

Agora se identificam as expressões compactas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\sigma - \frac{\nu}{E}Trac(\sigma)I \tag{6.80}$$

Fazendo-se o mesmo para a expressão (6.26) se escreve:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = 2G\varepsilon + \lambda Trac(\varepsilon)I \tag{6.82}$$

onde λ é chamada constante de Lamé e é dada por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \tag{6.83}$$

Observando-se a equação (6.83) percebe-se que a representação da Lei de Hooke para materiais isótropos não admite coeficiente de Poisson igual a meio ($\nu = 0,5$). Será mostrado na próxima seção que $\nu = 0,5$ indica comportamento isocórico (volume constante) para pequenas deformações. Observando-se a equação (6.82) pode-se escrever o tensor constitutivo elástico para materiais isótropos como:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = 2G\,\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C} = 2G\,I\!I + \lambda\,I \otimes I \tag{6.84}$$

6.4. Deformação volumétrica e Bulk-modulus

A deformação volumétrica é definida como a relação entre a diferença do volume final e inicial de um infinitésimo e o seu volume inicial, ou seja:

$$\varepsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 \tag{6.85}$$

Para se calcular a variação volumétrica é preciso se calcular o volume de um infinitésimo nas configurações inicial e final do sólido, sujeto a uma mudança de configuração, veja a figura 6.15.

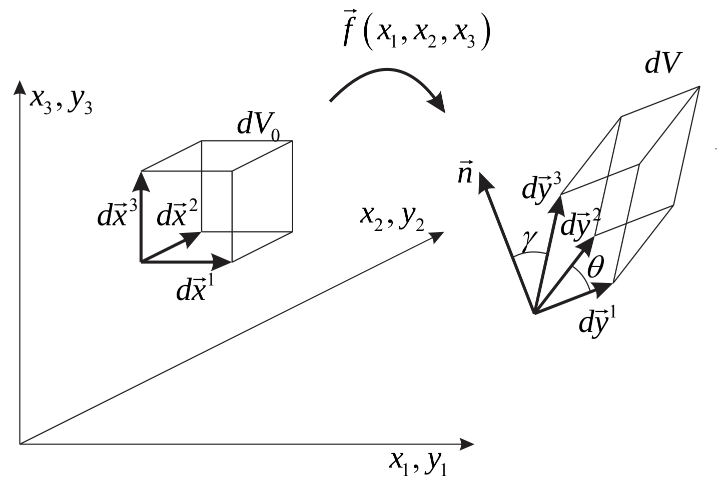


Figura 6.15 - Mudança de volume

Observando-se a figura 6.15, à luz da figura 1.5 e equação (1.36), os infinitésimos de volumes são calculados como:

$$dV_0 = (d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2) \cdot d\vec{x}^3 = dx_1 dx_2 dx_3 \tag{6.86}$$

$$dV = (d\vec{y}^1 \wedge d\vec{y}^2) \cdot d\vec{y}^3 = \xi_{ijk} dy_i^1 dy_j^2 dy_k^3 \tag{6.87}$$

mas, $dy_\alpha^z = a_{\alpha\gamma} dx_\gamma^z$, onde $a_{\alpha\gamma}$ é o gradiente da função mudança de configuração (equação (5.10)), então

$$dV = \xi_{ijk} a_{i\gamma} dx_\gamma^1 a_{j\beta} dx_\beta^2 a_{k\xi} dx_\xi^3 = \xi_{ijk} \left(a_{i1} dx_1 a_{j2} dx_2 a_{k3} dx_3 \right) = \xi_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} dV_0 \tag{6.88}$$

onde utilizou-se o fato de $dx_i^k = \delta_{i(k)} dx_k$, assim,

$$dV = Det(A) dV_0 \tag{6.89}$$

Retornando à equação (6.85) tem-se:

$$\varepsilon_v = Det(A) - 1 \tag{6.90}$$

Uma forma simples de se calcular $Det(A)$ em nossa aplicação, é lembrar que:

$$Det\left(A^t \cdot A\right) = Det(C) = \left(Det(A)\right)^2 \tag{6.91}$$

Além disso, conforme comentários do final da seção 5.6, observa-se que $Det(C)$ é invariante e pode ser calculado em suas direções principais, como:

$$Det(C) = Det\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \left(1+\varepsilon_1^p\right)^2 \left(1+\varepsilon_2^p\right)^2 \left(1+\varepsilon_3^p\right)^2 \tag{6.92}$$

onde usou-se (5.26). De (6.92), (6.91) e (6.90) resulta:

$$\varepsilon_v = \left(1+\varepsilon_1^p\right)\left(1+\varepsilon_2^p\right)\left(1+\varepsilon_3^p\right) - 1 = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p + \varepsilon_1^p\varepsilon_2^p + \varepsilon_1^p\varepsilon_3^p + \varepsilon_2^p\varepsilon_3^p + \varepsilon_1^p\varepsilon_2^p\varepsilon_3^p \quad (6.93)$$

que para pequenas deformações é dado por:

$$\varepsilon_v = \left(1+\varepsilon_1^p\right)\left(1+\varepsilon_2^p\right)\left(1+\varepsilon_3^p\right) - 1 \cong \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (6.93)$$

onde usou-se (5.55). Pode-se escrever (6.93), para pequenas deformações, como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = Trac\left(\varepsilon\right) \quad (6.94)$$

Escrevendo-se o traço de ε em função das tensões, a partir de (6.80), resulta:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2G}\sigma_{ii} - 3\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} = \left(\frac{\left(1+\nu\right)}{E} - 3\frac{\nu}{E}\right)3\sigma_m = \frac{3\left(1-2\nu\right)}{E}\sigma_h \quad (6.95a)$$

ou, inversamente:

$$\sigma_h = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}\varepsilon_v \quad (6.95b)$$

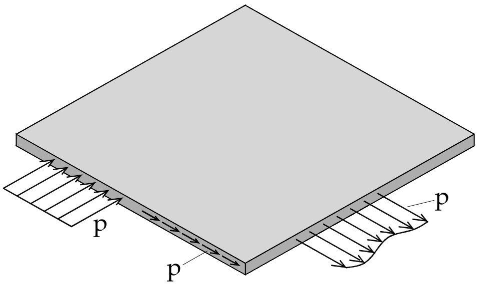
Desta forma, em pequenas deformações, a deformação volumétrica é proporcional à tensão hidrostática e vice-versa. A constante de proporcionalidade chamada de Bulk-Modulus é dada por:

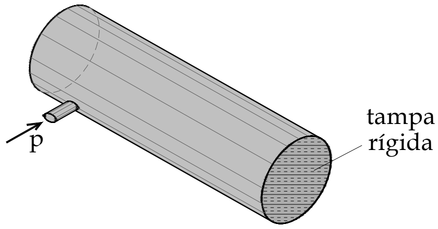
$$K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)} \quad (6.95c)$$

Das equações (6.95c) e (6.95b) verifica-se que o material resulta incompressível quando $\nu = 0{,}5$.

6.5. Estado plano de tensões (EPT)

O EPT é um caso bidimensional de solicitação muito importante e ocorre em peças que possuem uma dimensão muito menor do que as outras, ou seja, possuem duas superfícies paralelas entre si e livres de tensões. No caso das superfícies serem planas este corpo é denominado chapa, veja a figura 6.16. Apesar do caráter tridimensional das membranas, estas também podem ser tratadas aplicando-se o estado plano de tensões, pois as forças ortogonais às superfícies são muito menores do que as tensões desenvolvidas no material, veja figura 9.5b. Vasos de pressão, como caldeiras, bujões de gás, submarinos, foguetes e aeronaves podem ser tratados de forma simplificada aplicando-se o EPT.





(a) Chapa (b) Vaso de pressão cilíndrico

Figura 6.16 – Chapa e vaso de pressão - EPT

Considerando-se a coordenada x_3 ortogonal às superfícies livres, o estado plano de tensões se caracteriza por se assumir:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{i3} = 0 \qquad (6.96)$$

Esta condição deve ser encarada como uma aproximação, pois como será comentado mais adiante, fere algumas das equações de compatibilidade em deformações estabelecidas nas equações (5.62) à (5.66). A Lei de Hooke, neste caso, deve ser escrita inicialmente na forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) = \frac{1}{2G}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \qquad (6.97a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2G}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \qquad (6.97b)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \qquad (6.97c)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12} \qquad (6.97d)$$

$$\varepsilon_{13} = 0$$

(6.97e)

$$\varepsilon_{23} = 0$$

(6.97f)

valendo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\sigma - \frac{\nu}{E}Trac\left(\sigma\right)I \qquad (6.98)$$

para $i, j = 1,2$.

É interessante se escrever (6.97a) e (6.97b) na notação de Voigt,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{6.99}$$

para se encontrar sua inversa:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0 \\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12y} \end{Bmatrix} \tag{6.100}$$

que escrito em notação indicial fica

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = 2G\varepsilon + \bar{\lambda}Trac(\varepsilon)I \tag{6.101}$$

para $i, j = 1,2$ e

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \tag{6.102}$$

Observa-se que, pelo caráter aproximado do estado plano de tensões, a singularidade para $\nu = 0,5$ não está presente. Entretanto, para qualquer combinação de tensões normais no EPT $\sigma_{22} = \alpha\sigma_{11} = \sigma$ e pode-se escrever a variação volumétrica infinitesimal como:

$$\varepsilon_v = \frac{(\alpha+1)(1-2\nu)}{E}\sigma \tag{6.103}$$

ou seja o volume é invariante em pequenas deformações se $\nu = 0,5$.

Para o EPT deve-se comentar que o cálculo das tensões e deformações principais seguem o mesmo procedimento tensorial do caso 3D para as componetes ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$) e, portanto, as matrizes de giro terão dimensão 2, a equação característica será de segundo grau e $\sigma_3^p = \sigma_{33} = 0$.

6.6. Estado plano de deformações

O estado plano de deformações (EPD) é caracterizado quando se assume que as componentes de deformação $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, neste caso nenhuma das equações de compatibilidade em deformações foi desrespeitada, assim, não há uma aproximação envolvida no equacionamento como há no EPT. Um problema muito importante de engenharia que se resolve fazendo esta consideração é a análise de tensão e deformação em barragens. Está hipótese se torna aceitável graças à grande extensão das barragens (na direção

x_3) e pela consideração de rigidez infinita do maciço rochoso que serve de suporte, veja figura 9.18.

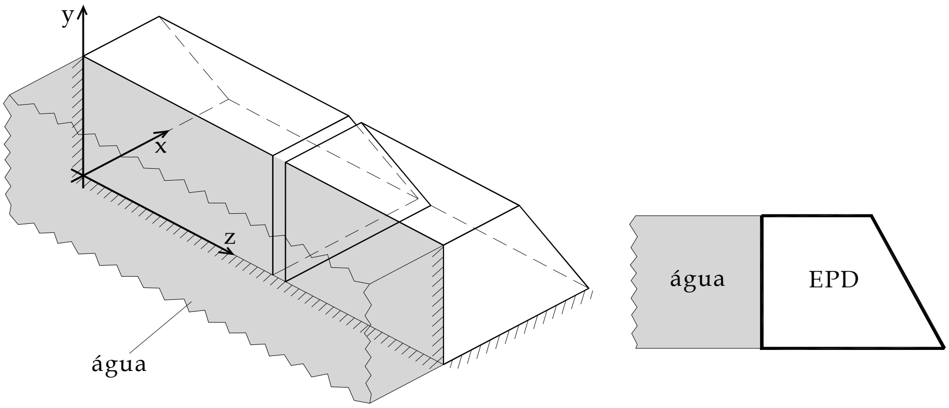


Figura 9.18 – Barragem e estado plano de deformação

Retirando-se uma lâmina fina da barragem, figura 9.18, e considerando-se que o equilíbrio desta lâmina é garantido sem interação com as laminas adjacentes, observa-se que as condições de EPD são respeitadas. Nesta situação, aplica-se a Lei de Hooke (6.26) tridimensional considerando $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ resultando:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \qquad (6.104)$$

Com

$$\sigma_{33} = \sigma_p^3 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{33} = \sigma_p^3 = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \qquad (6.105)$$

onde σ_{33} é a terceira tensão principal pelo fato de $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. A primeira forma da expressão (6.105) foi extraída diretamente da terceira linha da equação (6.26).

Agora se identificam as expressões compactas idênticas ao estado tridimensional, como:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = 2G\varepsilon + \lambda Trac(\varepsilon) I \qquad (6.106)$$

para $i, j = 1,2$, onde λ é a constante de Lamé do problema 3D:

Para o estado plano de deformações, a expressão inversa de (6.104) fica:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{2G}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\sigma - \frac{\nu}{2G}Trac(\sigma)I \tag{6.107}$$

Que para ficar no mesmo formato de (6.98) cria-se um coeficiente de Poisson fictício $\nu' = (1+\nu)\nu$, resultando:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu'}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\sigma - \frac{\nu'}{E}Trac(\sigma)I \tag{6.108}$$

onde o módulo de elasticidade transversal não é alterado.

Muitas vezes é do interesse se escrever (6.98) no formato de (6.107). Para tanto adota-se $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ e se escreve para o EPT,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{2G}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{6.109}$$

Observando-se que para o EPD, as componentes de deformação e as componentes de tensão envolvidas em operações de giro são as mesmas do EPT, conclui-se que o cálculo das deformações, das direções e tensões principais seguem o mesmo procedimento do EPT. Como sempre, ao se calcula a tensão de cisalhamento máxima, deve-se aplicar o procedimento tridimensional onde a tensão principal σ_p^3 é nula para o EPT mas não é nula para o EPD, veja equação (6.105).

Reforça-se, finalmente, que para materiais isótropos as direções principais das tensões são as mesmas das deformações, porém quando o material não é isótropo todas as equações relativas à análise de tensões e deformações são válidas, mas as direções principais das tensões não coincidem com as direções principais das deformações.

7 - O problema da elasticidade linear

Voltando-se a abordar o problema da elasticidade linear, conforme comentado no final da seção 5.6, o número de incógnitas do problema é 15 $(\sigma, \varepsilon, \vec{u})$ e agora o número de equações também é 15, ou seja, três equações de equilíbrio em tensão (4.6), seis equações que relacionam deslocamentos e deformações (5.42) e seis equações que relacionam tensão e deformação (6.67). Esta última foi escrita em notações diversas, por exemplo, em (6.25) e (6.26) ou em (6.27) e (6.28) ou ainda em (6.80) e (6.82). Além destas equações, para formular o problema da elasticidade linear deve-se lembrar da existência das condições de contorno, em força de superfície (também chamadas de naturais), item 3.2 e em deslocamentos (também chamadas de essenciais).

7.1 - O problema tridimensional

Para facilitar a descrição do problema a ser tratado, recuperam-se as equações de domínio pertinentes:

Equilíbrio (3):

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \tag{7.1}$$

Ou em notação dyadica,

$$Div\left(\sigma^t\right) + \vec{b} = \rho \ddot{\vec{u}} \tag{7.2}$$

Relação tensão / deformação (6):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\sigma - \frac{\nu}{E}Trac\left(\sigma\right)I \tag{7.3}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = 2G\varepsilon + \lambda Trac\left(\varepsilon\right)I \tag{7.4}$$

Relação deslocamento / deformação (6):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}{2} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{\nabla\vec{u}^t + \nabla\vec{u}}{2} \tag{7.5}$$

que são 15 equações para 15 incógnitas σ_{ij}, ε_{ij} e u_i.

Condições de contorno em forças de superfície e em deslocamento:

As condições de contorno em forças de superfície (naturais) são dadas pela fórmula de Cauchy

$$p_i = \sigma_{ji}n_j = \sigma_{ij}n_j \qquad \text{ou} \qquad \vec{p} = \sigma^t \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} \tag{7.6}$$

que relaciona as variáveis internas (componentes de tensão) com as forças aplicadas externamente em regiões específicas do contorno.

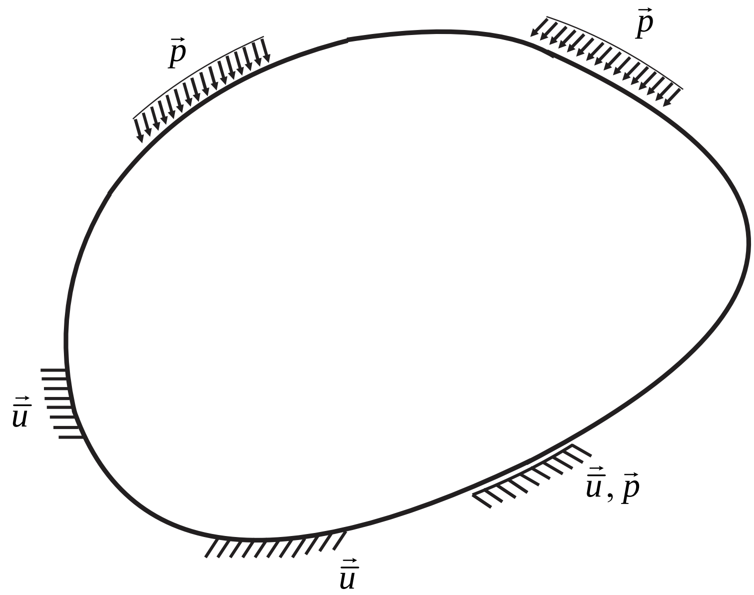


Figura 7.1 - Condições de contorno

As condições de contorno em deslocamentos (essenciais) podem ser representadas indicando-se que se conhecem os valores de deslocamento em regiões específicas do contorno do corpo, ou seja:

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} = \bar{\vec{u}} \qquad (7.6)$$

onde a barra superior indica valor prescrito. Existe a possibilidade de em uma parte do contorno termos condições de contorno mistas, ou seja, parte das forças de superfície conhecidas e parte dos deslocamentos conhecidos. Em geral, este tipo de condição de contorno deve ser considerado nas coordenadas locais da superfície, veja figura 7.1. Não se pode deixar de comentar que em regiões do contorno onde não se representou deslocamento ou força de superfície prescritas, na realidade se prescreveu força de superfície nula.

7.2 - Tipos de problema da elasticidade

Conforme o tipo de condição de contorno aplicada é hábito se definir um nome para o problema a ser resolvido e, em geral, uma técnica para sua solução.

(a) Primeiro PVC (Problema de Valor de Contorno) em elasticidade.

O valor das forças de superfície é conhecido em todos os pontos do contorno e não se impõem condições de contorno em deslocamentos. Esse tipo de problema é resolvido por uma técnica chamada de Formulação ou Técnica das Tensões. Deve-se esclarecer que valores de força de superfície nulos são usualmente chamados de condições de contorno em força de superfície homogêneas. Os problemas resolvidos por essa técnica são bastante gerais e as forças de superfície aplicadas devem, para problemas estáticos, ser auto-equilibradas.

(b) Segundo PVC em elasticidade

Neste caso todos os deslocamentos são conhecidos no contorno. Por exemplo, em blocos confinados sujeitos a variação de temperatura todos os deslocamentos do contorno são nulos (condição de contorno homogênea). Outro caso é a análise de meios infinitos, importante para a geração das chamadas soluções fundamentais que são utilizadas na construção do Método dos Elementos de Contorno. Neste caso, a situação mais comum é a suposição de que os deslocamentos no infinito são nulos. A técnica de solução para o segundo PVC é chamada Formulação ou Técnica dos deslocamentos.

(c) Terceiro PVC em elasticidade ou problema misto

Conhecem-se as forças de superfície para parte do contorno e os deslocamentos na outra parte. É o problema geral, porém o mais difícil de ser resolvido, atualmente este tipo de problema é preferencialmente resolvido por métodos numéricos.

Neste ponto cabe um comentário para se diferenciar a abordagem de solução adotada pela resistência dos materiais e aquela adotada na teoria da elasticidade. Ao contrário da teoria da elasticidade, na resistência dos materiais assume-se uma cinemática aproximada para o comportamento das deformações que, a partir também de uma lei constitutiva simplificada, resulta numa distribuição de tensões pré-estabelecida associada diretamente à cinemática adotada. A integração dessas tensões em cortes especiais adotados resulta nos chamados esforços solicitantes. Quando os problemas são isostáticos os esforços solicitantes são determinados por equilíbrio e consequentemente as tensões, deformações e deslocamentos são calculadas por recurrência. Quando os problemas são hiperestáticos se escrevem os esforços solicitantes em função das incógnitas excedentes, calculam-se os deslocamentos em função das incógnitas excedentes e utilizam-se os deslocamentos conhecidos (normalmente nos pontos de onde as incógnitas excedentes foram extraídas) para resolver as incógnitas excedentes e, consequentemente o problema.

Uma consequência da arbitragem das cinemáticas adotadas na resistência dos materiais é a violação das equações de compatibilidade em deformações que pode tornar as soluções mais flexíveis ou mais rígidas que as soluções da teoria da elasticidade linear. Em métodos numéricos, onde funções de aproximação são aplicadas, quando a compatibilidade em deformação é respeitada as soluções são mais rígidas do que as da teoria da elasticidade. Algumas técnicas de enriquecimento em métodos dos elementos finitos (por exemplo) ferem a compatibilidade em deformações e apresentam resposta mais flexível, podendo inclusive não convergir. O método das diferenças finitas transforma as equações diferenciais em equações de diferenças o que dá um caráter médio para as soluções e maior simplicidade para demonstração de convergência, porém a aplicação de condições de contorno é mais complicada do que no MEF. Além disso, a sua generalização para problemas não lineares é mais complicada.

7.3 - Ilustração simplista das técnicas de solução da elasticidade linear -:

Para resolver sistemas de equações (algébricos ou diferenciais) existem várias técnicas. Uma delas (de interesse) é resolver uma (ou algumas variáveis) em função das outras, culminando em uma única equação (ou em um conjunto menor) que será resolvido. Calculam-se as outras variáveis por recurrência.

Exemplo simples:

Seja resolver o seguinte sistema algébrico de equações:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ 2x+4y+z=2 \end{cases} \tag{7.7}$$

Escreve-se x em função de y e z, pela segunda equação, por exemplo,

$$x=-y-z \tag{7.8}$$

Substituindo-se (7.8) na primeira e última de (7.7) tem-se:

$$\begin{cases} y-z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases} \tag{7.9}$$

sendo este o sistema menor e, portanto, mais fácil de ser resolvido. A equação (7.8) se transforma em uma fórmula de recurrência.

O mesmo pode ser feito para as 15 equações da elasticidade linear. As varáveis que sobram no sistema menor dão o nome do da técnica empregada. Como já comentado, são duas as técnicas principais, deslocamentos e tensões.

7.4 - Técnica dos deslocamentos

Esta técnica é aplicada na solução do segundo PVC da elasticidade, ou seja, quando se conhecem os deslocamentos na superfície do corpo analisado. Em geral o corpo possui dimensões infinitas.

Substitui-se na Lei de Hooke, equação (7.4), a relação deslocamento-deformação (7.5) como:

$$\sigma_{ij} = G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} \qquad (7.10)$$

A equação (7.10) relaciona diretamente os deslocamentos às tensões. Substituindo-se (7.10) no divergente da tensão $\sigma_{ij,i} = \sigma_{ji,i}$ resulta:

$$\sigma_{ji,i} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{k,ki}\delta_{ij} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{k,kj} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{i,ij} \qquad (7.11)$$

ou, substituindo-se (7.11) em (7.1) e agrupando-se, resulta:

$$G\left(u_{i,ij} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{i,ij} + b_j = \rho \ddot{u}_j \qquad \text{ou ainda} \qquad G u_{j,ii} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_j = \rho \ddot{u}_j \; (7.12)$$

Observando-se que $u_{j,j}$ pode ser escrito como o $Div(\vec{u})$, a equação (7.12) pode ser escrita em notação dyadica como:

$$G\nabla^2 \vec{u} + (G+\lambda) Grad(Div(\vec{u})) = \rho \ddot{\vec{u}} \quad \text{ou} \qquad G\nabla^2 \vec{u} + (G+\lambda)\vec{\nabla}(\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \ddot{\vec{u}} \qquad (7.13)$$

Lembrando-se que $u_{j,j} = \varepsilon_{jj} = Trac(\varepsilon) = e$ tem-se que $u_{j,ji} = \varepsilon_{jj,i} = e_{,i}$. Assim, encontra-se em algumas referências:

$$G\nabla^2 \vec{u} + (G+\lambda) Grad(e) = \rho \ddot{\vec{u}} \qquad \text{ou} \qquad G\nabla^2 \vec{u} + (G+\lambda)\vec{\nabla}(e) = \rho \ddot{\vec{u}} \qquad (7.13a)$$

Ainda com relação à notação, o Laplaciano $\nabla^2(\bullet)$ pode ser entendido como o divergente do gradiente de uma função, no caso $\nabla^2(\vec{u}) = Div(Grad(\vec{u}))$.

As equações de equilíbrio escritas em deslocamentos são conhecidas como equações de Navier-Cauchy e são dadas por (7.12) ou (7.13). Estas equações são em número de três para três deslocamentos incógnitos. Como estratégia de apresentação da disciplina, esta técnica será retomada no final deste material, apresentando-se a solução de Kelvin para problemas infinitos bidimensionais.

7.5 - Técnica das tensões - problema 3D:

A técnica das tensões é utilizada para a solução de problemas de dimensão finita cujas condições de contorno são escritas em tensão, ou seja, para o primeiro PVC da elasticidade. Ao contrário do que foi realizado no item 7.4, nesta técnica eliminam-se os deslocamentos e as deformações, mantendo-se apenas as tensões nas equações remanescentes. As passagens que serão apresentadas são de caráter didático, sendo que os livros clássicos apenas dizem ser possível sair das 15 equações e chegar nas equações de Beltrami-Michell (7.42).

O primeiro passo é a eliminação dos deslocamentos, seguindo o processo utilizado no item 5.7 para se escrever as equações de compatibilidade. Repetindo-se o procedimento, toma-se explicitamente o cálculo de ε_{11}, ε_{22} e ε_{12}, ou seja:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \qquad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \qquad \varepsilon_{12} = \left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)/2 \tag{7.14}$$

derivando-se ε_{11} duas vezes em relação à x_2 e ε_{22} duas vezes em relação a x_1 e somando-se encontra-se:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = u_{1,221} + u_{2,112} \tag{7.15}$$

agora aplicando-se a derivada cruzada sobre ε_{12}, equação (7.14), encontra-se:

$$\varepsilon_{12,12} = \left(u_{1,221} + u_{2,112}\right)/2 \tag{7.16}$$

desta forma e, com procedimentos semelhantes, tem-se:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\,\varepsilon_{12,12} \tag{7.17a}$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} = 2\,\varepsilon_{23,23} \tag{7.17b}$$

$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} = 2\,\varepsilon_{13,13} \tag{7.17c}$$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} = \varepsilon_{13,21} + \varepsilon_{12,31} \tag{7.17d}$$

$$\varepsilon_{22,13} + \varepsilon_{13,22} = \varepsilon_{23,12} + \varepsilon_{12,32} \tag{7.17e}$$

$$\varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} = \varepsilon_{23,13} + \varepsilon_{13,23} \tag{7.17f}$$

ou em notação indicial,

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0 \tag{7.18}$$

Estas seis equações são dependentes e podem ser ainda transformadas em 3 equações diferenciais de quarta ordem independentes. É de interesse se eliminar as deformações. Como é muito difícil se realizar a operação de forma indicial diretamente, trabalha-se inicialmente na equação (7.17b) substituindo-se a Lei de Hooke na forma de (7.3) como:

$$\frac{1}{2G}\sigma_{22,33} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz,33} + \frac{1}{2G}\sigma_{33,22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz,22} = \frac{1}{2G}\sigma_{23,23} + \frac{1}{2G}\sigma_{32,32} \tag{7.19}$$

Usando a relação $2G = E/(1+\nu)$, tem-se

$$(1+\nu)\sigma_{22,33} - \nu\sigma_{zz,33} + (1+\nu)\sigma_{33,22} - \nu\sigma_{zz,22} = (1+\nu)\sigma_{23,23} + (1+\nu)\sigma_{32,32} \tag{7.20}$$

Colocando-se $(1+\nu)$ em evidência do lado direito da equação e agrupando-se o lado esquerdo, escreve-se:

$$(1+\nu)(\sigma_{22,33}+\sigma_{33,22})-\nu(\sigma_{zz,33}+\sigma_{zz,22})=(1+\nu)(\sigma_{23,32}+\sigma_{32,23}) \tag{7.21}$$

Para ajeitar o lado direito, utiliza-se das equações de equilíbrio (7.1),

$$\sigma_{23,32}=(\sigma_{32,3})_{,2}=-(\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+b_2)_{,2} \text{ e } \sigma_{32,23}=(\sigma_{23,2})_{,3}=-(\sigma_{13,1}+\sigma_{33,3}+b_3)_{,3} \tag{7.22}$$

se escreve,

$$(\sigma_{23,32}+\sigma_{32,23})=-(\sigma_{12,12}+\sigma_{13,13})-(\sigma_{22,22}+\sigma_{33,33}+b_{2,2}+b_{3,3}) \tag{7.23}$$

ou ainda, permutando a derivada e usando a simetria da tensão do primeiro termo do lado direto da equação e usando novamente a equação de equilíbrio, se escreve

$$(\sigma_{21,2}+\sigma_{31,3})_{,1}=-(\sigma_{11,1}+b_1)_{,1}=-(\sigma_{11,11}+b_{1,1}) \tag{7.24}$$

que substituído em (7.23) e (7.21) resultam:

$$(\sigma_{23,32}+\sigma_{32,23})=\sigma_{11,11}-\sigma_{22,22}-\sigma_{33,33}+b_{1,1}-b_{2,2}-b_{3,3} \tag{7.25}$$

$$(1+\nu)(\sigma_{22,33}+\sigma_{33,22}+\sigma_{22,22}+\sigma_{33,33}+\sigma_{11,11})-\nu(\sigma_{zz,33}+\sigma_{zz,22})=(1+\nu)(b_{1,1}-b_{2,2}-b_{3,3}) \tag{7.26}$$

Expandindo-se e contraindo-se os termos σ_{zz} pode-se reescrever (7.26) como:

$$(1+\nu)(\sigma_{zz,ii}-\sigma_{11,ii}-\sigma_{zz,11})-\nu(\sigma_{zz,ii}+\sigma_{zz,11})=(1+\nu)(b_{1,1}-b_{2,2}-b_{3,3}) \tag{7.27}$$

De forma totalmente análoga se transformam (7.17a) e (7.17c) em:

$$(1+\nu)(\sigma_{zz,ii}-\sigma_{22,ii}-\sigma_{zz,22})-\nu(\sigma_{zz,ii}+\sigma_{zz,22})=(1+\nu)(b_{2,2}-b_{1,1}-b_{3,3}) \tag{7.28}$$

$$(1+\nu)(\sigma_{zz,ii}-\sigma_{33,ii}-\sigma_{zz,33})-\nu(\sigma_{zz,ii}+\sigma_{zz,33})=(1+\nu)(b_{3,3}-b_{2,2}-b_{1,1}) \tag{7.29}$$

Somando-se (7.27), (7.28) e (7.29) encontra-se uma expressão para $\sigma_{zz,ii}$, ou seja:

$$\sigma_{zz,ii}=\frac{-(1+\nu)}{(1-\nu)}(b_{1,1}+b_{2,2}+b_{3,3}) \tag{7.30}$$

Substituindo-se (7.30) em (7.27), (7.28) e (7.29), essas se simplificam para:

$$\sigma_{11,ii}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{zz,11}=\frac{-\nu}{1-\nu}b_{k,k}-2b_{1,1} \tag{7.31}$$

$$\sigma_{22,ii}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{zz,22}=\frac{-\nu}{1-\nu}b_{k,k}-2b_{2,2} \tag{7.32}$$

$$\sigma_{33,ii}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{zz,33}=\frac{-\nu}{1-\nu}b_{k,k}-2b_{3,3} \tag{7.33}$$

ou, em notação indicial,

$$\sigma_{k(k),ii}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{zz,k(k)}=\frac{-\nu}{1-\nu}b_{\ell,\ell}-2b_{k,(k)} \tag{7.34}$$

Para a equação de compatibilidade (7.17d), aplica-se a Lei de Hooke como:

$$\frac{1}{2G}\sigma_{11,23}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk,23}+\frac{1}{2G}\sigma_{23,11}=\frac{1}{2G}\sigma_{13,12}+\frac{1}{2G}\sigma_{12,13} \qquad (7.35)$$

ou,

$$(1+\nu)(\sigma_{11,23}-\sigma_{13,12}+\sigma_{23,11}-\sigma_{12,13})-\nu\sigma_{kk,23}=0 \qquad (7.36)$$

Tomando-se a terceira e segunda equações de equilíbrio e derivando-se, respectivamente em relação à x_2 e x_3 escreve-se:

$$-\sigma_{31,12}=\sigma_{32,22}+\sigma_{33,32}+b_{3,2} \qquad -\sigma_{21,13}=\sigma_{22,33}+\sigma_{23,33}+b_{2,3} \qquad (7.37)$$

Substituindo-se (7.37) em (7.36) resulta:

$$(1+\nu)(\sigma_{11,23}+\sigma_{32,22}+\sigma_{33,32}+b_{3,2}+\sigma_{23,11}+\sigma_{22,33}+\sigma_{23,33}+b_{2,3})-\nu\sigma_{kk,23}=0 \qquad (7.38)$$

ou, indicialmente:

$$\sigma_{23,ii}+\frac{\sigma_{kk,23}}{(1+\nu)}=-(b_{3,2}+b_{2,3}) \qquad (7.39)$$

Analogamente para as equações (7.17e) e (7.17f) resultam:

$$\sigma_{13,ii}+\frac{\sigma_{kk,13}}{(1+\nu)}=-(b_{1,3}+b_{3,1}) \qquad (7.40)$$

$$\sigma_{12,ii}+\frac{\sigma_{kk,12}}{(1+\nu)}=-(b_{1,2}+b_{2,1}) \qquad (7.41)$$

Unem-se as seis equações (7.31), (7.32), (7.33), (7.39), (7.40) e (7.41) em uma única equação indicial, como:

$$\sigma_{jk,ii}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{zz,jk}=\frac{-\nu}{1-\nu}\delta_{jk}b_{\ell,\ell}-(b_{j,k}+b_{k,j}) \qquad (7.42)$$

Como a tensão é simétrica a equação (7.42) representa seis equações e não nove. Estas equações são chamadas de equações de Beltrami-Michell e representam a compatibilidade em deformações escrita em tensões. Essas equações podem ser transformadas em três equações independentes que, juntamente com as equações de equilíbrio permitem a solução do problema tridimensional pela técnica das tensões. Como será visto mais adiante, para problemas bidimensionais as seis equações de Beltrami-Michell se resumem em apenas uma que acrescidas de duas equações de equilíbrio resultam em três equações para as três incógnitas do problema bidimensional.

7.6 - Superposição de efeitos e unicidade de solução

Antes de iniciar este item, deve-se lembrar que este texto possui caráter operacional, tentando colocar de maneira simples alguns entendimentos abordados com maior rigor matemático em textos mais avançados.

A superposição de efeitos é facilmente verificável aplicando-se a seguinte propriedade da operação derivada parcial,

$$(f+g)_{,j} = f_{,j} + g_{,j} \tag{7.43}$$

onde f e g são funções diferenciáveis. Portanto, sejam duas soluções $(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0, u_i^0)$ e $(\sigma_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^1, u_i^1)$, assim, por (7.43) valem:

$$\sigma_{ij,i}^0 + \sigma_{ij,i}^1 = (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1)_{,i} \tag{7.44 a}$$

$$u_{i,k}^0 + u_{i,k}^1 = (u_i^0 + u_i^1)_{,k} \tag{7.44 b}$$

$$C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}^0 + C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}^1 = C_{ijk\ell}(\varepsilon_{k\ell}^0 + \varepsilon_{k\ell}^1) \tag{7.44 c}$$

Ou seja, a soma de soluções de problemas distintos é igual à solução da soma de problemas distintos.

A unicidade de soluções pode ser mostrada usando-se a superposição de efeitos e absurdo. Sejam duas distribuições de tensão gerais distintas não nulas σ_{ij}^0 e σ_{ij}^1 solução do mesmo problema estático com força de volume não nula. Sendo soluções diferentes, tem-se:

$$\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^1 = a_{ij} \neq 0_{ij} \tag{7.45}$$

não constante. Aplicando-se o divergente sobre o transposto do tensor não nulo a_{ij},

$$a_{ij,i} = c_j \tag{7.46}$$

não constante. Como σ_{ij}^0 e σ_{ij}^1 são solução do mesmo problema

$$\sigma_{ij,i}^0 = -b_j \qquad \text{e} \qquad \sigma_{ij,i}^1 = -b_j \tag{7.47}$$

Utilizando-se a propriedade da derivada parcial (7.43) escreve-se também

$$a_{ij,i} = \sigma_{ij,i}^0 - \sigma_{ij,i}^1 = -b_j + b_j = 0_j \tag{7.48}$$

a equação (7.48) está em desacordo com a equação (7.46) admitida pela hipótese de que as soluções são distintas. Portanto, por absurdo, a solução é única.

É importante mencionar uma dificuldade adicional encontrada na solução de problemas em corpos multiconexos, veja figura 7.2a. A estratégia de solução é, em geral, transformá-lo em um corpo simplesmente conexo, figura 7.2b, e verificar se o deslocamento no contorno artificialmente gerado é único, caso não seja, é necessária a aplicação de condição de contorno adicional que o torne único.

(a) Multiconexo (b) Simplesmente conexo

Figura 7.2 - Definição de corpo multiconexo

Finalmente, é importante se mencionar o Princípio de Saint-Venant, que estende consideravelmente o uso das soluções da elasticidade linear. Este Princípio estabelece que a diferença das distribuições de tensões, deformações e deslocamentos devidos a carregamentos estaticamente equivalentes só é significativa na vizinhança da carga, ou seja, estas distribuições se confundem a medida que se distanciam da região de aplicação da carga.

8 - Problemas bidimensionais em coordenadas cartesianas.

Foge aos objetivos desse curso resolver problemas tridimensionais gerais, assim neste capítulo serão abordados problemas bidimensionais da elasticidade linear, apresentando técnicas de solução e soluções para problemas particulares. Para não dispersar as discussões, este capítulo estará limitado à técnica das tensões. A técnica dos deslocamentos será abordada no capítulo 10.

O livro "Teoria da Elasticidade" de Timoshenko - Goodyer é uma excelente referência para consulta de problemas resolvidos. Entretanto, alguns exemplos de soluções conhecidas são apresentados aqui, de forma a incentivar os alunos na criação de soluções para casos mais complexos de seu interesse. Além disso, aplica-se uma linguagem mais adequada aos alunos de nosso curso, de forma que facilite o acompanhamento das aulas e a preparação para avaliações.

8.1 - Estado Plano de Deformações - EPD

O estado plano de deformações foi definido no item 6.6 e pode ser encontrado simplesmente introduzindo a restrição $u_3 = 0$, além disso, os deslocamentos u_2 e u_1 são funções apenas de (x_1, x_2). Desta forma o problema da elasticidade linear pode ser resumido em:

***Lei constitutiva isotrópica (Hooke)* (3)** $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ com $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \text{ para } i, j, k = 1,2 \tag{8.1}$$

ainda, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ e, por recurrência, após a solução do problema, clacula-se

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{8.2}$$

Inversamente, a Lei de Hooke pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}) \qquad \text{para} \quad i, j, k = 1,2 \tag{8.3}$$

Relação deslocamento-deformação - cinemática **(3)**

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \qquad \text{para} \quad i, j = 1,2 \tag{8.4}$$

Equações de equilíbrio **(2)**

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0_j \quad \text{para } i, j = 1,2 \tag{8.5}$$

Pela organização do problema observa-se que σ_{33} não é variável do problema e, portanto, existem três componentes de tensões, dois deslocamentos e três componentes de deformações incógnitas, num total de 8 incógnitas. Existem também 8 equações, três cinemáticas, duas de equilíbrio e três que relacionam tensão e deformação.

8.2 - Técnica das tensões para o EPD

No estado plano de deformações nenhuma grandeza varia com a direção x_3, assim, seguindo a técnica descrita no item 7.5 eliminam-se os deslocamentos da análise pelas equações de compatibilidade em deformações, equações (7.17). Destas equações a única não nula para o EPD é (7.17a), ou seja:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\,\varepsilon_{12,12} \tag{8.6}$$

Aplicando-se a lei de Hooke (8.3) na equação (8.6), resulta:

$$\frac{1}{2G}(\sigma_{11,22} - \nu(\sigma_{11,22} + \sigma_{22,22}) + \sigma_{22,11} - \nu(\sigma_{11,11} + \sigma_{22,11}) = \frac{2}{2G}\sigma_{12,12} \tag{8.7}$$

Somando-se $\sigma_{11,11}$ e $\sigma_{22,22}$ dos dois lados da equação, resulta:

$$(1-\nu)(\sigma_{11,22} + \sigma_{11,11} + \sigma_{22,11} + \sigma_{22,22}) = \sigma_{11,11} + \sigma_{12,12} + \sigma_{21,21} + \sigma_{22,22} \tag{8.8}$$

O lado direito da equação pode ser trabalhado como:

$$\sigma_{11,11} + \sigma_{12,12} + \sigma_{21,21} + \sigma_{22,22} = (\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2})_{,1} + (\sigma_{22,2} + \sigma_{12,1})_{,2} = -b_{1,1} - b_{2,2} \tag{8.9}$$

que substituída em (8.8) resulta:

$$(\sigma_{11,22} + \sigma_{11,11} + \sigma_{22,11} + \sigma_{22,22}) = -\frac{1}{(1-\nu)}(b_{1,1} + b_{2,2}) \qquad (8.10)$$

ou

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -\frac{1}{(1-\nu)} b_{\ell,\ell} \qquad (8.11)$$

ou ainda, usando-se notação diádica

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{(1-\nu)} \nabla \cdot \vec{b} \qquad (8.12)$$

A equação (8.11) ou (8.12) é a equação de compatibilidade escrita em tensões, que juntamente com as duas equações de equilíbrio (8.5) resultam nas três equações necessárias para resolver as três componentes de tensão incógnitas, pois deslocamentos e deformações foram eliminados. Por recorrência determinam-se as deformações, (Lei de Hooke) e os deslocamentos (integrando-se a cinemática).

8.3 - Estado plano de tensões EPT

Diferentemente do estado plano de deformações, não se pode afirmar que nenhuma grandeza varia com a direção x_3 no estado plano de tensões. O estado plano de tensões é definido considerando-se:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \qquad (8.13)$$

Lei constitutiva isotrópica (Hooke) **(3)**

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \qquad (6.101) \qquad (8.14)$$

para $i, j, k = 1, 2$

$$\bar{\lambda} = \nu E / [(1+\nu)(1-\nu)] \qquad (6.102)$$

Inversamente a Lei de Hooke para o EPT pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad \text{para} \quad i, j, k = 1, 2 \qquad (6.98) \qquad (8.15)$$

ainda, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ e, por recorrência, após a solução do problema, calcula-se

$$\varepsilon_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad \text{com} \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \qquad (8.16)$$

Relação deslocamento-deformação - cinemática **(3)**

$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ para $i, j = 1,2$ (8.17)

Na direção x_3 existe a deformação ε_{33}, veja equação (8.16)

assim,

$\varepsilon_{33} = u_{3,3}$ (8.18)

Pela equação (8.16) ε_{33} deve depender de x_1 e x_2. Como σ_{22} e σ_{11} são consideradas constantes em x_3, pela (8.18) u_3 deve depender de x_1, x_2 e depender linearmente de x_3.

Assim, o fato de

$\varepsilon_{13} = (u_{1,3} + u_{3,1})/2 = 0$ e $\varepsilon_{23} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2 = 0$ (8.19)

implica que os deslocamentos u_2 e u_1 dependem de x_3, ou seja, a redução do problema pelas equações de compatibilidade não será tão simples quanto foi para o EPD.

***Equações de equilíbrio* (2)**

$\sigma_{ij,i} + b_j = 0_j$ para $i, j = 1,2$ (8.20)

O fato de se impor que $\sigma_{33} = 0$ e $b_3 = 0$ indica que a terceira equação de equilíbrio está naturalmente satisfeita.

8.4 - Técnica das tensões para o EPT

Seguindo-se a técnica descrita no item 7.5 e o que foi discutido no item 8.3 (equação (8.19)) as equações de compatibilidade em deformações (7.17) são reescritas para materiais isotrópicos no EPT como:

$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ (8.21a)

$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} = 0$ (8.21b)

$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} = 0$ (8.21c)

$\varepsilon_{11,23} = \varepsilon_{12,31}$ (8.21d)

$\varepsilon_{22,13} = \varepsilon_{12,32}$ (8.21e)

$\varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} = 0$ (8.21f)

Frente à dificuldade imposta pelas equações (8.21b) até (8.21f), é consenso na literatura especializada aceitar uma solução onde não se obriga a satisfação dessas equações de compatibilidade, entendendo-se que a solução será mais próxima da realidade quanto mais fina for a chapa analisada.

Aceitando esse caráter aproximado do EPT, a única equação de compatibilidade que será respeitada é:

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\,\varepsilon_{12,12} \tag{8.22}$$

Aplicando-se a lei de Hooke (8.15) na equação (8.22), resulta:

$$\frac{\sigma_{11,22}}{2G}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11,22}+\sigma_{22,22})+\frac{\sigma_{22,11}}{2G}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11})=2\frac{\sigma_{12,12}}{2G} \tag{8.23}$$

ou

$$\sigma_{11,22}-\frac{\nu}{(1+\nu)}(\sigma_{11,22}+\sigma_{22,22})+\sigma_{22,11}-\frac{\nu}{(1+\nu)}(\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11})=2\sigma_{12,12} \tag{8.24}$$

Somando-se $\sigma_{11,11}$ e $\sigma_{22,22}$ dos dois lados da equação, resulta:

$$\begin{aligned}&(1+\nu)\sigma_{11,22}+(1+\nu)\sigma_{11,11}-\nu(\sigma_{11,22}+\sigma_{22,22})+\\&+(1+\nu)\sigma_{22,11}+(1+\nu)\sigma_{22,22}-\nu(\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11})=-(1+\nu)(b_{1,1}+b_{2,2})\end{aligned} \tag{8.25}$$

ou

$$\sigma_{11,22}+\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11}+\sigma_{22,22}=-(1+\nu)(b_{1,1}+b_{2,2}) \tag{8.26}$$

que pode ser escrita como:

$$\sigma_{11,ii}+\sigma_{22,kk}=-(1+\nu)b_{\ell,\ell} \tag{8.27}$$

ou ainda, lembrando que $\nabla^2(\bullet)$ é o divergente do gradiente de uma função qualquer, se escreve (8.27) como:

$$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-(1+\nu)\nabla\cdot\vec{b} \tag{8.28}$$

A equação (8.27) ou (8.28) é a equação de compatibilidade escrita em tensões, que juntamente com as duas equações de equilíbrio (8.20) resultam nas três equações necessárias para resolver as três componentes de tensão incógnitas. Por recorrência determinam-se as deformações, (Lei de Hooke) e os deslocamentos (integrando-se a cinemática), lembrando-se que, do caráter aproximado do EPT, não se encontra u_3 único.

Caso as forças de volume sejam nulas ou constantes, as equações (8.12) e (8.28) são idênticas, o que indica que a distribuição de tensões para problemas com forças de superfície auto equilibradas são idênticas para o EPD e o EPT.

Para forças de volume variáveis pode-se escrever (8.28) de forma idêntica à (8.12) criando-se uma constante $\bar{\nu}=\nu/(1+\nu)$ com a qual se escreve ν como $\nu=\bar{\nu}/(1-\bar{\nu})$ que substituída em (8.28) resulta:

$$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-\frac{1}{(1-\bar{\nu})}\nabla\cdot\vec{b} \qquad \text{EPT} \tag{8.29}$$

Contrariamente pode se criar uma constante $\bar{\bar{\nu}} = \nu / (1-\nu)$ com a qual se escreve $\nu = \bar{\bar{\nu}} / (1+\bar{\bar{\nu}})$ que substituída em (8.12) resulta em forma idêntica à (8.28) para o EPD, ou seja:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\bar{\bar{\nu}})\nabla \cdot \vec{b} \qquad \text{EPD} \qquad (8.30)$$

Desta forma, soluções criadas para o EPT podem ser usadas para o EPD e vice-versa. Observe que essas constantes auxiliares não são utilizadas na lei constitutiva de onde resultam as deformações para os problemas bidimensionais.

8.5 - Solução via Função de Tensão de Airy - conceituação geral:

Uma das formas de se resolver o problema da elasticidade bidimensional segundo a técnica das tensões é a aplicação da chamada Função de Tensão de Airy. Para problemas tridimensionais uma estratégia semelhante, mas bem mais complexa, é baseada nas funções de tensão de Beltrami.

É interessante comentar que, para se criar uma função de tensão desse tipo, é necessário se antever o resultado de futuros passos de derivação e se organizar a função a ser criada de forma a satisfazer um conjunto de equações que se pretende resolver. Depois de antever os passos de derivação, se necessário, corrigir alguns parâmetros, como no caso da técnica da tentativa criteriosa de solução de equações diferenciais ordinárias. A proposta muito bem sucedida de Airy é a seguinte:

Sejam os potenciais ϕ e V, tal que:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} + V \qquad (8.31)$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} + V \qquad (8.32)$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12} \qquad (8.33)$$

Substituindo-se as formas (8.31) até (8.33) nas equações de equilíbrio dos problemas bidimensionais (8.5) e (8.20) resulta:

$$(\phi_{,22} + V)_{,1} + (-\phi_{,21})_{,2} + b_1 = 0 \quad \text{e} \quad (-\phi_{,12})_{,1} + (\phi_{,11} + V)_{,2} + b_2 = 0 \qquad (8.34)$$

Desenvolvendo-se as derivadas se encontram:

$$\phi_{,221} + V_{,1} - \phi_{,212} + b_1 = 0 \quad \text{e} \quad -\phi_{,121} + \phi_{,112} + V_{,2} + b_2 = 0 \qquad (8.35)$$

Da permutação da ordem de derivação resulta que as equações de equilíbrio são plenamente satisfeitas adotando as funções ϕ e V estabelecidas conforme (8.31) até (8.33) desde que

$$V_{,1} = -b_1 \qquad \text{e} \qquad V_{,2} = -b_2 \qquad (8.36)$$

, ou seja, que as forças de domínio sejam conservativas (definidas por um potencial único).

Como ϕ satisfaz o equilíbrio, para se concluir a solução do problema, falta apenas resolver a equação de compatibilidade escrita em tensões (8.28) para o EPT ou (8.12) para o EPD. Inicia-se o processo de solução substituindo-se (8.31) até (8.33) na equação (8.12), em sua forma indicial (8.10), ou seja:

$$(\phi_{,2222} + V_{,22} + \phi_{,2211} + V_{,11} + \phi_{,1111} + V_{,11} + \phi_{,1122} + V_{,22}) = -\frac{1}{(1-\nu)}(b_{1,1} + b_{2,2}) \qquad (8.37)$$

Utilizando-se (8.36) e organizando-se resulta,

$$\phi_{,2222} + \phi_{,2211} + \phi_{,1111} + \phi_{,1122} = -\frac{1}{(1-\nu)}(-V_{,11} - V_{,22}) - 2V_{,22} - 2V_{,11} \qquad (8.38)$$

ou ainda,

$$\phi_{,2222} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,1111} = \frac{(2\nu-1)}{(1-\nu)}(V_{,11} + V_{,22}) \qquad \text{EPD} \qquad (8.39a)$$

ou

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla^4\phi = -\frac{(2\nu-1)}{(1-\nu)}\nabla\cdot\vec{b} \qquad (8.39b)$$

Repetindo-se os mesmos passos para o estado plano de tensões, ou seja, substituindo-se (8.31) até (8.33) na equação (8.28), se escreve:

$$\phi_{,2222} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,1111} = (\nu-1)(V_{,11} + V_{,22}) \qquad \text{EPT} \qquad (8.40a)$$

$$\nabla^4\phi = -(\nu-1)\nabla\cdot\vec{b} \qquad (8.40b)$$

Das equações (8.31), (8.32) e (8.33) observa-se que a unidade da função de tensão ϕ é força e do potencial V é tensão.

Assim, a solução do problema da elasticidade linear pela técnica de tensões usando funções de tensão de Airy se resume em resolver a equação diferencial (8.39) ou (8.40).

8.6 - Soluções polinomiais usando funções de tensão - Método inverso

Os chamados métodos inversos são baseados na escolha de funções de tensão que satisfaçam de forma direta a equação de compatibilidade (8.39) ou (8.40). No que segue alguns exemplos de funções polinomiais são apresentados no intuito de se mostrar soluções simples para problemas da resistência dos materiais.

8.6.1 - Tração simples:

Escolhendo-se a função de tensão $\phi = ax_1^2/2$ e escolhendo-se também $V = 0$ uma primeira conclusão é que $b_1 = b_2 = 0$, veja equações (8.36). Pode-se observar que a unidade da constante a é de tensão. A substituição da função de tensão na equação de compatibilidade resulta em:

$$\nabla^4 \phi = 0 \qquad \text{(a)}$$

ou seja, um problema da elasticidade foi resolvido, pois a função de tensão satisfaz as equações de equilíbrio e, de forma compacta na equação de compatibilidade escrita em função de tensão, satisfaz as relações deslocamento-deformação e tensão-deformação. Para checar qual problema é resolvido (método inverso), verificam-se as condições de contorno em força de superfície calculadas a partir do campo de tensões como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = a \qquad \forall (x_1, x_2) \in R^2 \qquad \text{(c)}$$

O que quer dizer que a função proposta representa tração simples na direção x_2 independentemente da forma do corpo analisado. Para um domínio retangular do tipo da figura 8.1 utiliza-se a fórmula de Cauchy para relacionar tensão e força de superfície.

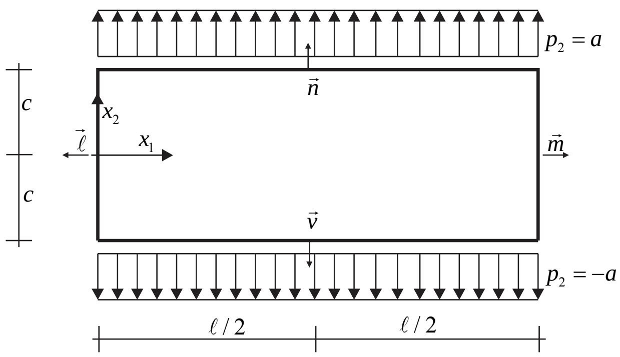


Figura 8.1 - Geometria retangular.

Assim, para $\vec{m}^t = \{1,0\}$, $\vec{n}^t = \{0,1\}$, $\vec{\ell}^t = \{-1,0\}$ e $\vec{v}^t = \{0,-1\}$ tem-se:

Na face 1, $x_1 = \ell$ tem-se: $\vec{p} = \sigma \cdot \vec{m} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \end{Bmatrix}$ (d)

Na face 2, $x_2 = c$ tem-se: $\vec{p} = \sigma \cdot \vec{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}$ (e)

Na face 3, $x_1 = 0$ tem-se: $\vec{p} = \sigma \cdot \vec{\ell} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ 0 \end{Bmatrix}$ (f)

Na face 4, $x_2 = -c$ tem-se: $\vec{p} = \sigma \cdot \vec{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sigma_{22} \end{Bmatrix}$ (g)

Ou seja, o problema resolvido é a tração simples da figura 8.1 com $a = p_2$. Essa conclusão, em problemas com faces horizontais e verticais, é trivial e pode ser feita diretamente.

8.6.2 - Flexão pura:

Escolhendo-se a função de tensão $\phi = a x_2^3 / 6$ e escolhendo-se também $V = 0$ uma primeira conclusão é que $b_1 = b_2 = 0$. Além disso, a substituição da função de tensão na equação de compatibilidade resulta em:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad \text{(a)}$$

ou seja, um problema da elasticidade foi resolvido, pois a função de tensão satisfaz as equações de equilíbrio e, embutido na compatibilidade, satisfaz as relações deslocamento-deformação e tensão-deformação. Para checar qual problema é resolvido, (método inverso) verificam-se as condições de contorno em força de superfície a partir do campo de tensões calculado como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = a x_2 \quad \text{(b)}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0 \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad \text{(c)}$$

Sem definir o corpo estudado a distribuição definida por (b) e (c) indica que apenas a tensão σ_{11} é não nula e proporcional à coordenada x_2. Definindo-se o corpo com uma geometria retangular e aplicando-se a fórmula de Cauchy nas superfícies esboça-se o problema resolvido na figura 8.2.

Este problema é obviamente a flexão pura de uma barra (ou viga) com espessura constante. A distribuição de tensão obtida independe de se tratar de estado plano de tensão ou de deformação. A integral das forças de superfície em cada face resulta nula, ou seja, força normal nula. Por outro lado, integrando-se o momento em torno do eixo x_3 em cada face, por exemplo, na face $x_1 = 2\ell$ resulta:

$$M_3 = \int_A t_1 x_2 dA = \int_A \sigma_{11} x_2 dA = e \int_{-c}^{c} a x_2^2 dx_2 = e \; a \; 2c^3 / 3 \quad \text{(d)}$$

sendo e a espessura. Como $c = h/2$ sendo h a altura, tem-se:

$$a = \frac{M_3}{\left(eh^3/12\right)} = \frac{M_3}{I_3} \tag{e}$$

onde I_3 é o momento de inércia à flexão. Substituindo-se a na equação (b) tem-se:

$$\sigma_{11} = \frac{M_3}{I_3} x_2 \tag{f}$$

que é a fórmula da flexão pura da resistência dos materiais. A solução encontrada é solução única da elasticidade linear, porém restringe a aplicação do momento externo seguindo a distribuição linear de forças de superfície da figura 8.2. Entretanto, o Princípio de Saint-Venant indica que, para uma viga longa, a distribuição de tensão (f) vale para qualquer seção transversal a uma distância maior do que a altura da barra, independentemente da distribuição de forças de superfície aplicadas nas extremidades da viga, desde que sua resultante seja o momento fletor que se pretende aplicar.

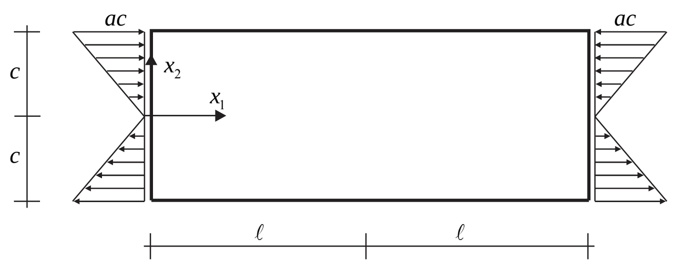


Figura 8.2 - Geometria retangular - flexão pura.

Cálculo do campo de deslocamento - EPD

Para se calcular o campo de deslocamento começa-se aplicando a relação tensão-deformação sobre o campo de tensões. Aqui aparece a diferença entre os problemas EPD e EPT, sugere-se que o leitor repita o procedimento para o EPT.

Para o EPD tem-se:

$$\varepsilon_{11} = \left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] / 2G = a\left(1-\nu\right) x_2 / (2G) = Ax_2 \tag{g}$$

$$\varepsilon_{22} = -a\nu x_2 / (2G) = -Bx_2 \tag{h}$$

$$\varepsilon_{12} = 0 \tag{i}$$

onde A e B são constantes auxiliares usadas para reduzir o tamanho das expressões.

Usando as relações deslocamentos-deformações:

$$u_{1,1} = Ax_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = Ax_1x_2 + f_1(x_2) + c_1 \tag{j}$$

$$u_{2,2} = -Bx_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -Bx_2^2/2 + f_2(x_1) + c_2 \tag{k}$$

Utilizando-se (j) e (k) em (i) escreve-se,

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Ax_1 + f_1(x_2)_{,2} + f_2(x_1)_{,1} = 0 \tag{l}$$

Na equação (l) existindo termos dependentes apenas de x_1 e apenas de x_2, a única forma da soma ser nula é que cada termo seja constante, como:

$$c_3 = Ax_1 + f_2(x_1)_{,1} \qquad \text{e} \qquad c_3 = -f_1(x_2)_{,2} \tag{m}$$

ou, rearranjando-se

$$f_2(x_1)_{,1} = c_3 - Ax_1 \qquad \text{ou} \qquad f_2(x_1) = c_3 x_1 - Ax_1^2/2 \tag{n}$$

$$f_1(x_2)_{,2} = -c_3 \qquad \text{ou} \qquad f_1(x_2) = -c_3 x_2 \tag{o}$$

onde não se acrescentou constantes devido à existência prévia de c_1 e c_2 nas equações (j) e (k). Substituindo-se (n) e (o) em (j) e (k) tem-se:

$$u_1(x_1, x_2) = Ax_1x_2 - c_3x_2 + c_1 \tag{p}$$

$$u_2(x_1, x_2) = -Bx_2^2/2 + c_3x_1 - Ax_1^2/2 + c_2 \tag{q}$$

Determinam-se as constantes de integração c_1, c_2 e c_3 através de condições de contorno em deslocamentos e giro, eliminando-se os 3 graus de liberdade do problema. Escolhe-se, por exemplo, que a barra está engastada na origem de coordenadas, portanto, no ponto $x_1 = x_2 = 0$ impõe-se translação e giro nulos, ou seja:

$$u_1(0,0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0 \tag{r}$$

$$u_2(0,0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 0 \tag{s}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_3 = 0 \tag{t}$$

Recuperando-se o valor das constantes a (equação (e)), A e B (equações (g) e (h)), resulta:

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{(1-\nu)}{2G}\frac{M_3}{I_3}x_1x_2 \tag{u}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{-M_3}{4GI_3}\left(\nu x_2^2 + (1-\nu)x_1^2\right) \tag{v}$$

Para $x_2 = 0$ e $\nu = 0$ a solução representada nas equações (u) e (v) coincidem com a solução da linha elástica dada pela resistência dos materiais. Para o EPT a solução fica:

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{M_3}{EI_3} x_1 x_2 \qquad \text{(u)}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{-M_3}{2EI_3}\left(\nu x_2^2 + x_1^2\right) \qquad \text{(v)}$$

e quando $x_2 = 0$ recupera-se a solução da linha elástica da Resistência dos Materiais que, nesse caso, não depende de ν.

8.6.3 - Flexão simples:

Neste exemplo checa-se se a função de tensão

$$\phi = -\frac{q}{40h^3}\left[5\left(\ell^2 - x_1^2\right)x_2^3 - 2h^2 x_2^3 + 15h^2 x_1^2 x_2 + x_2^5\right] \qquad \text{(a)}$$

com $V = 0$, resolve o problema ilustrado na figura 8.3, ou seja, uma flexão simples com carregamento aplicado nas duas faces (superior e inferior) da viga.

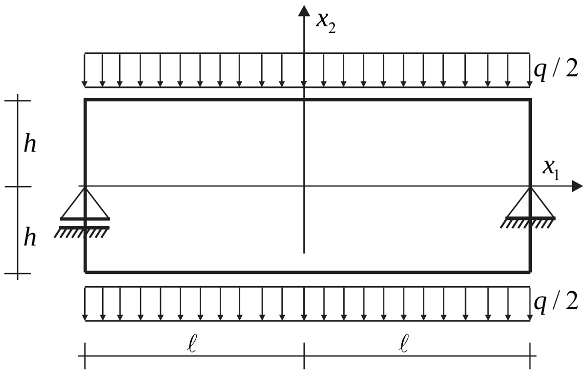


Figura 8.3 - Flexão simples.

Nas referências bibliográficas é usual que a carga esteja aplicada apenas na face superior da viga.

Diferencia-se a função de tensão, passo a passo, como segue:

$$\phi_{,1} = -\frac{q}{40h^3}\left[30h^2 x_1 x_2 - 10x_1 x_2^3\right] \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} = -\frac{q}{4h^3} x_2\left[3h^2 - x_2^2\right] \qquad \text{(c)}$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12} = \frac{3q}{4h^3} x_1\left[h^2 - x_2^2\right] \qquad \text{(d)}$$

$$\phi_{,2} = -\frac{q}{40h^3}\left[15\left(\ell^2 - x_1^2\right)x_2^2 - 6h^2 x_2^2 + 15h^2 x_1^2 + 5x_2^4\right] \qquad \text{(e)}$$

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} = -\frac{q}{40h^3}\left[30\left(\ell^2 - x_1^2\right)x_2 - 12h^2 x_2 + 20x_2^3\right] \qquad \text{(f)}$$

$$\phi_{,1111} = 0\,,\ \phi_{,2222} = -\frac{3q}{h^3}x_2\,,\ \phi_{,1212} = \frac{3q}{2h^3}x_2 \qquad \text{(g)}$$

$$\nabla^4\phi = \phi_{,1111} + 2\phi_{1212} + \phi_{2222} = -\frac{3q}{h^3}x_2 + \frac{3q}{h^3}x_2 = 0 \qquad \text{(h)}$$

donde já se conclui que a função de tensão satisfaz a equação de compatibilidade escrita em tensões e, portanto, é solução de um problema da elasticidade linear.

Inspeciona-se a força de superfície em $x_2 = h/2$ e $x_2 = -h/2$, resultando:

$$\sigma_{22}(x_1,h) = -\frac{q}{4h^3}\left[3h^3 - h^3\right] = -q/2 = p_2 \quad \text{e} \quad \sigma_{12} = 0 = p_1 \qquad \text{(i)}$$

$$\sigma_{22}(x_1,-h) = q/2 = -p_2 \quad \text{e} \quad \sigma_{12} = 0 = -p_1 \qquad \text{(j)}$$

por enquanto se confirma a solução do problema sugerido. Checam-se agora as forças de superfície na face $x_1 = \ell$, onde $\sigma_{11} = p_1$ e $\sigma_{12} = p_2$, assim:

$$p_1 = \sigma_{11}(\ell, x_2) = \frac{q}{10h^3}\left[3h^2x_2 - 5x_2^3\right] \qquad \text{(k)}$$

$$p_2 = \sigma_{12}(\ell, x_2) = \frac{3q}{4h^3}\ell\left[h^2 - x_2^2\right] \qquad \text{(l)}$$

$$F_1 = \int_A \sigma_{11}dA = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}\,e\,dx_2 = e\frac{q}{10h^3}\int_{-h}^{h}\left[3h^2x_2 - 5x_2^3\right]dx_2 = 0 \qquad \text{(m)}$$

$$M_3 = \int_A \sigma_{11}x_2dA = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}x_2\,e\,dx_2 = e\frac{q}{10h^3}\int_{-h}^{h}\left[3h^2x_2^2 - 5x_2^4\right]dx_2 = e\frac{2q}{10h^3}\left[\frac{3h^5}{3} - \frac{5h^5}{5}\right] = 0 \qquad \text{(n)}$$

$$F_2 = \int_A \sigma_{12}dA = \int_{-h}^{h}\sigma_{12}\,e\,dx_2 = e\frac{3q}{4h^3}\ell\int_{-h}^{h}\left[h^2 - x_2^2\right]dx_2 = 2e\frac{3q}{4h^3}\ell\frac{2h^3}{3} = (q\ell)e \qquad \text{(o)}$$

ou seja, força horizontal e momentos nulos e força vertical igual à metade da força aplicada nas faces horizontais.

As integrais na face $x_1 = -\ell$ resultam nos mesmos valores de forças e momentos, assim, a função de tensão proposta é solução única do problema da figura 8.3, respeitando que a distribuição de forças de superfície nas faces verticais sigam as expressões (k) e (l). É de interesse observar que, apesar de $M_3 = 0$ e $F_1 = 0$ existe valores não nulos de p_1 e seu máximo ocorre em:

$$\frac{dp_1}{dx_2} = \frac{q}{10h^3}\left[3h^2 - 15x_2^2\right] = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}h \qquad \text{(p)}$$

e, pontanto

$$p_1^{crit} = \frac{q}{5\sqrt{5}} \cong \frac{q}{11{,}18} \qquad \text{(q)}$$

ou seja, o nível de forças de superfície na direção horizontal nas faces verticais são bem inferiores à carga distribuída aplicada. Na sequência compara-se esta força de superfície com a máxima tensão σ_{11} que ocorre no centro da viga, ou seja

$$\sigma_{11}(0,x_2) = -\frac{q}{40h^3}\left[30\left(\ell^2\right)x_2 - 12h^2x_2 + 20x_2^3\right] \tag{r}$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dx_2} = -\frac{q}{10h^3}\left[7,5\ell^2 - 3h^2 + 15x_2^2\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2^{crit} \notin \left(-h,h\right) \tag{s}$$

assim, a máxima tensão de tração ocorre no extremo, em $x_2 = -h$,

$$\sigma_{11}^{\max} = \frac{q}{40}\left[\frac{30\ell^2}{h^2} + 8\right] \tag{t}$$

para, $\ell = 4h$ tem-se $\sigma_{11}^{\max} \cong 12,2q$ bem acima da carga aplicada e cerca de 100 vezes maior que a máxima força de superfície nas faces verticais. Ou seja, a solução é bastante satisfatória. Nota-se ainda que, pelo Princípio de Saint-Venant, quanto mais longa a viga maior a extensão da validade da distribuição de tensão encontrada com a função de tensão proposta.

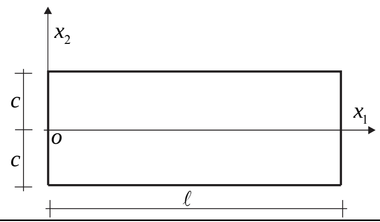
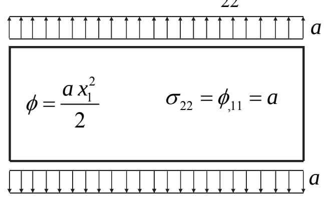
Deve-se comentar que a função de tensão (a) foi encontrada a partir da proposta:

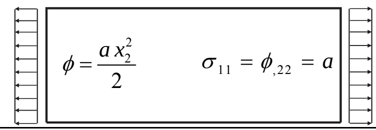
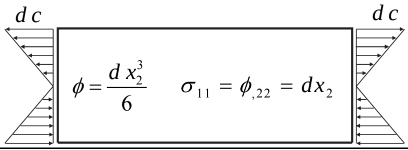
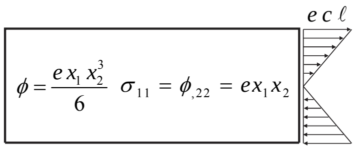
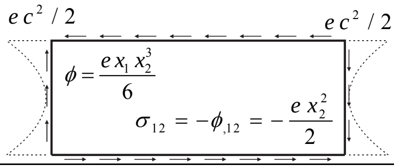
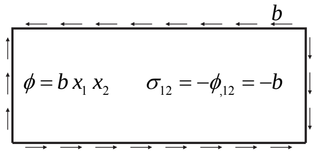
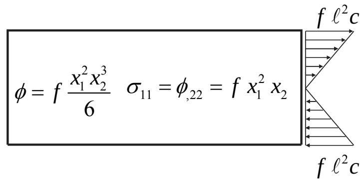
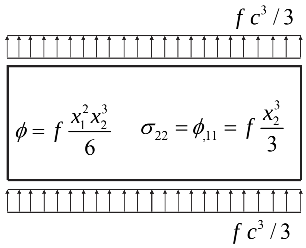
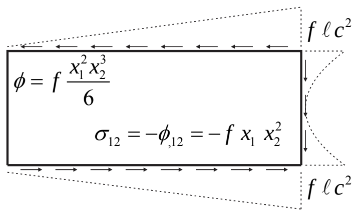
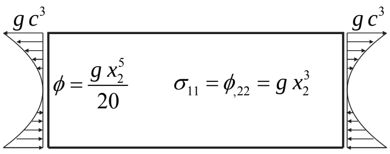
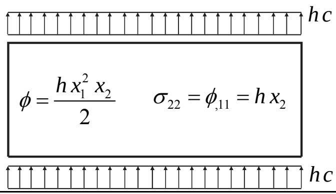
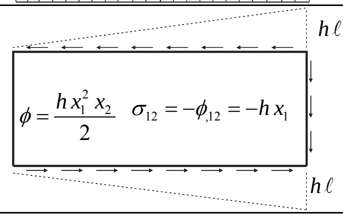
$$\phi = ax_1^2x_2^3 + bx_2^3 + cx_1^2x_2 + dx_2^5 + e \tag{u}$$

encontrando-se todas as constantes pelas equações (h), (i), (j), (m), (n) e (o), ou seja, impondo-se que a equação de compatibilidade, as condições de contorno nas faces superior e inferior e o equilíbrio global fossem satisfeitos ao mesmo tempo.

Sabe-se que as funções polinomiais parciais de (u) possuem essa forma inspecionando-se polinômios isolados e as forças de superfície que estes geram, veja a tabela 8.1 onde algumas funções de tensão polinomial são avaliadas.

Tabela 8.1 - Algumas funções polinomiais, distribuição de tensão e forças de superfície.

<table>
<tr><td>Domínio considerado e eixos
</td><td>Caso 1 - σ_{22}
</td></tr>
<tr><td>Caso 2 - σ_{11}</td><td>Caso 3 - σ_{11}</td></tr>
</table>

 a ; a ; $\phi = \frac{a\,x_2^2}{2}$ $\quad \sigma_{11} = \phi_{,22} = a$	 $d\,c$; $d\,c$; $\phi = \frac{d\,x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{11} = \phi_{,22} = d x_2$
Caso 4 - σ_{11}  $e\,c\,\ell$; $\phi = \frac{e\,x_1\,x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{11} = \phi_{,22} = e x_1 x_2$	Caso 4 - σ_{12}  $e\,c^2/2$; $e\,c^2/2$; $\phi = \frac{e\,x_1\,x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} = -\frac{e\,x_2^2}{2}$
Caso 5 - σ_{12}  b ; $\phi = b\,x_1\,x_2$ $\quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} = -b$	Caso 6 - σ_{11}  $f\,\ell^2 c$; $f\,\ell^2 c$; $\phi = f\,\frac{x_1^2 x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{11} = \phi_{,22} = f\,x_1^2\,x_2$
Caso 6 - σ_{22}  $f\,c^3/3$; $f\,c^3/3$; $\phi = f\,\frac{x_1^2 x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{22} = \phi_{,11} = f\,\frac{x_2^3}{3}$	Caso 6 - σ_{12}  $f\,\ell\,c^2$; $f\,\ell\,c^2$; $\phi = f\,\frac{x_1^2 x_2^3}{6}$ $\quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} = -f\,x_1\,x_2^2$
Caso 7 - σ_{11}  $g\,c^3$; $g\,c^3$; $\phi = \frac{g\,x_2^5}{20}$ $\quad \sigma_{11} = \phi_{,22} = g\,x_2^3$	Caso 8 - σ_{22}  $h\,c$; $h\,c$; $\phi = \frac{h\,x_1^2\,x_2}{2}$ $\quad \sigma_{22} = \phi_{,11} = h\,x_2$
Caso 8 - σ_{12}	 $h\,\ell$; $h\,\ell$; $\phi = \frac{h\,x_1^2\,x_2}{2}$ $\quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} = -h\,x_1$

8.6.4 - Viga biapoiada sob ação do peso próprio:

Neste caso, ao invés de apenas verificar a solução, determinam-se as constantes a, b e c da função de tensão polinomial, adotada juntamente com $V = \rho g x_2$, para o problema indicado na figura 8.4 (peso próprio) assumindo EPT.

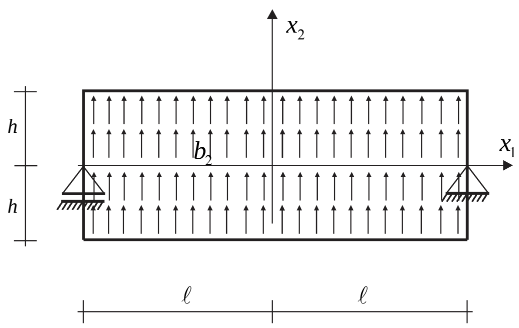


Figura 8.4 - Viga biapoiada sob força de domínio.

$$V = \rho g x_2 \tag{a}$$

$$\phi = \frac{a}{6h^2}\left(x_1^2 x_2^3 - \frac{x_2^5}{5} \right) - \frac{b x_1^2 x_2}{2} + \frac{c x_2^3}{6} \tag{b}$$

Verificando-se a equação de compatibilidade:

$$\phi_{,1111} = 0 , \qquad \phi_{,2222} = -\frac{4a}{h^2} , \qquad \phi_{,1212} = \frac{2a}{6h^2} x_2 \tag{c}$$

$$\nabla^4 \phi = \phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = \frac{4a}{h^2} - \frac{4a}{h^2} = 0 \tag{d}$$

ou seja, a função de tensão proposta é solução do problema,

Cálculo das tensões:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} + V = \frac{a}{h^2}\left(x_1^2 x_2 - \frac{2x_2^3}{3} \right) + c x_2 + \rho g x_2 \tag{e}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} + V = \frac{a x_2^3}{3h^2} - b x_2 + \rho g x_2 \tag{f}$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12} = -\frac{a x_1 x_2^2}{h^2} + b x_1 \tag{g}$$

Analisando-se a força de superfície p_1 na face superior (o mesmo ocorre na face inferior) tem-se:

$$p_1 = \sigma_{12}(h) = (b - a) x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad a = b \tag{h}$$

Na face $x_1 = \ell$ tem-se $p_2 = \sigma_{12}(\ell) = -\dfrac{a\ell x_2^2}{h^2} + b\ell$. Na face $x_1 = -\ell$ tem-se $p_2 = -\sigma_{12}(-\ell) = -\dfrac{a\ell x_2^2}{h^2} + b\ell$, assim do equilíbrio na direção x_2 resulta:

$$2\int_{-h}^{h} -\frac{a\ell x_2^2}{h^2} + b\ell dx_2 = \int_V b_2 dV = \int_V V_{,2} dV = \int_V \rho g dV = 4\rho g \ell h \tag{i}$$

ou

$$\left(-\frac{a\ell h^3}{3h^2}+b\ell h\right)=\rho g\ell h \qquad \text{ou} \qquad \left(-\frac{a}{3}+b\right)=\rho g \tag{j}$$

Analisando-se a força de superfície p_2 nas faces superior ou inferior, resulta:

$$p_2=\sigma_{22}(h)=\frac{ah^3}{3h^2}-bh+\rho gh=0 \qquad \text{ou} \qquad \left(-\frac{a}{3}+b\right)=\rho g \tag{k}$$

que, neste exemplo, coincide com a equação (j). Usando-se a equação (h), encontra-se:

$$a=b=\frac{3}{2}\rho g \tag{l}$$

Conhecido o valor de a pode-se simplificar σ_{11} como:

$$\sigma_{11}=\rho g\frac{3}{2h^2}\left(x_1^2x_2-\frac{2x_2^3}{3}\right)+cx_2+\rho gx_2 \tag{m}$$

Observando-se que a resultante da força horizontal nas faces verticais deve ser nula e que na face $x_1=\ell$ tem-se $p_1=\sigma_{11}(\ell)$ escreve-se:

$$\int_{-h}^{h}p_1dx_2=\int_{-h}^{h}\left[\rho g\frac{3}{2h^2}\left(\ell^2x_2-\frac{2x_2^3}{3}\right)+cx_2+\rho gx_2\right]dx_2=0 \tag{n}$$

que é identicamente nula pelo fato das funções no integrando serem ímpares com extremo de integração simétrico. Desta forma ainda não foi possível se determinar a constante c.

Para se determinar o valor de c é necessário se analisar a integral de momentos nas faces, ou:

$$\int_{-h}^{h}p_1\,x_2\,dx_2=2\left[\rho g\frac{3}{2h^2}\left(\ell^2\frac{h^3}{3}-\frac{2h^5}{15}\right)+c\frac{h^3}{3}+\rho g\frac{h^3}{3}\right]=0 \tag{o}$$

ou

$$c=-\rho g\left[\frac{3\ell^2}{2h^2}+\frac{2}{5}\right] \tag{p}$$

Enfim, conhecidas as constantes a, b e c a solução em tensão está completa. Caso se deseje calcular os deslocamentos, repete-se o procedimento descrito no exemplo 8.6.2.

9 - Soluções usando séries de Fourrier - Método semi-inverso - técnica das tensões:

Não custa lembrar que, para cargas de domínio constantes ($\nabla \cdot \vec{b} = 0$) a solução do problema da elasticidade bidimensional se resume a resolver a equação diferencial de compatibilidade escrita em funções de tensão como:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = 0 \tag{9.1}$$

incluindo condições de contorno em forças de superfície (ou tensões).

Limitando-se em retangular a geometria dos problemas analisados, veja figura 9.1, esta equação pode ser satisfeita por:

$$\phi = sen\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right) f\left(x_2\right) + \cos\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right) h\left(x_2\right) \tag{9.2}$$

onde $m = 1, 2, 3...$ é uma constante inteira. Cada parcela da expressão (9.2) é solução do problema com carregamento nas faces superior e inferior. A primeira parcela (em seno) resolve problemas antissimétricos (em relação ao eixo x_2), enquanto a segunda parcela é para problemas simétricos.

Carregamento antissimétrico

Antes de se superpor um número infinito de soluções caracterizando a série de Fourier, mostra-se a solução para um termo senoidal. Utilizando-se a parcela senoidal,

$$\phi = sen\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right) f\left(x_2\right) \tag{9.3}$$

e chamando-se $\alpha = (m\pi / \ell)$ para simplificar, substitui-se (9.3) em (9.1) resultando:

$$\alpha^4 sen(\alpha x_1) f - 2\alpha^2 sen(\alpha x_1) f_{,22} + sen(\alpha x_1) f_{,2222} = 0 \tag{9.4}$$

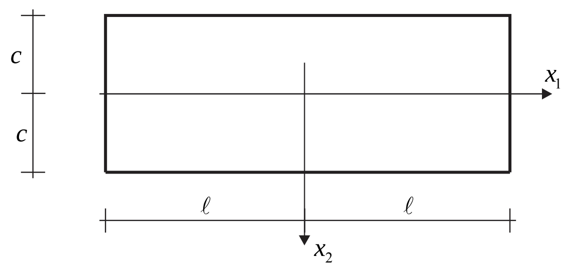


Figura 9.1 - Corpo retangular analisado.

Como $sen(\alpha x_1) \neq 0$ resulta:

$$\alpha^4 f - 2\alpha^2 f_{,22} + f_{,2222} = 0 \tag{9.5}$$

A chamada técnica semi-inversa de solução é caracterizada pelo fato de se arbitrar apenas parte da solução (9.3) e sobrar uma equação diferencial, no caso a equação (9.5), para ser resolvida. A solução da equação (9.5) é conhecida e vale:

$$f(x_2) = c_1^m \cosh(\alpha x_2) + c_2^m senh(\alpha x_2) + c_3^m x_2 \cosh(\alpha x_2) + c_4^m x_2 senh(\alpha x_2) \quad (9.6)$$

com c_1^m, c_2^m, c_3^m e c_4^m a se determinar por imposição das condições de contorno, onde o sobrescrito foi utilizado para se relacionar a parte da solução ao carregamento m adotado. Lembra-se do cálculo a notação das funções hiperbólicas:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (9.7)$$

Substituindo-se (9.6) em (9.3) escreve-se ϕ como:

$$\phi = sen\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right)\left\{c_1^m \cosh(\alpha x_2) + c_2^m senh(\alpha x_2) + c_3^m x_2 \cosh(\alpha x_2) + c_4^m x_2 senh(\alpha x_2)\right\} \quad (9.8)$$

Aplicando-se (8.31), (8.32) e (8.33) sobre (9.8) encontram-se as expressões para tensões:

$$\sigma_{11}^m = sen(\alpha x_1)\left\{c_1^m \alpha^2 \cosh(\alpha x_2) + c_2^m \alpha^2 senh(\alpha x_2) + \right.`$$

$$\left. + c_3^m \alpha\left[2 senh(\alpha x_2) + \alpha x_2 \cosh(\alpha x_2)\right] + c_4^m \alpha\left[2\cosh(\alpha x_2) + \alpha x_2 senh(\alpha x_2)\right]\right\} \quad (9.9)$$

$$\sigma_{22}^m = -\alpha^2 sen(\alpha x_1)\left\{c_1^m \cosh(\alpha x_2) + c_2^m senh(\alpha x_2) + c_3^m x_2 \cosh(\alpha x_2) + c_4^m x_2 senh(\alpha x_2)\right\} \quad (9.10)$$

$$\sigma_{12}^m = -\alpha \cos(\alpha x_1)\left\{c_1^m \alpha senh(\alpha x_2) + c_2^m \alpha \cosh(\alpha x_2) + \right.$$

$$\left. c_3^m\left[\cosh(\alpha x_2) + \alpha x_2 senh(\alpha x_2)\right] + c_4^m\left[senh(\alpha x_2) + \alpha x_2 \cosh(\alpha x_2)\right]\right\} \quad (9.11)$$

No tipo de solução procurada, as quatro constantes de integração são determinadas pela análise das forças de superfície nas faces superior e inferior do domínio retangular:

Aplicando-se a fórmula de Cauchy para o bordo superior:

$$p_1 = -\sigma_{12}(x_1, -c) \qquad \text{e} \qquad p_2 = -\sigma_{22}(x_1, -c) \quad (9.12)$$

Aplicando-se a fórmula de Cauchy para o bordo inferior:

$$p_1 = \sigma_{12}(x_1, c) \text{ e } \qquad p_2 = \sigma_{22}(x_1, c) \quad (9.13)$$

É possível se calcular as constantes de integração pelas condições de contorno (9.12) e (9.13) para vários problemas a serem superpostos. As condições de contorno serão impostas diretamente em forma de tensões, já traduzidas nas equações (9.12) e (9.13) como:

$$\sigma_{22}^m(x_1, c) = -B_{(m)} sen(m\pi x_1 / \ell) \qquad \text{e} \qquad \sigma_{22}^m(x_1, -c) = -A_{(m)} sen(m\pi x_1 / \ell) \quad (9.14)$$

e

$$\sigma_{12}^m(x_1,c)=0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_{12}^m(x_1,-c)=0 \tag{9.15}$$

Na figura 9.2 vê-se o carregamento que se pretende aplicar pelas funções impostas para $m=1$ e $m=2$, sendo, em princípio, $A_m \neq B_m$. Em particular, as forças verticais indicadas por $\vec{F}$ foram desenhadas para $A_m < B_m$. É interessante observar a mudança de sentido para dois termos consecutivos. Quando $A_m = B_m$ essas forças são nulas.

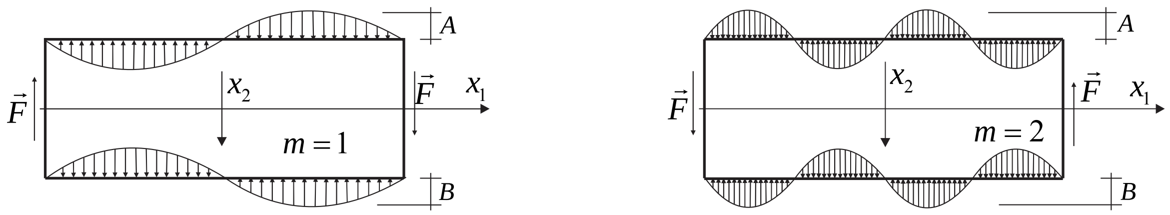


Figura 9.2 - Exemplo de cargas senoidais

Substituindo-se $x_2 = \pm c$ em (9.9), (9.10) e (9.11) e usando-se (9.14) e (9.15) resultam:

$$c_1^m = \frac{A_m + B_m}{\alpha^2}\frac{senh(\alpha c) + \alpha c\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) + 2\alpha c} \tag{9.16}$$

$$c_2^m = -\frac{A_m - B_m}{\alpha^2}\frac{\cosh(\alpha c) + \alpha c\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) - 2\alpha c} \tag{9.17}$$

$$c_3^m = \frac{A_m - B_m}{\alpha^2}\frac{\alpha\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) - 2\alpha c} \tag{9.18}$$

$$c_4^m = -\frac{A_m + B_m}{\alpha^2}\frac{\alpha\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) + 2\alpha c} \tag{9.19}$$

Substituindo-se as constantes encontradas acima nas expressões (9.9), (9.10) e (9.11) e arranjando, resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^m &= (A_m + B_m)\frac{\left(\alpha c\cosh(\alpha c) - senh(\alpha c)\right)\cosh(\alpha x_2) - \alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) + 2\alpha c} sen(\alpha x_1) + \\ &\quad -(A_m - B_m)\frac{\left(\alpha c\, senh(\alpha c) - \cosh(\alpha c)\right) senh(\alpha x_2) - \alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) - 2\alpha c} sen(\alpha x_1)\end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^m &= -(A_m + B_m)\frac{\left(\alpha c\cosh(\alpha c) + senh(\alpha c)\right)\cosh(\alpha x_2) - \alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) + 2\alpha c} sen(\alpha x_1) + \\ &\quad +(A_m - B_m)\frac{\left(\alpha c\, senh(\alpha c) + \cosh(\alpha c)\right) senh(\alpha x_2) - \alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) - 2\alpha c} sen(\alpha x_1)\end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\sigma_{12}^m = -\left(A_m + B_m\right)\frac{\alpha c\cosh(\alpha c)\,\alpha c\, senh(\alpha x_2) - \alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\,\alpha x_2\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) + 2\alpha c}\cos(\alpha x_1) + \\ +\left(A_m - B_m\right)\frac{\alpha c\, senh(\alpha c)\,\alpha c\cosh(\alpha x_2) - \alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\,\alpha x_2\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c) - 2\alpha c}\cos(\alpha x_1) \tag{9.22}$$

Para as faces $x = -\ell$ e $x = \ell$ a tensão $\sigma_{11} = 0$, por outro lado como $\cos(\alpha\ell) = \pm 1$ a tensão σ_{12} precisa de uma análise mais detalhada. O termo de σ_{12} proporcional à $(A+B)$ se auto anula em uma integral de $-c$ à c. Já o termo proporcional à $(A-B)$ se anula se $A = B$, mas equilibra o desbalanceamento das forças aplicadas nas faces horizontais (binário) caso $A \neq B$ veja a figura 9.2. Essa conclusão é indireta, já que a solução foi construída usando a função de tensão de Airy e, portanto, o equilíbrio é naturalmente satisfeito.

Observa-se que a integral das forças verticais nas faces $\pm c$ são nulas e será necessária a inclusão de termo de carregamento constante na expressão final da série de Fourier, pois essa sozinha não constrói o termo constante, veja equações (9.32) e (9.33).

Carregamento simétrico

Antes de se superpor um número infinito de soluções caracterizando a série de Fourier, semelhantemente ao que foi realizado para o termo antissimétrico, mostra-se a resumidamente a solução para um termo cossenoidal. Adotando-se,

$$\phi = \cos\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right)h\left(x_2\right) \tag{9.23}$$

Substitui-se (9.23) em (9.1) resultando:

$$\alpha^4\cos(\alpha x_1)h - 2\alpha^2\cos(\alpha x_1)h_{,22} + \cos(\alpha x_1)h_{,2222} = 0 \tag{9.24}$$

Como $\cos(\alpha x_1) \neq 0$ resulta:

$$\alpha^4 h - 2\alpha^2 h_{,22} + h_{,2222} = 0 \tag{9.25}$$

que é idêntica à equação (9.5), portanto:

$$h(x_2) = c_1^m\cosh(\alpha x_2) + c_2^m senh(\alpha x_2) + c_3^m x_2\cosh(\alpha x_2) + c_4^m x_2 senh(\alpha x_2) \tag{9.26}$$

com c_1^m, c_2^m, c_3^m e c_4^m a se determinar por imposição das condições de contorno. Substituindo-se (9.26) em (9.23) escreve-se ϕ como:

$$\phi^m = \cos\left(\frac{m\pi x_1}{\ell}\right)\left\{c_1^m\cosh(\alpha x_2) + c_2^m senh(\alpha x_2) + c_3^m x_2\cosh(\alpha x_2) + c_4^m x_2 senh(\alpha x_2)\right\} \tag{9.27}$$

As condições de contorno são aplicadas diretamente em forma de tensões, como no caso antissimétrico, ou seja:

$$\sigma_{22}^{m}(x_1,c)=-B'_{(m)}\cos(m\pi x_1/\ell) \qquad \text{e} \qquad \sigma_{22}^{m}(x_1,-c)=-A'_{(m)}\cos(m\pi x_1/\ell) \tag{9.28}$$

onde apóstrofo significa parte simétrica.

Repetindo-se todos os passos se escreve:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{m}=&\left(A'_m+B'_m\right)\frac{\left(\alpha c\cosh(\alpha c)-senh(\alpha c)\right)\cosh(\alpha x_2)-\alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)+2\alpha c}\cos(\alpha x_1)+\\ &-\left(A'_m-B'_m\right)\frac{\left(\alpha c\, senh(\alpha c)-\cosh(\alpha c)\right) senh(\alpha x_2)-\alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)-2\alpha c}\cos(\alpha x_1)\end{aligned} \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{m}=&-\left(A'_m+B'_m\right)\frac{\left(\alpha c\cosh(\alpha c)+senh(\alpha c)\right)\cosh(\alpha x_2)-\alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)+2\alpha c}\cos(\alpha x_1)+\\ &+\left(A'_m-B'_m\right)\frac{\left(\alpha c\, senh(\alpha c)+\cosh(\alpha c)\right) senh(\alpha x_2)-\alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)-2\alpha c}\cos(\alpha x_1)\end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{m}=&\left(A'_m+B'_m\right)\frac{\alpha c\cosh(\alpha c)\,\alpha c\, senh(\alpha x_2)-\alpha x_2\cosh(\alpha x_2)\,\alpha x_2\, senh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)+2\alpha c}sen(\alpha x_1)+\\ &-\left(A'_m-B'_m\right)\frac{\alpha c\, senh(\alpha c)\,\alpha c\cosh(\alpha x_2)-\alpha x_2\, senh(\alpha x_2)\,\alpha x_2\cosh(\alpha c)}{senh(2\alpha c)-2\alpha c}sen(\alpha x_1)\end{aligned} \tag{9.31}$$

Onde A' e B' são as semi-amplitudes dos carregamentos cossenoidais das superfícies inferior e superior, respectivamente, veja a figura 9.3.

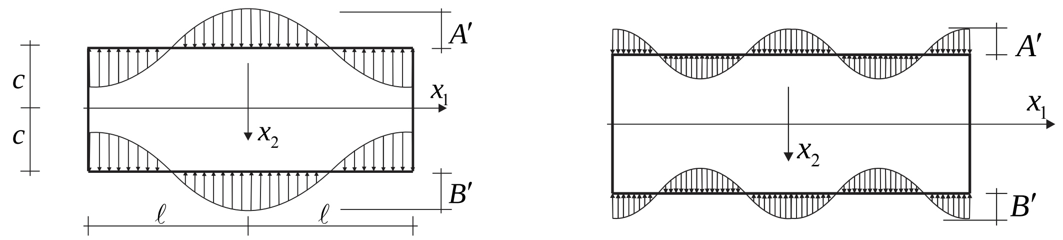


Figura 9.3 - Exemplo de cargas cossenoidais

Como se pode observar os carregamentos cossenoidais não geram tensões de cisalhamento nas faces verticais, pois não possuem resultante em força vertical nem em momento. Para completar a ausência de resultante de força vertical nas faces horizontais, nas expressões em série de Fourier serão acrescentados termos constantes que, juntamente com a série infinita de carregamentos senoidal e cossenoidal, serão capazes de reproduzir qualquer carregamento auto-equilibrado (condição natural da técnica das tensões). Por outro lado, na expressão (9.29) observa-se a presença de tensões normais σ_{11} nas faces verticais. No exemplo a ser apresentado fica claro que essas tensões não geram força normal, mas momento fletor, resolvendo de forma natural uma viga bi-engastada.

A aparente limitação das soluções (9.8) e (9.27) se deve ao fato destas comporem em (9.2) a solução geral da equação diferencial, sendo necessária a soma de um polinômio para contemplar soluções particulares vistas anteriormente no método inverso. Como já comentado, as séries de Fourier (cossenos e senos) são capazes de reproduzir as funções de associadas aos carregamentos aplicados, exceto a função constante não nula, assim, a única parcela faltante para compor a solução completa é o termos correspondente ao carregamento constante.

Superposição dos carregamentos e soluções - série de Fourier:

Utilizando-se séries de Fourier, os carregamentos compostos pelas tensões σ_{22} compressivas das figuras 9.2 e 9.3, veja figura 9.4, podem ser escritos como:

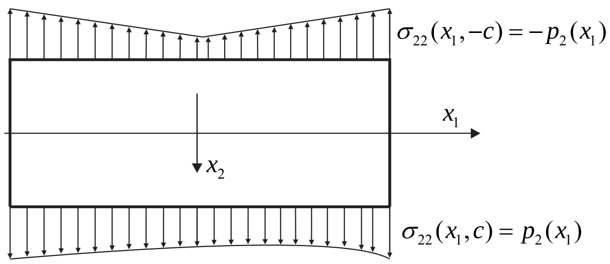


Figura 9.4 - Carregamento qualquer

$$-p_2^s(x_1) = \sigma_{22}(x_1,-c) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m sen\frac{m\pi x_1}{\ell} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos\frac{m\pi x_1}{\ell} \qquad (9.32)$$

$$p_2^i(x_1) = \sigma_{22}(x_1,c) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m sen\frac{m\pi x_1}{\ell} + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos\frac{m\pi x_1}{\ell} \qquad (9.33)$$

onde A_m, A'_m, B_m e B'_m já são carregamentos válidos na solução dos problemas simétricos e antissimétricos. As constantes A_0 e B_0 completam a solução no que diz respeito a carregamento vertical com resultante não nula nas faces superior e inferior (termo constante).

Entretanto, a resultante vertical da totalidade das cargas aplicadas nas faces superior e inferior (juntas) deve ser nula, tendo em vista a inexistência de tensões cisalhantes nas faces verticais capazes de equilibrar esse desbalanceamento, ou seja, apenas desbalanceamento de momento é coberto pelas tensões cisalhantes nas faces verticais, veja comentário após equação (9.22).

O cálculo das constantes A_0, A_m, A'_m, B_0, B_m e B'_m, a partir do carregamento que se pretende aplicar, é:

$$A_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} -p_2^s(x_1)\,dx_1 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{22}(x_1,-c)\,dx_1 \qquad (9.34)$$

$$A_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} -p_2^s(x_1)\,sen\frac{m\pi x_1}{\ell}\,dx_1 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{22}(x_1,-c)\,sen\frac{m\pi x_1}{\ell}\,dx_1 \qquad (9.35)$$

$$A'_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} -p_2^s(x_1)\cos\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_{22}(x_1,-c)\cos\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 \tag{9.36}$$

$$B_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} p_2^i(x_1)\,dx_1 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_{22}(x_1,c)\,dx_1 \tag{9.37}$$

$$B_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} p_2^i(x_1)\,sen\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_{22}(x_1,c)\,sen\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 \tag{9.38}$$

$$B'_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} p_2^i(x_1)\cos\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_{22}(x_1,c)\cos\frac{m\pi x_1}{\ell}dx_1 \tag{9.39}$$

do comentado acima, é óbvio que $A_0 = B_0$.

O cálculo das tensões fica finalmente dado por:

$$\sigma_{11}(x_1,x_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{11}^{m\,(antisim)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{11}^{m\,(sim)} \tag{9.40}$$

$$\sigma_{22}(x_1,x_2) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{22}^{m\,(antisim)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{22}^{m\,(sim)} \tag{9.41}$$

$$\sigma_{12}(x_1,x_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{12}^{m\,(antisim)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{12}^{m\,(sim)} \tag{9.42}$$

Na prática, calcula-se um número suficiente de termos até que a solução não mude significativamente, sendo possível saber qual o erro de truncamento assumido para a solução adotada. Na sequência, apresenta-se um exemplo para esclarecer o procedimento operacional.

Exemplo 9.1 - Viga bi-engastada - série de Fourier

Neste exemplo será mostrado que a viga bi-engastada da figura 9.5 é naturalmente resolvida pela solução por série de Fourier representada pelas equações (9.40), (9.41) e (9.42), calculando-se as constantes necessárias a partir de (9.34) até (9.39).

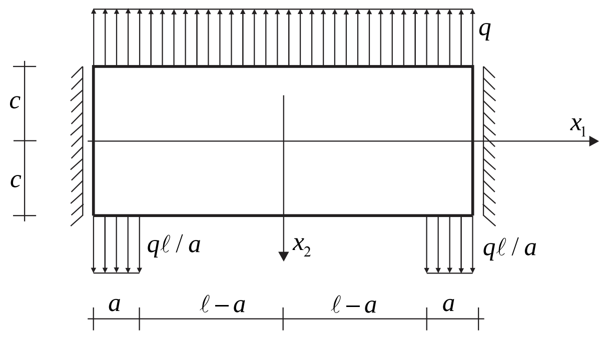


Figura 9.5 - Viga bi-engastada

Primeiramente observa-se que o carregamento é simétrico, assim, (9.32) e (9.33) se simplificam para:

$$\sigma_{22}(x_1,-c) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos\frac{m\pi x_1}{\ell} \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_{22}(x_1,c) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos\frac{m\pi x_1}{\ell} \qquad \text{(b)}$$

$$A_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} q\,dx_1 = q \qquad \text{(c)}$$

$$A'_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} q\cos(m\pi x_1/\ell)\,dx_1 = \frac{q}{\ell}\frac{\ell}{m\pi} sen(m\pi x_1/\ell)\Big|_{-\ell}^{\ell} = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$B_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{q\ell}{a}\,dx_1 = \frac{q\ell}{a}\left[\int_{-\ell}^{-(\ell-a)} dx_1 + \int_{(\ell-a)}^{\ell} dx_1\right] = q \qquad \text{(e)}$$

$$B'_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{q\ell}{a}\cos(m\pi x_1/\ell)\,dx_1 = \frac{q}{a}\left[\int_{-\ell}^{-(\ell-a)} \cos(m\pi x_1/\ell)\,dx_1 + \int_{(\ell-a)}^{\ell} \cos(m\pi x_1/\ell)\,dx_1\right] =$$

$$= \frac{q}{a}\frac{\ell}{m\pi}\left[sen(m\pi x_1/\ell)\Big|_{-\ell}^{-(\ell-a)} - sen(m\pi x_1/\ell)\Big|_{(\ell-a)}^{\ell}\right] = \frac{2q\ell}{ma\pi} sen\left(\frac{m\pi(\ell-a)}{\ell}\right) \qquad \text{(f)}$$

ou

$$B'_m = \frac{2q\ell}{ma\pi} sen\left(\frac{m\pi(\ell-a)}{\ell}\right) \qquad \text{(g)}$$

Para realizar o cálculo numérico apresentado nas equações (9.40), (9.41) e (9.42) adotaram-se os seguintes valores: $q = 1.0 kN/cm^2$, $\ell = 100cm$, $c = 10cm$ e $a = 1cm$. Calcularam-se, para 27 termos, as tensões normais no centro do vão e no engaste, i.e., $\sigma_{11}(0;10) = 25,2 kN/cm^2$, $\sigma_{11}(100\,;\,10) = -47,14 kN/cm^2$. O erro (valor do 27^o termo) é da ordem de $3x10^{-6} kN/cm^2$. Os valores esperados para a teoria técnica de flexão (cinemática de Euler-Bernouli) é $\sigma_{11}(0;10) = 25 kN/cm^2$ e $\sigma_{11}(100\,;\,10) = -50 kN/cm^2$ o que comprova que o problema resolvido foi o proposto na figura 9.5.

Para se resolver, por exemplo, a flexão simples da mesma viga, basta superpor ao problema deste exemplo aquele resolvido no item 8.6.2, ou seja, a flexão pura.

10 - Coordenadas polares aplicadas aos problemas bidimensionais:

Vários problemas de grande interesse prático são resolvidos mais facilmente quando se escrevem as equações da elasticidade em coordenadas polares. Diversos caminhos podem ser seguidos para se obter tais equações. Aqui será seguido um procedimento misto, usando-se algumas vezes simples transformações de coordenadas e em outras vezes a análise direta do problema físico em coordenadas polares. A técnica de solução mais explorada será o uso de funções de tensão de Airy. A forma de apresentação procura ser mais simples que aquela seguida pelos livros clássicos, sendo importante para o estudante que, após o entendimento dos problemas aqui apresentados, busque maior aprofundamento no assunto.

10.1 - Definição de algumas relações matemáticas:

Nesta seção, sem maiores detalhes do problema físico, algumas relações entre coordenadas polares e cartesianas são apresentadas e usadas no sentido de preparar de forma concisa algumas equações que serão aplicadas.

Seja um ponto P qualquer no espaço bidimensional, sua localização no espaço pode ser feita em função das coordenadas cartesianas $P=(x_1, x_2)$ ou das coordenadas polares $P=(r,\theta)$ sendo r a distância de P até a origem e θ o ângulo formado pelo vetor $\vec{r}$ e o eixo horizontal x_1.

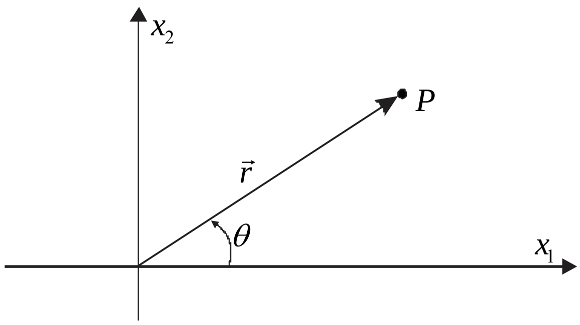


Figura 10.1 - Descrição de um ponto genérico

É muito simples se perceber que esses dois tipos de coordenadas de um ponto qualquer P se relacionam como:

$$x_1 = r\cos\theta \qquad (10.1)$$

$$x_2 = r\,sen\theta \qquad (10.2)$$

Variações de x_1 e x_2 são escritas em relação às variações de r e θ, pela regra da cadeia como:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial r}dr + \frac{\partial x_1}{\partial \theta}d\theta \tag{10.3}$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial r}dr + \frac{\partial x_2}{\partial \theta}d\theta \tag{10.4}$$

Esta expressão também pode ser entendida como a relação entre os infinitésimos dos espaços via gradiente da transformação descrita nas equações (10.1) e (10.2), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dr \\ d\theta \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dr \\ d\theta \end{Bmatrix} \tag{10.5}$$

A relação inversa também pode ser escrita, ou seja,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2}dx_2 \tag{10.6}$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}dx_2 \tag{10.7}$$

Matricialmente tem-se

$$\begin{Bmatrix} dr \\ d\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \tag{10.8}$$

Uma forma bastante simples de se obter os elementos da matriz de (10.8) e, portanto, as derivadas parciais da função inversa, é proceder a inversão da matriz da transformação em (10.5), como:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \frac{-sen\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

Desta forma, para se aproveitar resultados anteriores, pode-se escrever as derivadas parciais em relação à x_1 e x_2 de campos de interesse escritos em coordenadas polares usando-se a regra da cadeia, como:

$$f_{,i} = f_{,r}r_{,i} + f_{,\theta}\theta_{,i} \tag{10.10}$$

de forma aberta,

$$f_{,1}(r,\theta) = f_{,r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x_1} + f_{,\theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{10.11}$$

$$f_{,2}(r,\theta) = f_{,r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x_2} + f_{,\theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{10.12}$$

ou, matricialmente:

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} f_{,1}(r,\theta) \\ f_{,2}(r,\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial r}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,r}(r,\theta) \\ f_{,\theta}(r,\theta) \end{Bmatrix} = T^t \cdot \begin{Bmatrix} f_{,r}(r,\theta) \\ f_{,\theta}(r,\theta) \end{Bmatrix} \tag{10.13}$$

ou, substituindo os valores:

$$\begin{Bmatrix} f_{,1}(r,\theta) \\ f_{,2}(r,\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \dfrac{-sen\theta}{r} \\ sen\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,r}(r,\theta) \\ f_{,\theta}(r,\theta) \end{Bmatrix} \tag{10.14}$$

Para se realizar uma segunda derivada, usada para encontrar o operador bi-harmônico da equação de compatibilidade em função de tensão de Airy, escreve-se

$$g(r,\theta) = f_{,1}(r,\theta) = \cos\theta\, f_{,r}(r,\theta) - \frac{sen\theta}{r} f_{,\theta}(r,\theta) \tag{10.15}$$

$$h(r,\theta) = f_{,2}(r,\theta) = sen\theta\, f_{,r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r} f_{,\theta}(r,\theta) \tag{10.16}$$

Assim,

$$\begin{Bmatrix} f_{,11}(r,\theta) \\ f_{,12}(r,\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{,1}(r,\theta) \\ g_{,2}(r,\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \dfrac{-sen\theta}{r} \\ sen\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{,r}(r,\theta) \\ g_{,\theta}(r,\theta) \end{Bmatrix} \tag{10.17}$$

$$g_{,r}(r,\theta) = \cos\theta\, f_{,rr}(r,\theta) + \frac{sen\theta}{r^2} f_{,\theta}(r,\theta) - \frac{sen\theta}{r} f_{,\theta r}(r,\theta) \tag{10.18}$$

$$g_{,\theta}(r,\theta) = -sen\theta\, f_{,r}(r,\theta) + \cos\theta\, f_{,r\theta}(r,\theta) - \frac{\cos\theta}{r} f_{,\theta}(r,\theta) - \frac{sen\theta}{r} f_{,\theta\theta}(r,\theta) \tag{10.19}$$

Substituindo-se (10.18) e (10.19) em (10.17) e operando, resulta:

$$f_{,11} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + sen^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) - 2sen\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{10.20}$$

$$f_{,12} = -sen\theta\cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) + \left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{10.21}$$

fazendo-se omesmo para a função h tem-se:

$$f_{,22} = sen^2\theta\frac{\partial f}{\partial r^2} + \cos^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) + 2sen\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{10.22}$$

Somando-se (10.20) e (10.22) algumas simplificações ocorrem e resulta o operador Laplaciano,

$$\nabla^2 f = f_{,11} + f_{,22} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{10.23}$$

ou

$$\nabla^2 (\ ) = (\ )_{,11} + (\ )_{,22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)(\ ) \tag{10.24}$$

A determinação do operador bi-harmônico se faz aplicando (10.24) sobre ela mesma, ou seja:

$$\nabla^2\left(\nabla^2(\ )\right) = (\ )_{,1111} + 2(\ )_{,1122} + (\ )_{,2222} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)(\ )\right) \tag{10.25}$$

10.2 - Grandezas de interesse e outras equações:

No item anterior, algumas equações foram deduzidas sem relação direta com o problema da elasticidade linear, a equação (10.25) pode ser usada diretamente para se escrever a equação de compatibilidade em coordenadas polares, poupando-se diversas passagens matemáticas trabalhosas. Neste item, outras equações da elasticidade serão apresentadas, fazendo-se conexão com as grandezas de interesse.

10.2.1 - *Tensão e deformação*

O infinitésimo que representa o ponto P em coordenadas polares fica orientado, em uma forma geral, conforme indica a figura 10.2.

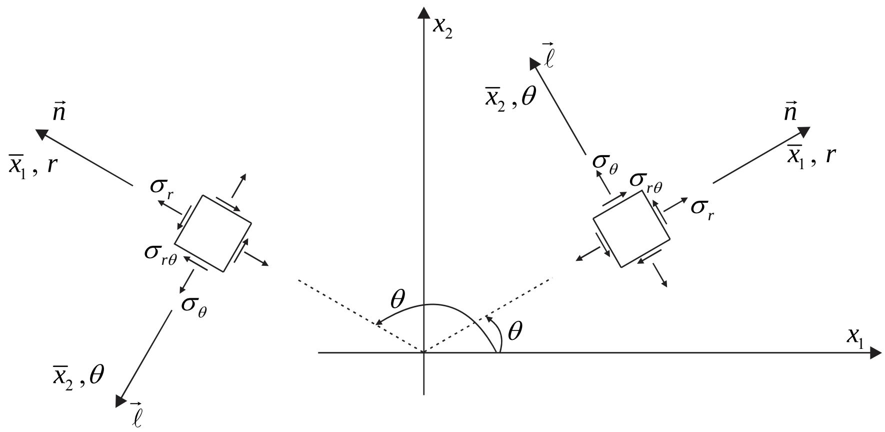


Figura 10.2 - Orientação geral das tensões em um ponto

Como se observa, para cada ponto a orientação do infinitésimo sempre possui um plano com direção normal radial $\vec{n}$ e um plano com direção normal $\vec{\ell}$ seguindo a direção circunferencial (acompanhando θ). A convenção de sinal é a mesma, basta se pensar que a direção r pode ser entendida como uma direção $\overline{x}_1$ e a direção θ como uma direção $\overline{x}_2$.

Assim, conhecido um tensor de tensões na coordenada cartesiana (x_1, x_2) se escreve um tensor de tensões em coordenada polar por simples rotação $\overline{\sigma} = R^t \cdot \sigma \cdot R$, como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (10.26)$$

ou, inversamente,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (10.27)$$

com,

$$R^t = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (10.28)$$

Como sabido, a tensão σ_{33} é invariante nesta transformação, pois o versor $\vec{m} = \{0,0,1\}^t$ fica inalterado, portanto:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_r + \sigma_\theta = cte \qquad (10.29)$$

As mesmas relações valem para deformações:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (10.30)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (10.31)$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = cte \qquad (10.31)$$

10.2.2 - *Relação Deformação - Deslocamento*

Aproveitando-se a definição de gradiente de função vetorial, equação (2.22), onde o gradiente de cada componente compõe cada linha do gradiente da função vetorial, transpõe se a equação (10.14) como:

$$\left\{ f_{,1}(r,\theta) \quad f_{,2}(r,\theta) \right\} = \left\{ f_{,r}(r,\theta) \quad f_{,\theta}(r,\theta) \right\} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \dfrac{-sen\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \qquad (10.32)$$

assim, para o vetor deslocamento se escreve:

$$\begin{Bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,r} & u_{1,\theta} \\ u_{2,r} & u_{2,\theta} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \dfrac{-sen\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \tag{10.33}$$

Observando ainda, de (1.40), que $\vec{u} = R \cdot \vec{\bar{u}}$, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \tag{10.34}$$

e dividindo-se o primeiro tensor do lado direito da expressão (10.33) em duas colunas tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{Bmatrix} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \right)_{,r} \vdots \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \right)_{,\theta} \right\} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \dfrac{-sen\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \tag{10.35}$$

O gradiente de $\vec{u}$ escrito na equação (10.35) é um tensor e, portanto, pode ser rotacionado para as coordenadas locais $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ como feito para tensões em (10.26), ou seja, $\nabla\vec{\bar{u}} = R^t \cdot \nabla\vec{u} \cdot R$, assim,

$$R^t \cdot \begin{Bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{Bmatrix} \cdot R = R^t . \left\{ \left(R \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \right)_{,r} \vdots \left(R \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \right)_{,\theta} \right\} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \dfrac{-sen\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \cdot R \tag{10.36}$$

ou seja:

$$\nabla\vec{\bar{u}} = \left\{ \left(I \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \right)_{,r} \vdots \left(R^t \cdot R_{,\theta} \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} + I \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}_{,q} \right) \right\} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ \dfrac{-sen\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \cdot R \tag{10.37}$$

ou

$$\nabla\vec{\bar{u}} = \left\{ \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}_{,r} \vdots \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}_{,\theta} \right) \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r} \end{bmatrix} \tag{10.38}$$

que resulta:

$$\nabla\vec{\bar{u}} = \begin{Bmatrix} u_{r,r} & (u_{r,\theta} - u_\theta) \\ u_{\theta,r} & (u_{\theta,\theta} + u_r) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \dfrac{(u_{r,\theta} - u_\theta)}{r} \\ u_{\theta,r} & \dfrac{(u_{\theta,\theta} + u_r)}{r} \end{bmatrix} \tag{10.39}$$

Como $\bar{\varepsilon} = \left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t\right)/2$, aproveita-se a definição (10.30) para se escrver:

$$\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t\right)/2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right] & \dfrac{1}{r}u_{\theta,\theta} + \dfrac{u_r}{r} \end{bmatrix} \qquad (10.40)$$

Escrevendo-se cada termo resulta:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (10.41)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad (10.42)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right] \qquad (10.43)$$

10.2.3 - *Relação tensão-deformação*

Conforme a definição de tensão e deformação estabelecida no item 10.2.1, as tensões e deformações em coordenadas polares são simplesmente rotações das tensões em coordenadas cartesianas. Como esse texto é dedicado apenas a materiais isotrópicos, ou seja, com lei constitutiva independente da orientação do material, a Lei de Hooke anteriormente apresentada é válida em qualquer ponto do contínuo.

Estado Plano de tensões (EPT):

Uma discussão mais completa sobre o EPT pode ser vista no item 6.5, aqui repetem-se as expressões do modelo constitutivo de forma aberta. O EPT é definido como o estado onde $\sigma_{33} = \sigma_{r3} = \sigma_{\theta 3} = 0$ e, portanto,

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \bar{\lambda}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \qquad (10.44)$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \bar{\lambda}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \qquad (10.45)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \qquad (10.46)$$

sendo,

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{10.47}$$

sendo E e ν o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, respectivamente.

Inversamente se escreve:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G}\sigma_r - \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{10.48}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G}\sigma_\theta - \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{10.49}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G}\sigma_{r\theta} \tag{10.50}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{10.51}$$

Pode-se utilizar notação indicial ou de Voigt, conforme descrito no item 6.5.

Estado Plano de deformações (EPD):

Uma discussão mais completa sobre o EPD pode ser vista no item 6.6, aqui se repetem as expressões do modelo constitutivo de forma aberta. O EPD é definido como o estado de tensão onde $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{r3} = \varepsilon_{\theta 3} = 0$ e, portanto,

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \tag{10.52}$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \tag{10.53}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \tag{10.54}$$

sendo,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{10.55}$$

com E e ν os já conhecidos módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Inversamente se escreve:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2G}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] \tag{10.56}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2G}\left[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] \tag{10.57}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G}\sigma_{r\theta} \tag{10.58}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_p^3 = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{33} = \sigma_p^3 = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{10.59}$$

Pode-se utilizar notação indicial ou de Voigt, conforme descrito no item 6.6.

10.2.4 - *Divergente da força de domínio - Equação de compatibilidade em tensões*

Conforme comentado após a equação (10.25) a equação bi-harmônica em coordenadas polares pode ser usada juntamente com as fuções de tensão de Airy para a solução do problema da elasticidade. Para a consideração das forças de domínio será necessário o cálculo do divergente das mesmas em coordenadas polares. Seguindo procedimento semelhante ao descrito no item 10.2.2, escrevem-se as derivadas parciais das forças de volume a partir das equações (10.11) e (10,12) como:

$$b_{1,1}(r,\theta) = b_{1,r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x_1} + b_{1,\theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{10.60}$$

$$b_{2,2}(r,\theta) = b_{2,r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x_2} + b_{2,\theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{10.61}$$

Sabendo-se de (1.40), que $\vec{b} = R \cdot \vec{\bar{b}}$, semelhantemente a (10.34) tem-se,

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_r \\ b_\theta \end{Bmatrix} \tag{10.62}$$

Que, substituído em (10.60) e (10.61), resulta:

$$b_{1,1}(r,\theta) = (b_r \cos\theta - b_\theta sen\theta)_{,r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + (b_r \cos\theta - b_\theta sen\theta)_{,\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{10.63}$$

$$b_{2,2}(r,\theta) = (b_r sen\theta + b_\theta \cos\theta)_{,r}\frac{\partial r}{\partial x_2} + (b_r sen\theta + b_\theta \cos\theta)_{,\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{10.64}$$

Desenvolvendo-se as derivadas e somando, resulta:

$$b_{1,1} + b_{2,2} = \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} = \nabla \cdot \vec{b} \tag{10.65}$$

As equações de compatibilidade em tensões podem ser resgatadas diretamente de (8.12) e (8.28). Usando-se (10.29), (10.65) e (10.24) tem-se:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\frac{1}{(1-\nu)}\nabla\cdot\vec{b} = -\frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \text{EPD} \qquad (10.66a)$$

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = -(1+\nu)\nabla\cdot\vec{b} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \text{EPT}$$

(10.66b)

10.2.5 - *Equações de Equilíbrio*

As equações de equilíbrio em coordenadas polares podem ser encontradas a partir das equações de equilíbrio em coordenadas cartesianas apenas aplicando passagens puramente matemáticas semelhantes às discutidas os itens anteriores. Porém o estudo do equilíbrio de um infinitésimo do domínio traz maiores informações para o leitor, ajudando na interpretação das grandezas envolvidas.

Para o infinitésimo descrito na figura 10.3, deve-se observar que as áreas (espessura unitária) das faces interna e externa do infinitésimo são, respectivamente $(r - dr/2)d\theta$ e $(r + dr/2)d\theta$. O infinitésimo de volume continua valendo $dV = rdrd\theta$, pois os infinitésimos de ordem superior podem ser desprezados.

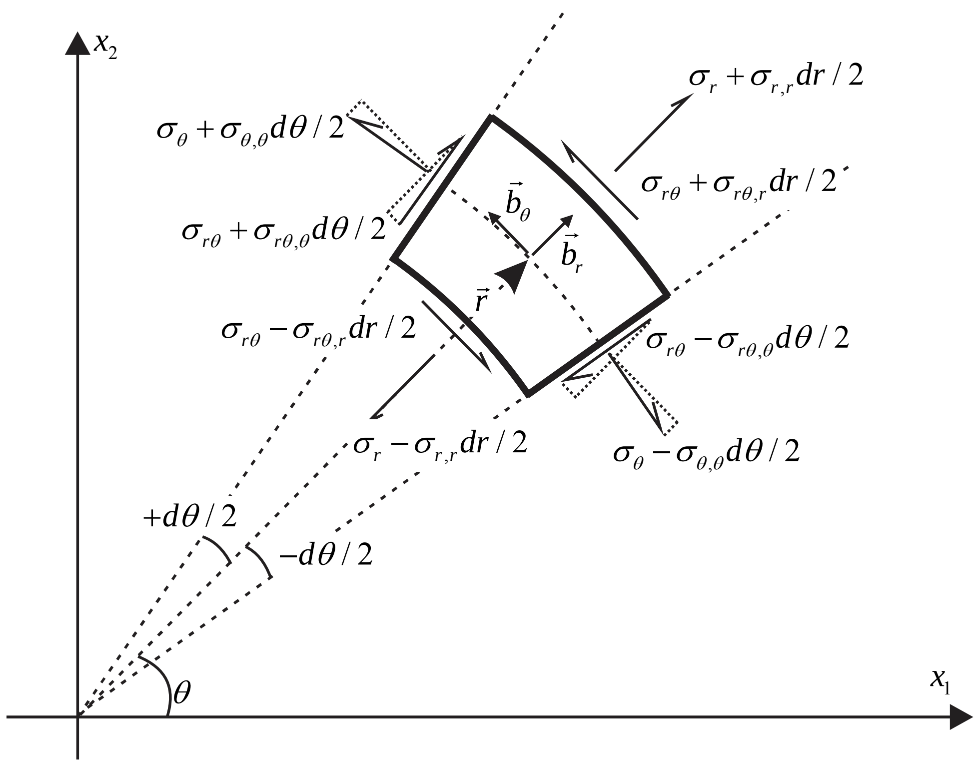


Figura 10.3 - Infinitésimo e componentes de tensão com respectivas variações

Outro detalhe da figura 10.3 é o fato das tensões $\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2$ e $\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2$ não serem paralelas ao raio central, surgindo as componentes de tensão radial:

$$(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) \qquad \text{e} \qquad (\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) \qquad (10.68)$$

e circunferencial

$$(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) \qquad \text{e} \qquad (\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) \qquad (10.69)$$

Além disso as componentes de tensão $\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2$ e $\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2$ também não são paralelas à direção circunferencial em r central, assim surgem as componentes de tensão radial

$$(\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) \qquad \text{e} \qquad (\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) \qquad (10.70)$$

e circunferencial:

$$(\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) \qquad \text{e} \qquad (\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) \qquad (10.71)$$

como $d\theta \to 0$ conclui-se que $\cos(d\theta / 2) = 1$ e $sen(d\theta / 2) = d\theta / 2$.

Lembrando-se que as equações de equilíbrio devem ser analisadas em força multiplicam-se as tensões por suas respectivas áreas, assim o desenvolvimento do equilíbrio na direção circunferencial fica:

$$(\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) dr - (\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta,\theta} d\theta / 2)\cos(d\theta / 2) dr + b_{\theta} r d\theta dr +$$

$$+(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r} dr / 2)(r + dr / 2) d\theta - (\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta,r} dr / 2)(r - dr / 2) d\theta +$$

$$(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) dr + (\sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta,\theta} d\theta / 2) sen(d\theta / 2) dr = 0 \qquad (10.72)$$

que desenvolvendo resulta:

$$\sigma_{\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} + r\sigma_{r\theta,r} + rb_{\theta} = 0 \qquad (10.73)$$

Dividindo-se a equação (10.73) por r encontra-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + b_{\theta} = \rho \ddot{u}_{\theta} \qquad (10.74)$$

Analogamente, na direção radial tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = \rho \ddot{u}_r \qquad (10.75)$$

Que são as equações de equilíbrio dinâmico (ou de movimento) em coordenadas polares, onde as forças inerciais foram devidamente acrescentadas.

10.2.6 - *O problema da elasticidade em coordenadas polares*

Este item foi inserido para se organizar as equações da elasticidade em coordenadas polares mostrando que o problema da elasticidade já está colocado. As equações (10.74) e (10.75) são as duas equações de equilíbrio. As equações (10.44), (10.45) e (10.46) ou (10.52), (10.53) e (10.54) relacionam tensões e deformações. Finalmente, as equações (10.41), (10.42) e (10.43) relacionam os deslocamentos e as deformações. Tem-se um total de 8 equações para 8 incógnitas, a saber: três tensões $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta})$, três deformações $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta})$ e dois deslocamentos (u_r, u_θ). As condições de contorno do problema são semelhantes às descritas para coordenadas cartesianas e ficam claras nas análises dos problemas propostos.

Assim, o problema está bem definido e pode ser resolvido pelas técnicas em tensões ou em deslocamentos, como será mostrado na sequência.

10.2.7 - *Funções de tensão de Airy em coordenadas polares*

Aproveitando-se todos os desenvolvimentos realizados para a função de tensão em coordenadas cartesianas e observando-se a figura 10.2, pode-se chegar à figura 10.4 onde se indica que:

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}_2^2} + V \qquad (10.76)$$

$$\sigma_\theta = \bar{\sigma}_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}_1^2} + V \qquad (10.77)$$

$$\sigma_{r\theta} = \bar{\sigma}_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} \qquad (10.78)$$

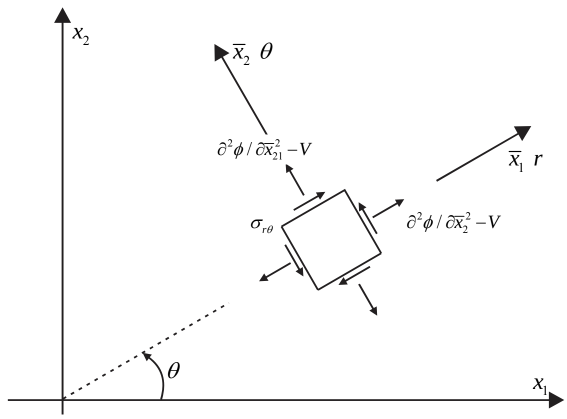


Figura 10.4 - Tensão a partir da função de tensão de Airy

Pela figura 10.4 observa-se que as coordenadas locais $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ acompanham as coordenadas polares (r,θ). Tomando-se como origem da coordenada polar a própria coordenada local $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ o ângulo θ será sempre nulo e as derivadas em relação à $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ podem ser calculadas como em relação à (r,θ) pela regra da cadeia dada pelas equações (10.20), (10.21) e (10.22) adotando-se $\theta = 0$, ou seja:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + V\,, \qquad \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + V\,, \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \tag{10.79}$$

Além disso, usando-se as equações (10.15) e (10.16) com $\theta = 0$ tem-se:

$$b_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad \text{e} \qquad b_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \tag{10.80}$$

Finalmente, aproveitando a notação dyadica, escreve-se a equação de compatibilidade escrita com a função de tensão de Airy em sua forma geral, equações (8.39b) e (8.40b), aproveitando-se as passagens de (10.66a) e (10.66b) como:

$$\nabla^4\phi = \frac{(2\nu-1)}{(1-\nu)}\nabla^2 V = -\frac{(2\nu-1)}{(1-\nu)}\nabla\cdot\vec{b} = -\frac{(2\nu-1)}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}\right) \qquad \text{EPD} \tag{10.81}$$

$$\nabla^4\phi = (\nu-1)\nabla^2 V = -(\nu-1)\nabla\cdot\vec{b} = -(\nu-1)\left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}\right) \qquad \text{EPT} \tag{10.82}$$

Lembrando-se de como se calculam $\nabla^2(\ )$ e $\nabla^4(\ )$, equações (10.24) e (10.25),

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \tag{10.83}$$

$$\nabla^4\phi=\nabla^2\left(\nabla^2\phi\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) \quad (10.84)$$

10.3 - Problemas axissimétricos - técnica das tensões

Quando o problema a ser analisado é axissimétrico, ou seja, simétrico em relação ao eixo x_3, nenhuma variável depende de θ. Dito isso, equações (10.79) resultam:

$$\sigma_\theta=\frac{d^2\phi}{dr^2}+V\,, \qquad \sigma_r=\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}+V\,, \qquad \sigma_{r\theta}=0 \quad (10.85)$$

Com relação à equação de compatibilidade escrita em função de tensões, esta se simplifica para:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right)=\frac{d^4\phi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr}=\frac{2\nu-1}{1-\nu}\left(\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) \quad (10.86)$$

onde as derivadas parciais passam a ser derivadas ordinárias pois o problema depende apenas de r .

Na ausência de forças de volume, tem-se:

$$\frac{d^4\phi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr}=0 \quad (10.87)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária e possui solução geral conhecida, como:

$$\phi=Ar^2\ln r+Br^2+C\ln r+D \quad (10.88)$$

onde $A, B, C \; e \; D$ são constantes a se determinar pelas condições de contorno em forças de superfície. Comenta-se que, no caso de problemas axissimétricos, a força de superfície na superfície externa (circular) coincide com a tensão σ_r já na superfície interna (circular) a força de superfície é dada por $-\sigma_r$. Como em problemas axissimétricos tem-se $\sigma_{r\theta}\equiv 0$, a força de superfície tangencial (superfície circular) é sempre nula.

Aplicando-se as equações (10.85) sobre (10.88) tem-se:

$$\sigma_r=2A\ln r+\frac{C}{r^2}+A+2B \quad (10.89)$$

$$\sigma_\theta=2A\ln r-\frac{C}{r^2}+3A+2B \quad (10.90)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \qquad (10.91)$$

10.3.1. Cilindro maciço

Tendo em vista que se está solucionando um problema axissimétrico apenas dois tipos de problemas maciços podem ser resolvidos observando-se a figura 10.4, ou seja, um cilindro ou disco livre nas faces x_3 submetido a uma tensão radial constante na superfície cilíndrica e uma tensão qualquer (também constante) na superfície x_3, ou um cilindro impedido de se deslocar na direção x_3 (EPD) submetido a uma tensão radial constante na superfície cilíndrica. O primeiro caso pode ser resolvido como a superposição do caso com $\sigma_{33} = 0$ (EPT) com o estado uniaxial de tensão em uma barra cilíndrica sujeita a uma força normal advinda de uma distribuição de tensão constante, $\sigma_{33} = cte$.

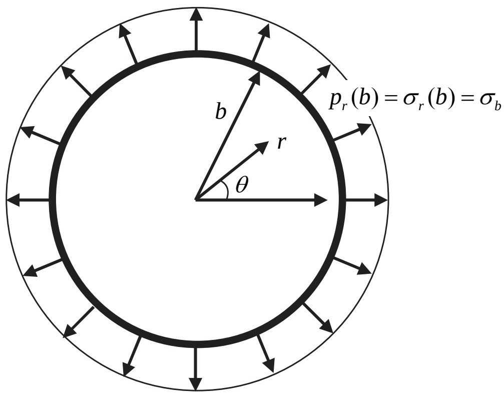


Figura 10.5 - Cilindro maciço - em solicitação axissimétrica

Sendo a solução geral em tensões dada pelas expressões (10.89), (10.90) e (10.91) deve-se observar que o problema a ser resolvido possui tensão limitada e, portanto:

$$\lim_{r \to 0} \sigma_r \neq \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 0 \qquad C = 0 \qquad (10.92)$$

$$\lim_{r \to 0} \sigma_\theta \neq \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 0 \qquad C = 0 \qquad (10.93)$$

Assim, para o problema maciço tem-se:

$$\sigma_r = 2B \qquad \sigma_\theta = 2B \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad (10.94)$$

Caso óbvio de cilindro submetido à tensão uniforme. No caso de EPD tem-se ainda que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$.

10.3.2. Tubo (ou anel) de parede espessa

Como $\sigma_{r\theta} = 0$ para qualquer problema axissimétrico, o caso que se pretende resolver é o descrito pela figura 10.6. Para simplificar, consideram-se diretamente as condições de contorno como sendo as tensões normais às superfícies interna $\sigma_r(a) = \sigma_a$ e externa $\sigma_r(b) = \sigma_b$.

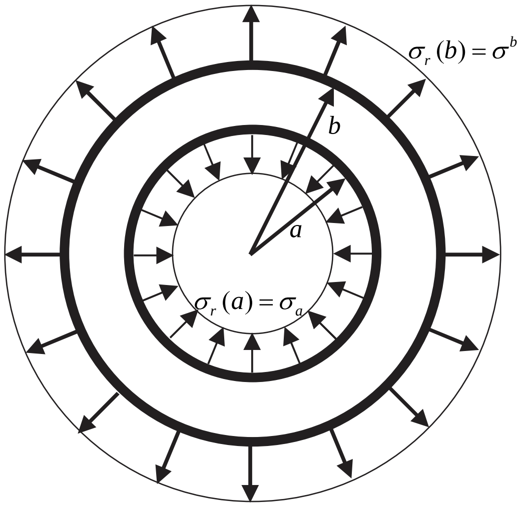


Figura 10.6 - Tubo (ou anel) de parede espessa.

A solução geral do problema em tensões está representada nas equações (10.89), (10.90) e (10.91). Neste caso não há singularidade a ser verificada e, portanto, existem 3 constantes a se determinar e apenas duas condições de contorno. Isto confirma a afirmação feita no item 7.6 sobre unicidade de soluções de corpos multiconexos. Para resolver este problema é necessário se escrever o deslocamento radial do corpo (que é o mesmo segundo qualquer raio) vindo das relações deslocamento/deformações e tensões/deformações, como segue:

Das equações (10.41), (10.42) e (10.43), para problemas axissimétricos, tem-se:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{r\theta} = 0 \tag{10.95}$$

Já a Lei de Hooke, equações (10.44) e (10.45) ou (10.52) e (10.53) podem ser escritas de forma unificada, já usando-se (10.95) como:

$$\frac{du_r}{dr} = K_1\left(\sigma_r - K_2\sigma_\theta\right) \tag{10.96}$$

$$\frac{u_r}{r} = K_1\left(\sigma_\theta - K_2\sigma_r\right) \quad (10.97)$$

com

$$K_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{para o EPD} \quad (10.98)$$

$$K_1 = \frac{1}{E} \quad \text{e} \quad K_2 = \nu \quad \text{para o EPT} \quad (10.99)$$

Substituindo-se (10.89) e (10.90) em (10.96) e (10.97) e integrando-se (10.96) resultam duas expressões para u_r, ou seja:

$$u_r = K_1\left[2Ar\ln r - Ar + 2Br - C/r - K_2\left(2Ar\ln r + Ar + 2Br + C/r\right) + F\right] \quad (10.100)$$

$$u_r = K_1\left[2Ar\ln r + 3Ar + 2Br - C/r - K_2\left(2Ar\ln r + Ar + 2Br + C/r\right)\right] \quad (10.101)$$

Imaginando-se que a linha radial analisada dividisse o corpo em duas partes, veja a figura 7.2, caso (10.100) fosse diferente de (10.101) não se estaria analisando o anel proposto. Assim, igualando-se (10.100) e (10.101) cria-se a condição de unicidade da solução para o anel estudado que resulta:

$$4Ar - F = 0 \quad (10.102)$$

que deve valer qualquer que seja r, conduzindo à $A = F = 0$.

Voltando-se às equações (10.89) e (10.90) determinam-se as constantes B e C como:

$$\sigma_a = \frac{C}{a^2} + 2B \quad (10.103)$$

$$\sigma_b = \frac{C}{b^2} + 2B \quad (10.104)$$

donde:

$$C = \frac{a^2b^2\left(\sigma_a - \sigma_b\right)}{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad 2B = \frac{\sigma_b b^2 - \sigma_a a^2}{b^2 - a^2} \quad (10.104)$$

Organiza-se o cálculo do deslocamento radial como:

$$u_r = K_1\left[2B\left(1-K_2\right)r - \frac{C}{r}\left(1+K_2\right)\right] \quad (10.105)$$

É interessante se comentar que esta solução é facilmente estendida para a análise de um orifício em um meio infinito fazendo-se nas expressões (10.104) $b \to \infty$ e $\sigma_b = 0$, resultando:

$$\lim_{b\to\infty} C = a^2\sigma_a \qquad \text{e} \qquad \lim_{b\to\infty} 2B = 0 \qquad (10.106)$$

Com esses resultados vários problemas como anéis reforçados, túneis reforçados ou não, tubos protendidos etc., podem ser resolvidos.

10.3.4. Flexão pura de barra curva

Em análises na teoria técnica de flexão da resistência dos materiais, é usual se considerar a flexão de barras circulares com a mesma hipótese da flexão de barras retas. Esta hipótese é aceitável se a seção transversal da barra for muito menor que o comprimento da mesma. No caso de barras mais robustas a técnica das tensões da teoria da elasticidade deve ser empregada. O problema a ser resolvido está apresentado na figura 10.7.

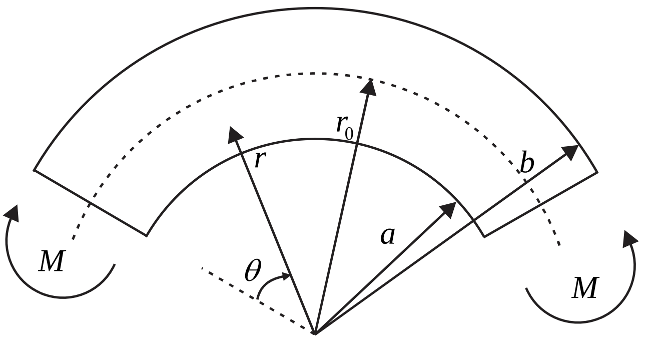


Figura 10.7 - Flexão pura de barra curva

Para se identificar que é um problema axissimétrico basta observar que este não depende da orientação angular escolhida para analisá-lo. Assim, equação de compatibilidade em tensões é a equação (10.87) com solução (10.88). Consequentemente a distribuição de tensões deve ter a forma de (10.89), (10.90) e (10.91), ou seja:

$$\sigma_r = 2A\ln r + \frac{C}{r^2} + A + 2B \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_\theta = 2A\ln r - \frac{C}{r^2} + 3A + 2B \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \qquad \text{(c)}$$

onde, ao invés de se utilizar número de equações, se utiliza letras para simplificar a organização dos casos estudados.

As condições de contorno (escritas diretamente em tensões) nas faces interna e externa são:

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0 \qquad \sigma_{r\theta}(a) = \sigma_{r\theta}(b) = 0 \tag{d}$$

Já, pelo fato de $\sigma_{r\theta}(r,\theta) = 0$, equação (c), inerente ao problema axissimétrico, essa condição já fica satisfeita nas faces radiais. Lembra-se que a extensão angular do problema é qualquer, apenas se considera o anel aberto.

Assim, nas faces radiais $\sigma_\theta \neq 0$ e a equação de equilíbrio em momento deve ser satisfeita, ou seja:

$$\int_a^b \sigma_\theta(r,\theta)\, r\, dr - M = 0 \tag{e}$$

Onde, por conveniência, o centro da circunferência foi escolhido como referência.

Substituindo-se (a) nas primeiras equações de (d), tem-se:

$$2A\ln a + \frac{C}{a^2} + A + 2B = 0 \tag{f}$$

$$2A\ln b + \frac{C}{b^2} + A + 2B = 0 \tag{g}$$

Para realizar a integração (e) é interessante lembrar a equação (10.85) com $V = 0$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} \tag{h}$$

que, em (e) fica:

$$\int_a^b \frac{d^2\phi}{dr^2} r\, dr = \left.\frac{d\phi}{dr} r\right|_a^b - \int_a^b \frac{d\phi}{dr} dr \tag{i}$$

ainda de (10.85) a tensão radial fica dada por $\sigma_r = r^{-1}\partial\phi / \partial r$. Pela condição de contorno (d) $\sigma_r(a) = 0$ e $\sigma_r(b) = 0$. Conclui-se qu o primeiro termo de (i) é nulo, e o segundo termo está resolvido. Assim, voltando-se à equação (e), tem-se:

$$\left.\phi\right|_a^b + M = 0 \tag{j}$$

ou, usando-se a equação (10.88) tem-se:

$$A(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + B(b^2 - a^2) + C(\ln b / a) = -M \qquad \text{(k)}$$

Resolvendo-se o sistema (f), (g) e (k) para as constantes A, B e C, resulta:

$$C = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad A = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2) \text{ e}$$

$$B = \frac{M}{N}\left[b^2 - a^2 + 2\left(b^2 \ln b - a^2 \ln a\right)\right] \qquad (\ell)$$

com

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2 \qquad \text{(m)}$$

Substituindo-se as constantes nas expressões das tensões (a) e (b)

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r}\right) \qquad \text{(n)}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2\right) \qquad \text{(o)}$$

com $\sigma_{r\theta} = 0$.

Uma solução obtida da resistência dos materiais 'avançada' (Shiel 1884) baseada em seção plana permanece plana, pode ser escrita para seção transversal retangular como:

$$\sigma_\theta = \frac{M}{Ar} \frac{(r_0 - r)}{(r_c - r_0)} = \frac{M}{r} \frac{1}{(b-a)e} \frac{(r_0 - r)}{(r_c - r_0)} \qquad \text{(p)}$$

onde e é a espessura e

$$r_c = (a - b)/2 \qquad \text{e} \qquad r_0 = \frac{(b-a)}{\ln(b/a)} \qquad \text{(q)}$$

sendo r_0 é a posição da linha neutra. A comparação entre as equações (q) e (o) deve ser feita numericamente, mas o erro é pequeno, por exemplo, para uma relação $b/a = 1,3$ a diferença relativa máxima entre (o) e (p) é de aproximadamente $0,1\%$. Além disso, as máximas tensões normais σ_θ ocorrem sempre nos raios internos e externos da barra.

10.4 - Problemas diversos - técnica das tensões, método semi-inverso

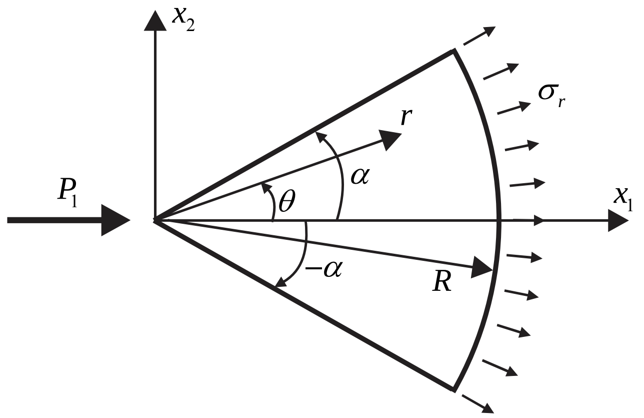
Conforme comentado anteriormente, no método semi-inverso uma parcela da solução é arbitrada enquanto a outra parcela é encontrada por solução direta de equações diferenciais. Uma forma muito utilizada para se criar propostas de solução é a separação de variáveis que, em geral, é feita propondo-se um produto de funções dependentes de apenas uma variável. No caso das coordenadas polares, a separação de variáveis fica:

$$\phi(r,\theta) = h(r).f(\theta) \qquad (10.107)$$

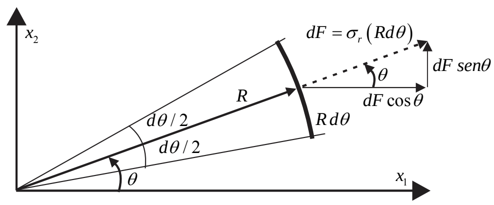
Em geral arbitra-se $h(r)$ e determina-se $f(\theta)$, como em alguns casos analisados a seguir.

10.4.1 - Carregamento concentrado longitudinal em uma cunha simétrica:

Seja a cunha ilustrada na figura 10.8a, submetida ao carregamento de uma força concentrada P_1 na direção x_1.



(a) Cunha e carregamento



(b) Infinitésimo de força na superfície

Figura 10.8 - Cunha simétrica

Ao se adotar a função de tensão

$$\phi = r\ f(\theta) \qquad (10.108)$$

observa-se que

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0 \qquad (a)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

motivo pelo qual na figura 10.8b não há forças de superfície indicadas nas faces $\pm\alpha$ e não há força tangencial (ou tensão de cisalhamento) na superfície $r = R$.

Substituindo-se (10.108) na equação de compatibilidade encontra-se:

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f(\theta) = 0 \qquad (10.109)$$

cuja solução é conhecida:

$$f(\theta) = A sen\theta + B\cos\theta + C\,\theta sen\theta + D\,\theta\cos\theta \qquad (10.110)$$

Calcula-se também,

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} f(\theta) + \frac{1}{r^2} r \frac{d^2 f}{d\theta^2} = \frac{2}{r}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right) \quad (10.79) \qquad \text{(c)}$$

Na figura 10.8b indica-se um infinitésimo de força na superfície $r = R$ decomposto nas direções x_1 e x_2. A seguir escrevem-se as equações globais de equilíbrio nas direções x_1 e x_2,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\theta)\,\sigma_r\, R d\theta + P_1 = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (sen\theta)\,\sigma_r\, R d\theta = 0 \qquad \text{(e)}$$

Substituindo-se a equação (c) em (d) e (e), calculada em $r = R$, encontram-se:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\theta)\left(\frac{2}{R}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right)\right) R d\theta + P_1 = 0 \qquad \text{(f)}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (sen\theta)\left(\frac{2}{R}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right)\right) R d\theta = 0 \qquad \text{(g)}$$

Desenvolvendo-se (f) e (g) encontram-se:

$$2C\frac{1}{2}\left(\theta + sen\theta\cos\theta\right)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} - 2D\frac{1}{4}(-\cos 2\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} + P_1 = 2C\left(\alpha + sen\alpha\cos\alpha\right) + P_1 = 0 \qquad \text{(h)}$$

ou seja,

$$C = -\frac{P_1}{2\alpha + sen 2\alpha} \qquad \text{(i)}$$

e

$$2D\frac{1}{2}\left(\theta - sen\theta\cos\theta\right)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} + 0C = 2D\left(\alpha - sen\alpha\cos\alpha\right) = 0 \quad \text{ou} \quad D = 0 \qquad \text{(j)}$$

Finalmente, substituindo-se (j) e (i) na equação (c) a distribuição de tensões do problema resolvido fica:

$$\sigma_r = -\frac{2P_1}{2\alpha + sen2\alpha}\frac{\cos\theta}{r} \qquad \sigma_\theta = 0 \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad \text{(k)}$$

Deve-se comentar que ao se utilizar a carga concentrada a tensão calculada em $r \to 0$ tende ao infinito, o que é coerente revelando que soluções de problemas em elasticidade linear podem ter singularidades. Do ponto de vista prático, aplica-se o Princípio de Saint-Venant e considera-se a solução válida a certa distância do ponto de aplicação da carga.

Substituindo-se (i) nas equações (10.110) e (10.108) escreve-se a função de tensão como:

$$\phi = -\frac{P_1}{2\alpha + sen2\alpha} r\,\theta sen\theta \qquad (\ell)$$

Observa-se ainda que como todas as forças infinitesimais $\sigma_r(Rd\theta)$ sempre passam pelo ponto de aplicação da carga (vértice da cunha), a verificação do equilíbrio de momentos é, portanto, trivial. Esta já estava contemplada pela simetria do tensor de tensões de Cauchy.

10.4.2 - Carregamento transversal em uma cunha simétrica:

O problema a ser resolvido é o apresentado na figura 10.9.

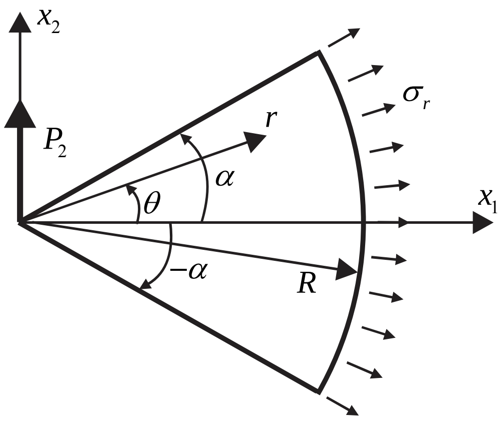


Figura 10.9 - Cunha simétrica submetida a carregamento transversal concentrado

A função de tensão (10.108) também é sugerida como solução para o problema, assim valem também a figura 10.8b e as equações (10.109) e (10.110), ou seja, podem-se encontrar:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} f(\theta) + \frac{1}{r^2} r \frac{d^2 f}{d\theta^2} = \frac{2}{r}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right) \qquad \text{(c)}$$

Usando-se a figura (10.8b), as equações de equilíbrio são escritas como:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\theta)\left(\frac{2}{R}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right)\right) R d\theta = 0 \qquad \text{(f)}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (sen\theta)\left(\frac{2}{R}\left(C\cos\theta - D\,sen\theta\right)\right) R d\theta + P_2 = 0 \qquad \text{(g)}$$

Assim, neste caso resulta:

$$C = 0 \qquad \text{e} \qquad D = \frac{P_2}{2\alpha - sen2\alpha} \qquad \text{(h)}$$

Finalmente, substituindo-se (h) em (c), resulta:

$$\sigma_r = -\frac{2P_2}{2\alpha - sen2\alpha}\frac{sen\theta}{r} \qquad \sigma_\theta = 0 \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad \text{(i)}$$

Os mesmos comentários feitos no final da solução anterior são válidos para esse caso.

Substituindo-se (i) nas equações (10.110) e (10.108) escreve-se a função de tensão como:

$$\phi = \frac{P_2}{2\alpha - sen2\alpha} r\,\theta\cos\theta \qquad (\ell)$$

10.4.3 - Cunha assimétrica sob carregamento concentrado no vértice:

Este problema pode ser resolvido pensando-se em se aplicar giro nos exemplos anteriores e depois somar as soluções de forma adequada. Será feita, entretanto, a integração assimétrica das forças de superfície buscando o equilíbrio global nas direções x_1 e x_2 para duas funções de tensão ϕ^A e ϕ^B com a superposição dos resultados de forma conveniente.

Na figura 10.10 apresentam-se os dois casos e suas respectivas funções de tensão a serem usados na solução. Observa-se que as funções de tensão são correspondentes às duas última parcelas da solução (10.110) com as duas primeiras sabidamente nulas das soluções anteriores..Deve-se observar que a única diferença entre eles é a função de tensão aplicada implicando no cálculo das respectivas forças concentradas.

Ainda sobre as figuras, as duas componentes de força ilustradas em cada problema decorrem da assimetria estabelecida em relação ao eixo x_1 para os problemas apesar das funções de tensão adotadas.

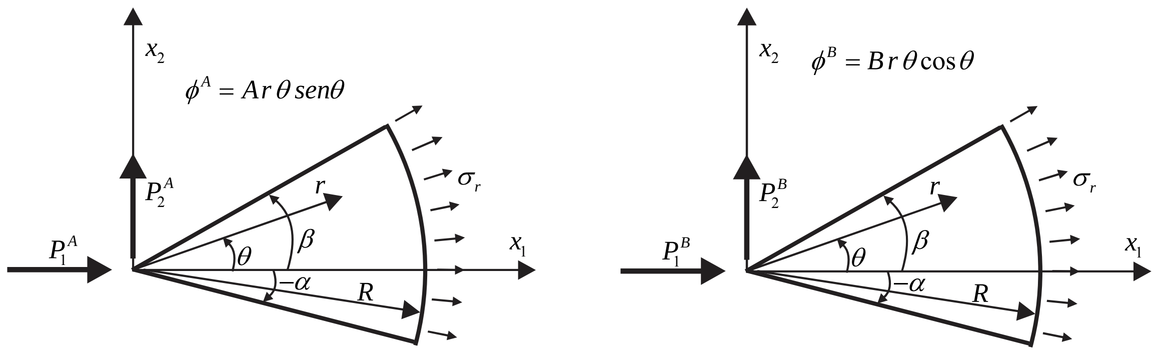


Figura 10.10 - Funções de tensão e respectivos problemas

Aproveitando-se os resultados dos itens anteriores sabe-se que $\sigma_\theta = 0$ e $\sigma_{r\theta} = 0$ para os dois problemas. Entretanto,

$$\sigma_r^A = \frac{2A\cos\theta}{r} \qquad \text{e} \qquad \sigma_r^B = -\frac{2Bsen\theta}{r} \qquad \text{(a)}$$

As equações de equilíbrio de força neste caso ficam:

$$P_1^A + 2A\int_{-\alpha}^{\beta}\cos^2\theta d\theta = 0 \qquad P_2^A + 2A\int_{-\alpha}^{\beta}\cos\theta sen\theta\, d\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$P_1^B - 2B\int_{-\alpha}^{\beta}\cos\theta\, sen\theta\, d\theta = 0 \qquad P_2^B - 2B\int_{-\alpha}^{\beta} sen^2\theta\, d\theta = 0 \qquad \text{(c)}$$

Integrando-se resulta:

$$P_1^A = -\frac{A}{2}\left[2(\alpha+\beta) + (sen2\alpha + sen2\beta)\right] \qquad P_2^A = \frac{A}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) \qquad \text{(d)}$$

$$P_1^B = -\frac{B}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) \qquad P_2^B = \frac{B}{2}\left[2(\alpha+\beta) - (sen2\alpha + sen2\beta)\right] \qquad \text{(e)}$$

Considerando-se agora que a carga total aplicada na cunha assimétrica é a soma das cargas dos problemas A e B, ou seja:

$$P_1 = P_1^A + P_1^B \qquad\qquad P_2 = P_2^A + P_2^B \qquad \text{(f)}$$

resulta:

$$-\frac{A}{2}\left[2(\alpha+\beta) + (sen2\alpha + sen2\beta)\right] - \frac{B}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = P_1 \qquad \text{(g)}$$

$$\frac{A}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) + \frac{B}{2}\left[2(\alpha+\beta) - (sen2\alpha + sen2\beta)\right] = P_2 \qquad \text{(h)}$$

Que é um sistema de equações para se determinar A e B. Simplifica-se o sistema (g) e (h) chamando-se:

$$o = 2(\alpha+\beta) \qquad s = sen2\alpha + sen2\beta \quad \text{e} \quad c = \cos 2\beta - \cos 2\alpha \qquad \text{(i)}$$

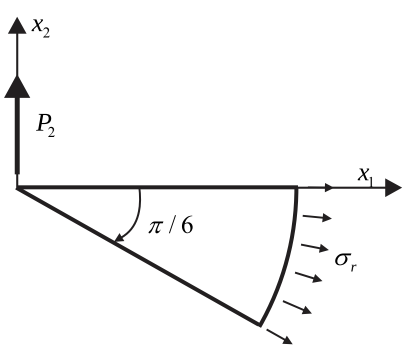
Resolvendo-se o sistema para valores conhecidos de P_1, P_2, α e β, encontra-se:

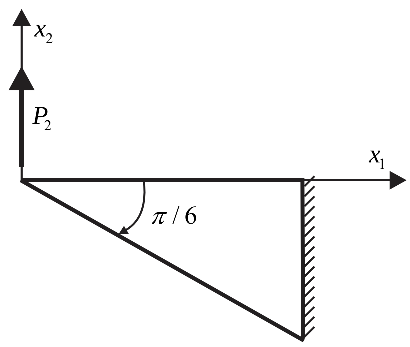
$$A = \frac{2\left(c\,P_2 - (s-o)P_1\right)}{\left(c^2+s^2+o^2\right)} \qquad B = \frac{-2\left(c\,P_1 + (s+o)P_2\right)}{\left(c^2+s^2+o^2\right)} \qquad \text{(j)}$$

Assim,

$$\sigma_r = \frac{4\left[P_2\left(c\cos\theta + (o+s)sen\theta\right) + P_1\left(c\,sen\theta + (o-s)\cos\theta\right)\right]}{r\left(c^2+s^2-o^2\right)} \qquad \text{(k)}$$

Esta solução pode ser usada para qualquer valor conhecido de α ou β. Por exemplo, se $P_1 = 0$, $\beta = 0$ e $\alpha = \pi/6$ o problema da figura 10.11 está resolvido. Mais adiante este problema será composto com outro para se dar uma solução para um consolo curto.





(a) Solução proposta (b) Problema resolvido

Figura 10.11 - Problema resolvido pela solução proposta

Deve-se observar na figura 10.11b que as tensões na linha vertical que constitui o engaste podem ser calculadas por simples rotação, constituindo as reações de apoio. Nota-se ainda que a solução tem caráter aproximado para o problema da figura 10.11b, pois as deformações ε_{22} no engaste não são nulas, como supõe a figura.

10.4.4 - Momento concentrado aplicado no vértice de uma cunha:

Primeiramente resolve-se o caso da cunha simétrica esquematizado na figura 10.12. Neste caso mostra-se que a função de tensão,

$$\phi = M \frac{sen2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{2\left(sen2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha\right)} \qquad (10.111)$$

com

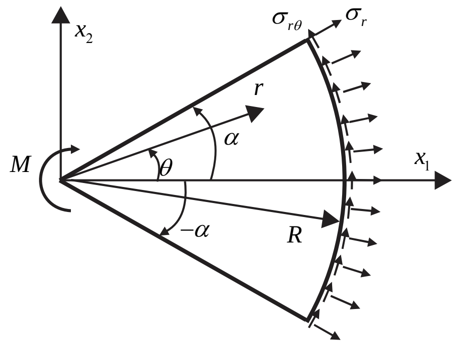
$$\sigma_r = \frac{-2M \cos 2\theta}{r^2\left(sen2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha\right)}, \; \sigma_{r\theta} = \frac{M\left(\cos 2\theta - \cos 2\alpha\right)}{r^2\left(sen2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha\right)}, \text{ e } \sigma_\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

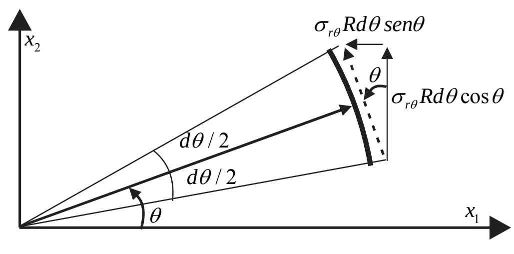
é solução para o problema, pois satisfaz a equação de compatibilidade. Além disso, verificam-se as equações de equilíbrio globais que confirmam que as constantes de integração foram calculadas corretamente, como:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\sigma_r \cos\theta - \sigma_{r\theta} sen\theta\right) r d\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\sigma_r sen\theta + \sigma_{r\theta} \cos\theta\right) r d\theta = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{r\theta}\, r^2 d\theta = M \qquad \text{(d)}$$





(a) Problema proposto (b) Infinitésimo de força tangencial

Figura 10.12 - Cunha submetida a momento aplicado no vértice

Nas expressões (b), (c) e (d), existe $\sigma_{r\theta}$, completando-se a figura 10.8b com as componentes das forças de superfície tangenciais indicadas na figura 10.12.b.

Como se pode observar, para o caso de momento aplicado, a solução da cunha não simétrica pode ser encontrada diretamente da solução da cunha simétrica, pois a resultante de forças é sempre nula qualquer que seja a orientação de x_1 x_2. Observando-se a figura 10.13 onde as linhas tracejadas correspondem ao problema da figura 10.12 e chamando-se o novo ângulo de ψ tem-se:

$$\theta = \psi + \eta \,, \qquad 2\alpha = \beta + \gamma \qquad \eta = (\gamma - \beta)/2 \qquad \text{(e)}$$

Assim,

$$\sigma_r = \frac{-2M\cos 2(\psi+\eta)}{r^2\left(sen(\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)\right)},\ \sigma_{r\psi} = \frac{M\left(\cos 2(\psi+\eta)-\cos(\beta+\gamma)\right)}{r^2\left(sen(\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)\right)},\ \text{e}\ \sigma_\psi = 0 \qquad \text{(f)}$$

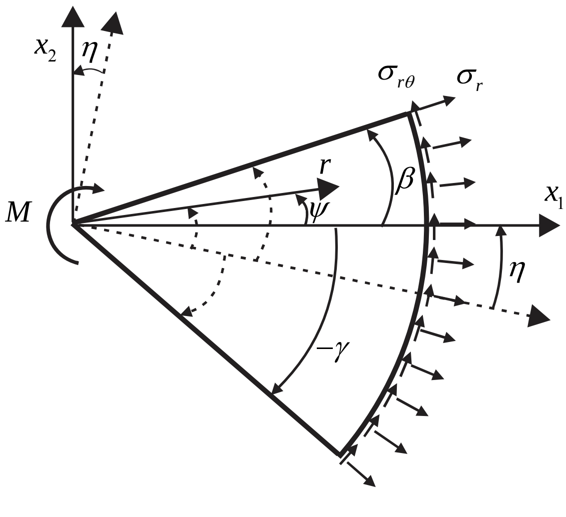
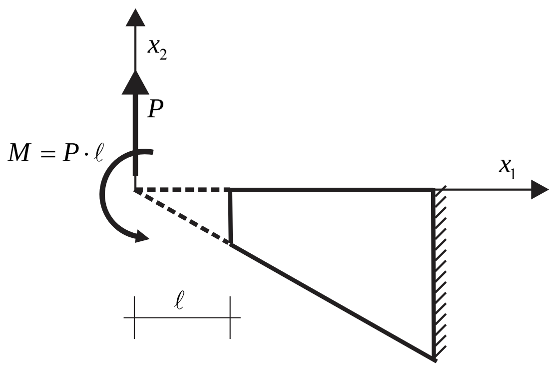
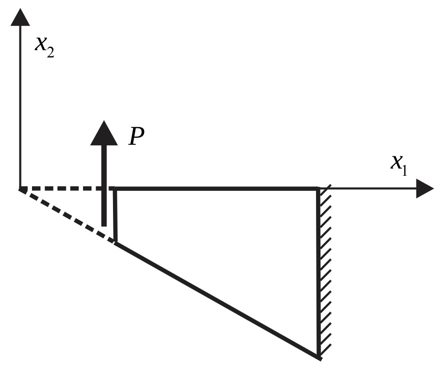


Figura 10.13 - Ilustração da cunha não simétrica a partir da simétrica

Para efeito de entendimento de soluções compostas por superposição, ilustra-se, na figura 10.14, a solução (aproximada) de um consolo pela superposição das cunhas não simétricas das figuras 10.11b e 10.13, considerando-se nesta última $\beta = 0$ e $\gamma = \pi/6$.



(a) Superposição dos casos



(b) Problema resolvido

Figura 10.14 - Consolo resolvido por superposição de casos

Deve-se observar que a força aplicada no consolo estará respeitando a distribuição de tensão calculada a partir da superposição de efeitos dos casos considerados na linha de aplicação. Aplicando-se o princípio de Saint-Venant, à aproximadamente uma distância igual à menor altura do consolo a distribuição é a esperada, independentemente da forma da carga aplicada. As tensões na linha vertical que constitui o engaste podem ser calculadas por simples rotação das soluções sobrepostas, constituindo as reações de apoio. Nota-se ainda que a solução possui caráter aproximado para o problema da figura 10.14, pois as deformações ε_{22} no engaste não são nulas, como supõe a figura.

10.4.5 - Meio semi-infinito com carregamento concentrado - Detalhe para soma de tensões:

A solução da cunha simétrica dos itens 10.4.1 e 10.4.2 podem ser superpostas para representar o problema do meio semi-infinito submetido a uma carga transversal e a uma carga tangencial em um ponto de sua superfície, veja a figura 10.15. Para tanto basta fazer $\alpha = \pi / 2$ nas soluções da cunha simétrica.

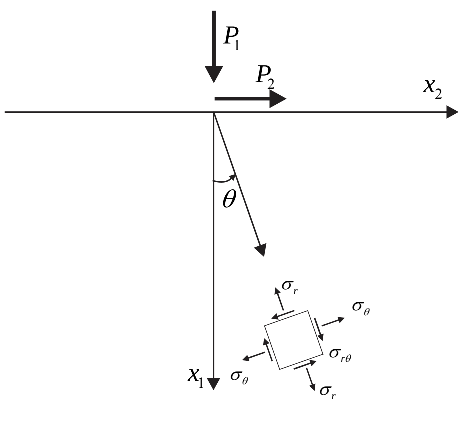


Figura 10.15 - Carregamentos concentrados em um único ponto da superfície

As funções de tensão são:

$$\phi^1 = -\frac{P_1}{\pi} r\,\theta sen\theta \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{P_2}{\pi} r\,\theta \cos\theta \tag{a}$$

Com as tensões dadas por:

$$\sigma_r^1 = -\frac{2P_1}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \sigma_r^2 = -\frac{2P_2}{\pi}\frac{sen\theta}{r},\ \sigma_\theta = 0,\ \text{e} \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \tag{b}$$

Como a origem das tensões encontradas pelas funções de tensão é a mesma, a superposição das tensões se faz por simples soma, assim:

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r}\left(P_2\, sen\theta + P_1 \cos\theta\right) \qquad \text{com} \qquad \sigma_\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta} = 0 \tag{c}$$

Em certas ocasiões a superposição não é direta. Nesses casos, é necessário se girar as tensões para uma referência única e depois somar, veja figura 10.16.

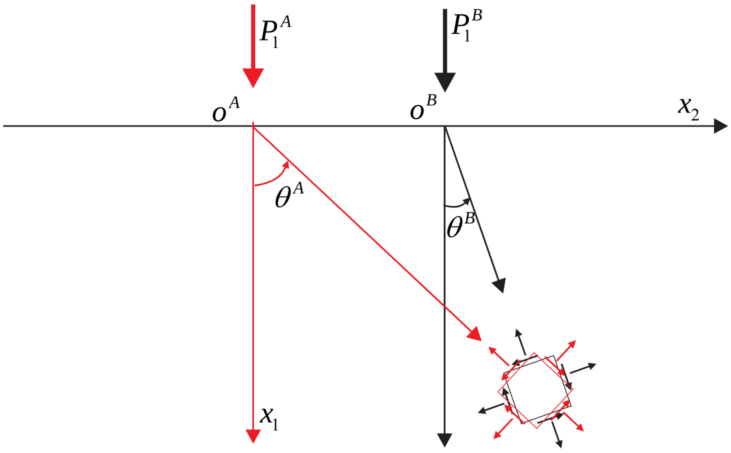


Figura 10.16 - Tensões em um ponto para duas referências.

Seja o caso da figura 10.16 onde duas cargas verticais estão aplicadas em pontos diferentes da superfície do semi-infinito. Para a origem o^A, onde se aplicou a carga P_1^A, esboçaram-se as componentes de tensão e sua orientação em vermelho, enquanto as componentes de tensão para a carga P_1^B foram esboçadas em preto, utilizando-se a origem o^B. Com essas duas origens podem-se utilizar a primeira das equações (b), ou para um caso mais geral, as equações (c) para calcular σ^A e σ^B orientadas segundo as direções definidas por θ^A e θ^B, respectivamente, como:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} \sigma_r^A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma^B = \begin{bmatrix} \sigma_r^B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{d}$$

Usando as equações (10.27) e (10.28), escrevem-se as tensões σ^A e σ^B nas coordenadas cartesianas (x_1, x_2) como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^A & \sigma_{12}^A \\ \sigma_{12}^A & \sigma_{22}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^A & -sen\theta^A \\ sen\theta^A & \cos\theta^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^A & \sigma_{r\theta}^A \\ \sigma_{r\theta}^A & \sigma_\theta^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta^A & sen\theta^A \\ -sen\theta^A & \cos\theta^A \end{bmatrix} \quad \text{(e)}$$

e

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^B & \sigma_{12}^B \\ \sigma_{12}^B & \sigma_{22}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^B & -sen\theta^B \\ sen\theta^B & \cos\theta^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^B & \sigma_{r\theta}^B \\ \sigma_{r\theta}^B & \sigma_\theta^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta^B & sen\theta^B \\ -sen\theta^B & \cos\theta^B \end{bmatrix} \quad \text{(f)}$$

Substituindo-se valores e operando resulta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^A & \sigma_{12}^A \\ \sigma_{12}^A & \sigma_{22}^A \end{bmatrix} = -\frac{2P_1^A}{\pi} \begin{bmatrix} \cos^2\theta^A & (sen\theta^A \cos\theta^A) \\ (sen\theta^A \cos\theta^A) & sen^2\theta^A \end{bmatrix} \frac{\cos\theta^A}{r^A} \quad \text{(g)}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^B & \sigma_{12}^B \\ \sigma_{12}^B & \sigma_{22}^B \end{bmatrix} = -\frac{2P_1^B}{\pi} \begin{bmatrix} \cos^2\theta^B & (sen\theta^B \cos\theta^B) \\ (sen\theta^B \cos\theta^B) & sen^2\theta^B \end{bmatrix} \frac{\cos\theta^B}{r^B} \quad \text{(h)}$$

Estando as duas tensões escritas na mesma referência, a superposição se dá por simples soma, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^A & \sigma_{12}^A \\ \sigma_{12}^A & \sigma_{22}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^B & \sigma_{12}^B \\ \sigma_{12}^B & \sigma_{22}^B \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

10.4.6 - Carregamento uniformemente distribuído em parte do semi-infinito:

O primeiro caso a ser analisado neste item é o descrito pela figura 10.17 que é um semi-infinito sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído vindo do infinito até a origem proposta para a solução. Comparando as figuras 10.15 e 10.17, deve-se atentar para a troca dos eixos cartesianos e, portanto, a inversão do sentido de θ, que continua saindo de x_1 no sentido de x_2. Com essa inversão, o sentido da componente de tensão cisalhante em coordenadas polares também foi invertido, mantendo-se a convenção estabelecida.

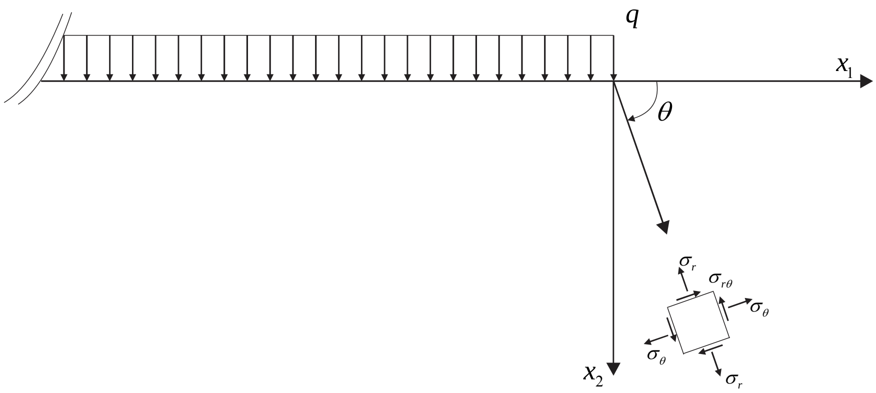


Figura 10.17 – Semi-infinito com carregamento distribuído estendido ao infinito

A função de tensão que resolve este problema pode ser obtida por integração da solução da carga concentrada e, segundo a orientação dos eixos adotados, fica:

$$\phi = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta - sen\theta\cos\theta\right)r^2 = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right)r^2 \qquad \text{(a)}$$

Para verificar sua validade se calculam $\sigma_{r\theta}(r,0)$, $\sigma_{r\theta}(r,\pi)$, $\sigma_\theta(r,0)$ e $\sigma_\theta(r,\pi)$ comparando seus valores com a força de superfície (condições de contorno) suposta, assim,

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{-q}{2\pi}\left(2\theta - sen2\theta\right) \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_\theta(r,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta(r,\pi) = \frac{-q}{2\pi}\left(2\pi\right) = -q \qquad \text{(c)}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \frac{q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(1-\cos 2\theta\right)r^2\right) = \frac{q}{2\pi}\left(1-\cos 2\theta\right) \qquad \text{(d)}$$

$$\sigma_{r\theta}(r,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta}(r,\pi) = \frac{q}{2\pi}\left(1-1\right) = 0 \qquad \text{(e)}$$

Das equações (c) e (e) verifica-se a solução.

Por superposição de efeitos pode-se utilizar duas funções de tensão do tipo da equação (a) para resolver o problema da figura 10.18.

$$\phi^A = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A - sen\theta^A \cos\theta^A\right)(r^A)^2 \qquad \text{(f)}$$

$$\phi^A = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 - r^A sen\theta^A r^A \cos\theta^A\right) \qquad \text{(g)}$$

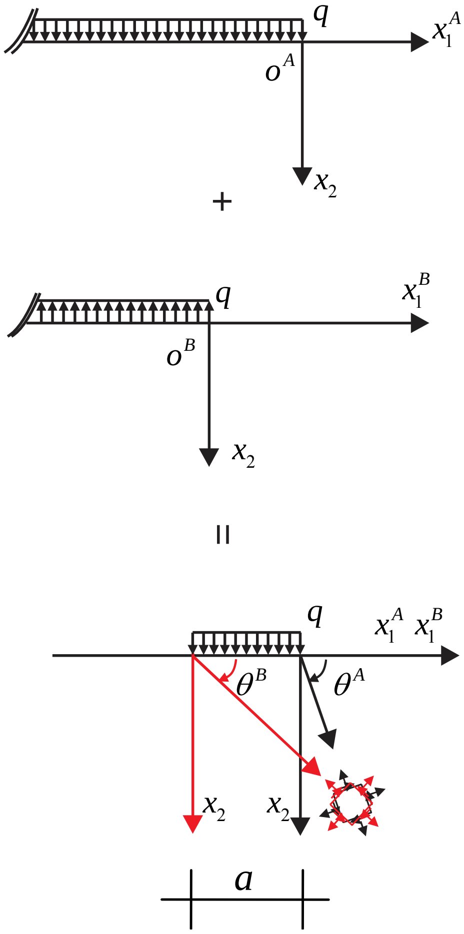
$$\phi^A = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 - x_2 x_1^A\right) \qquad \text{(h)}$$

$$\phi^B = \frac{q}{2\pi}\left(\theta^B - sen\theta^B \cos\theta^B\right)(r^B)^2 \qquad \text{(i)}$$

$$\phi^B = \frac{q}{2\pi}\left(\theta^B (r^B)^2 - x_2 x_1^B\right) \qquad \text{(j)}$$

$$\phi = \phi^A + \phi^B = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 - \theta^B (r^B)^2 + x_2 (x_1^B - x_1^A)\right) \qquad \text{(k)}$$

$$\phi == \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 - \theta^B (r^B)^2 + x_2 a\right) \qquad (\ell)$$



(a) Equacionamento sucinto (b) Problema proposto

Figura 10.18 - Carregamento distribuído limitado sobre semi-infinito

Após todas as passagens descritas na figura 10.18, falta mencionar que o último termo da equação (ℓ) não gera tensão (veja equações (8.31), (8.32) e(8.33)) e pode ser descartado. Assim, a função de tensão que resolve o problema proposto fica escrita de forma compacta como:

$$\phi = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 - \theta^B (r^B)^2\right) \qquad \text{(m)}$$

Mas, na realidade, lembrando-se do caso da figura 10.16, é melhor dividir a expressão (m) em duas:

$$\phi^A = \frac{-q}{2\pi}\theta^A (r^A)^2 \qquad \text{e} \qquad \phi^B = \frac{q}{2\pi}\theta^B (r^B)^2 \qquad \text{(n)}$$

calculando-se σ^A e σ^B. Essas tensões são depois transformadas para um sistema único de coordenadas (pode ser o cartesiano) e finalmente somadas.

10.4.7 - Carregamento tangencial uniformemente distribuído em parte do semi-infinito:

Seguindo-se os desenvolvimentos dos itens anteriores sugere-se ao leitor que verifique que a função de tensão:

$$\phi = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta^A (r^A)^2 sen2\theta^A - \theta^B (r^B)^2 sen2\theta^B\right) \qquad \text{(a)}$$

resolve o problema da figura 10.19.

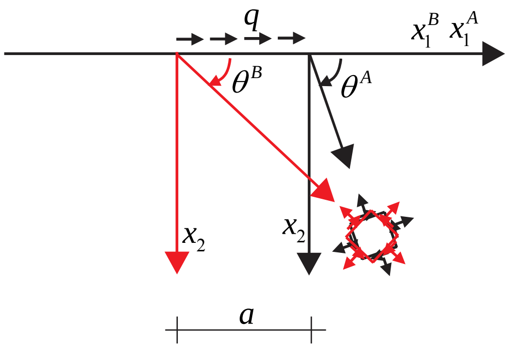


Figura 10.19 - Carregamento tangencial em parte do contínuo

Outros casos desse tipo podem ser construídos pela integração das soluções das cargas aplicadas na cunha simétrica quando o ângulo $\alpha = \pi / 2$, conforme mostrado no próximo exemplo.

10.4.8 - Carregamento transversal qualquer sobre semi-infinito:

Neste item será mostrada uma forma de se construir soluções de carregamentos distribuídos de forma qualquer a partir da integração da função de tensão da figura 10.15. Para tanto, usando a orientação de eixos da figura 10.17 que muda o sinal da função de tensão (a) do problema 10.4.5, a carga transversal da figura 10.15 é transformada em um infinitésimo de carga conforme mostrado na figura 10.20.

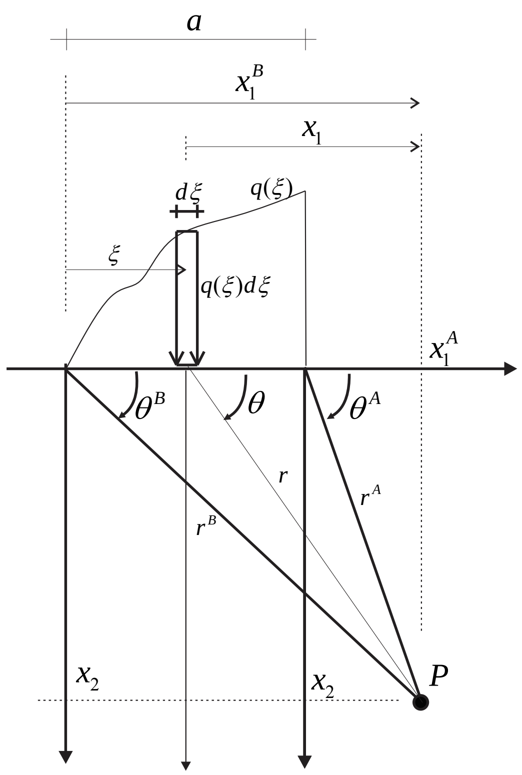


Figura 10.20 - Carga distribuída sobre semi-infinito

O infinitésimo de carga gera o infinitésimo de função de tensão cuja origem é "móvel" e depende da variável ξ, como:

$$d\phi = \frac{dP}{\pi} r\,\theta \cos\theta \tag{a}$$

mas como $dP = q(\xi)\,d\xi$ tem-se

$$d\phi = \frac{q(\xi)}{\pi} r\,\theta \cos\theta\, d\xi \tag{b}$$

Para se determinar uma função de tensão qualquer se faz:

$$\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^a q(\xi)\, r\,\theta \cos\theta\, d\xi \tag{c}$$

Assim, é necessária uma transformação de variáveis para possibilitar a integração. Aqui se escolhe fazer a integração em θ e as relações necessárias são mostradas a seguir:

$$r\cos\theta = x_1^B - \xi \qquad \text{ou} \qquad \xi = x_1^B + r\cos\theta \tag{d}$$

mas $rsen\theta = x_2 = cte$, portanto, $r = x_2 / sen\theta$ e

$$\xi = x_1^B + x_2 \frac{\cos\theta}{sen\theta} \tag{e}$$

Como x_1^B é constante enquanto apenas ξ varia, tem-se:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = x_2 \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right) \qquad \text{ou} \qquad d\xi = \frac{x_2}{sen^2\theta} d\theta \tag{f}$$

Substituindo-se (f) em (c) e lembrando-se que $r = x_2 / sen\theta$ escreve-se:

$$\phi = \frac{x_2^2}{\pi} \int_{\theta^B}^{\theta^A} q(\xi(\theta))\theta \frac{\cos\theta}{sen^3\theta} d\theta \tag{g}$$

onde $\xi(\theta)$ é dado em (e).

Por exemplo, seja o caso da força de superfície constante, assim:

$$\phi = \frac{x_2^2}{\pi} q \int_{\theta^B}^{\theta^A} \theta \frac{\cos\theta}{sen^3\theta} d\theta = -q\frac{x_2^2}{2\pi}\left[\frac{\theta^A}{sen^2\theta^A} + \frac{\cos\theta^A}{sen\theta^A} - \frac{\theta^B}{sen^2\theta^B} - \frac{\cos\theta^B}{sen\theta^B}\right] \tag{h}$$

Esta expressão pode ser simplificada usando-se as relações:

$$\frac{x_2^2}{sen^2\theta^A} = (r^A)^2 \qquad \frac{x_2^2}{sen^2\theta^B} = (r^B)^2 \qquad \frac{\cos\theta^A}{sen\theta^A} = \frac{x_1^A}{x_2} \quad \frac{\cos\theta^B}{sen\theta^B} = \frac{x_1^B}{x_2} \tag{i}$$

ou seja:

$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\left[\theta^A(r^A)^2 + x_1^A x_2 - \theta^B(r^B)^2 - x_1^B x_2\right] = -\frac{q}{2\pi}\left[\theta^A(r^A)^2 - \theta^B(r^B)^2 - (x_1^B - x_1^A)x_2\right] \tag{j}$$

Que pode ser ainda simplificada para:

$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\left[\theta^A(r^A)^2 - \theta^B(r^B)^2 - a x_2\right] \tag{k}$$

como o termo ax_2 não gera tensão, veja equações (8.31), (8.32) e (8.33), resulta:

$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\left[\theta^A(r^A)^2 - \theta^B(r^B)^2\right] \tag{ℓ}$$

idêntia à função de tensão (m) do caso 10.4.6 obtida por superposição de efeitos.

Além disso, para se escrever a função de tensão (a) do caso 10.4.6, toma-se a equação (j) na forma:

$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\left[\theta^A(r^A)^2 + (r^A)^2\cos\theta^A sen\theta^A - \theta^B(r^B)^2 - (r^B)^2\cos\theta^B sen\theta^B\right] \tag{m}$$

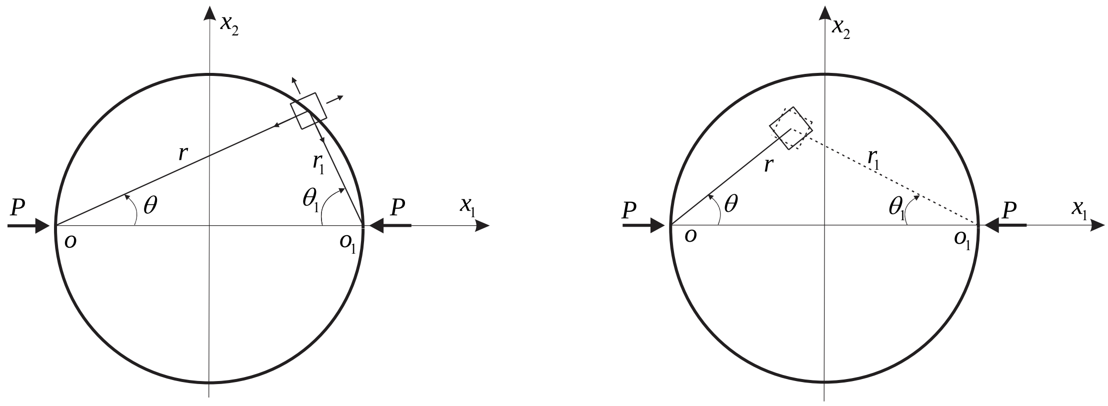
Fazendo-se a origem o^B se deslocar infinitamente à esquerda tem-se $\theta^B = 0$ e x_2 finito, assim,

$$\phi = \frac{-q}{2\pi}(\theta - sen\theta\cos\theta)r^2 = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right)r^2 \qquad \text{(n)}$$

onde, por haver apenas uma origem, omite-se o sobrescrito A.

10.4.9 - Ensaio diametral de um corpo de prova cilíndrico:

Na figura 10.21 apresenta-se o problema a ser resolvido, ou seja, um ensaio diametral de um corpo de prova cilíndrico.



(a) Representação de um ponto no contorno (b) Representação de um ponto interior

Figura 10.21 - Ensaio diametral

Na figura 10.21a mostra-se a representação de um volume elementar sobre o contorno do corpo mapeado ao mesmo tempo pelas coordenadas (r,θ) e (r_1,θ_1). Devido ao fato de, no contorno, $\vec{r} \perp \vec{r}_1$ as componentes de tensão obtidas pelos dois sistemas de coordenadas podem ser somadas facilmente. Já no interior do cilindro, veja a figura 10.21b, como não há ortogonalidade dos raios vetores, deve-se transformar (girar) as tensões de cada sistema para um sistema único e depois efetuar a soma.

Inicia-se a solução investigando-se o comportamento das seguintes funções de tensão no contorno do corpo.

$$\phi = -\frac{P}{\pi}r\theta sen2\theta \qquad \begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{\cos\theta}{r} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_\theta = 0 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

$$\phi_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 sen 2\theta_1 \qquad \begin{cases} \sigma_{r_1} = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{\cos\theta_1}{r_1} \\ \sigma_{r_1\theta_1} = \sigma_{\theta_1} = 0 \end{cases} \tag{b}$$

Além da composição de tensões ser mais simples, da figura 10.22 encontram-se:

$$d\cos\theta = r \qquad \text{ou} \qquad d\cos\theta_1 = r_1 \tag{c}$$

de onde:

$$\frac{r}{\cos\theta} = \frac{r_1}{\cos\theta_1} = d \tag{d}$$

Para $r \neq 0$ e $r_1 \neq 0$ substitui-se (d) em (a) e (b) comcluindo-se que

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} = \frac{-2P}{\pi d} \tag{e}$$

ou seja, no contorno a tensão é hidrostática (no sentido bidimensional) com valor constante.

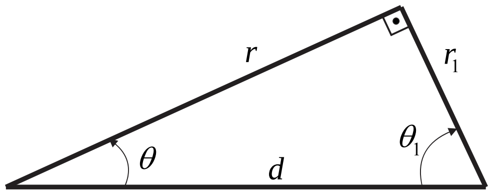


Figura 10.22 - Visualização da análise da geometria para ponto no contorno

Para que a força de superfície seja nula e, portanto, satisfazer as condições de contorno, basta somar ao problema todo a tensão hidrostática 2D.

$$\sigma^h = \frac{2P}{\pi d}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{f}$$

lembrando-se que σ_{33} depende do caso escolhido (EPT ou EPD).

Na figura 10.23 mostra-se o esquema de rotação para as tensões que possibilita sua superposição em um ponto qualquer do domínio.

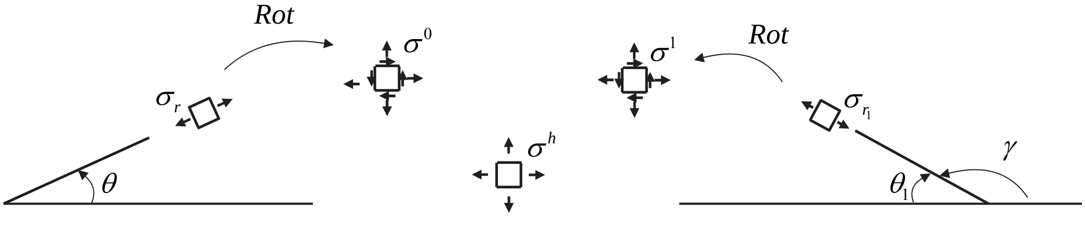


Figura 10.23 - Posicionamento das tensões em um único sistema de referência

Da figura 10.23 tem-se:

$$\sigma^0 = R \cdot \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R^t \quad \text{com} \quad R = \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{g}$$

$$\sigma^1 = R \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R^t \quad \text{com} \quad R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\gamma \\ sen\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 & -sen\theta_1 \\ sen\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{h}$$

Assim,

$$\sigma^0 = \frac{-2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta sen\theta \\ \cos\theta sen\theta & sen^2\theta \end{bmatrix} = \frac{-2P}{\pi r}\begin{bmatrix} \cos^3\theta & \cos^2\theta sen\theta \\ \cos^2\theta sen\theta & \cos\theta sen^2\theta \end{bmatrix} \tag{i}$$

$$\sigma^1 = \frac{-2P}{\pi}\frac{\cos\theta_1}{r_1}\begin{bmatrix} \cos^2\theta_1 & -\cos\theta_1 sen\theta_1 \\ -\cos\theta_1 sen\theta_1 & sen^2\theta_1 \end{bmatrix} = \frac{-2P}{\pi r_1}\begin{bmatrix} \cos^3\theta_1 & -\cos^2\theta_1 sen\theta_1 \\ -\cos^2\theta_1 sen\theta_1 & \cos\theta_1 sen^2\theta_1 \end{bmatrix} \tag{j}$$

Lembrando-se que σ^h é invariante, pode-se somar (f), (i) e (j) para se encontrar a tensão total σ_{ij}.

Em particular, no eixo x_1 tem-se $\theta = 0^o$ e $\theta_1 = 0^0$, ou seja:

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^h = \frac{2P}{\pi}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \tag{k}$$

informando que a tensão σ_{22} é constante no diâmetro carregado e vale

$$\sigma_{22} = \frac{2P}{\pi d} \tag{ℓ}$$

Assim, esse ensaio é muitas vezes utilizado para se determinar a resistência à tração de materiais frágeis. Observa-se que a tensão σ_{11} é sempre de compressão e, na condição de carregamento concentrado ideal, tende para infinito na posição da carga, confirmando que o problema foi corretamente resolvido. Obviamente que para um ensaio real a carga aplicada não é idealmente concentrada, mas graças ao Princípio de Saint-Venant a solução vale para quase toda a extensão do problema.

10.4.10 - Orifício em uma chapa:

O problema a ser resolvido é o de uma chapa submetida à tração (ou compressão) uniaxial conforme indica a figura 10.24. A solução obtida será para uma chapa com largura $b \to \infty$, porém, devido ao Princípio de Saint-Venant, a solução pode ser aplicada para uma largura $b > 4a$. A solução em tensões vale tanto para o EPT quanto para o EPD tendo em vista a ausência de forças de volume.

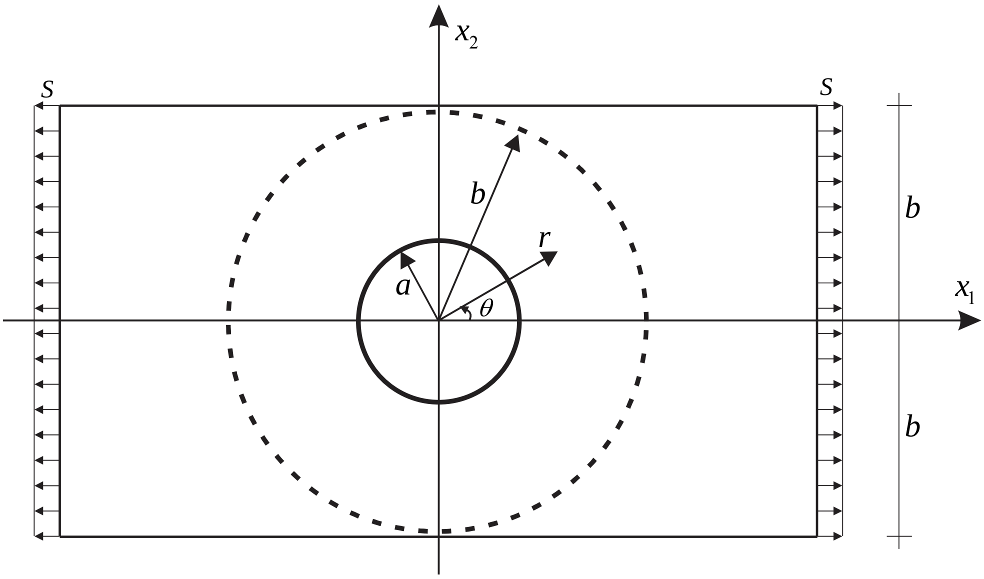


Figura 10.24 - Orifício em uma chapa

Considerando a circunferência tracejada com $b \to \infty$ tem-se que a distribuição de tensão sobre a mesma é $\sigma_{11} = S$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$, que rotacionadas para as coordenadas (r, θ) ficam:

$$\sigma_r = S\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2} S sen 2\theta \tag{a}$$

onde se aplicaram propriedades trigonométricas. Imaginando-se que o problema se resume às duas circunferências, as tensões (a) são as condições de contorno sobre a superfície externa de um tubo de parede espessa. O problema a ser resolvido pode ser dividido em dois, o primeiro é o tubo de parede espessa submetido às condições de contorno:

$$\sigma_r^1(b) = \frac{1}{2} S \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta}^1(b) = 0 \tag{b}$$

já resolvido no item 10.3.2. O segundo é o tubo de parede espessa submetido à:

$$\sigma_r^2(b) = \frac{1}{2} S \cos 2\theta \qquad \text{com} \qquad \sigma_{r\theta}^2(b) = -\frac{1}{2} S\, sen 2\theta \tag{c}$$

resolvido pela função de tensão:

$$\phi = f(r)\cos 2\theta \qquad \text{(d)}$$

Substituindo-se ϕ na equação de compatibilidade $\nabla^4\phi = 0$, resulta:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D \qquad \text{(e)}$$

Calculando-se as tensões σ_r^2 e $\sigma_{r\theta}^2$, impondo-se as condições de contorno (c), encontram-se as constantes de integração. Somando-se o resultado com o estado de tensão do problema (b) resulta a solução do problema, ou seja:

$$\sigma_r = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta \qquad \text{(f)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad \text{(g)}$$

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{S}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) sen 2\theta \qquad \text{(h)}$$

Para $r = a$ tem-se:

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = S - 2S\cos 2\theta \qquad \text{(i)}$$

Procurando-se o máximo valor de σ_θ faz-se:

$$\frac{d\sigma_\theta(a)}{\partial\theta} = 4S\, sen 2\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi/2 \qquad \text{(j)}$$

Assim:

$$\sigma_\theta(a,0) = -S \qquad \sigma_\theta(a,\pi/2) = 3S \qquad \text{(k)}$$

Portanto ocorre uma concentração de tensão na direção x_1 em um corte passando pelo orifício, conforme a figura 10.25.

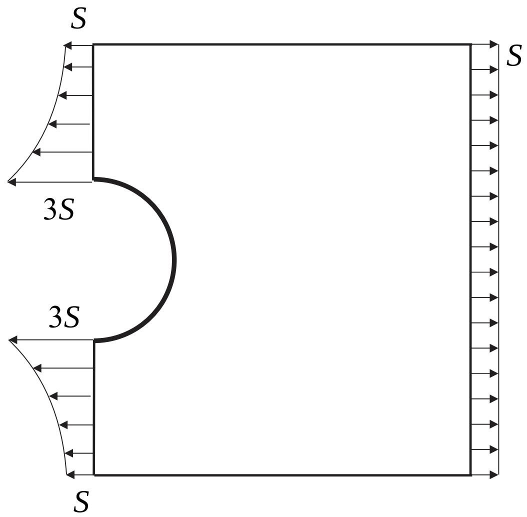


Figura 10.25 - Concentração de tensão en torno de um furo circular $(\theta = \pi / 2)$.

Para um estado duplo de tensão, pode-se superpor a solução (f), (g) e (h) com a mesma solução escrita em α para $\overline{S}$, veja figura 10.26. Porém como $\alpha = \theta - \pi / 2$, esta solução pode ser escrita diretamente em θ, coincidindo a origem com a da figura 10.24.

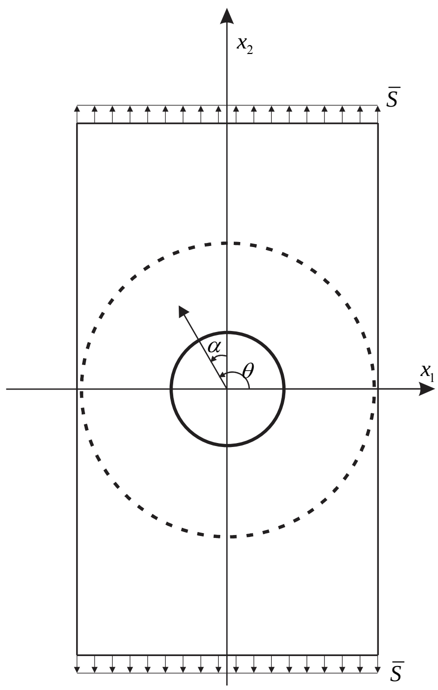


Figura 10.26 - Chapa tracionada na vertical

A solução para o problema da figura 10.26 fica:

$$\overline{\sigma}_r = \frac{\overline{S}}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\overline{S}}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos(2\theta - \pi) \qquad (\ell)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta} = \frac{\bar{S}}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\bar{S}}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos(2\theta-\pi) \tag{m}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta r} = -\frac{\bar{S}}{2}\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)sen(2\theta-\pi) \tag{n}$$

Somando-se (ℓ), (m) e (n) com (f), (g) e (h) encontra-se a solução para um problema de estado duplo de tensão com cisalhamento nulo.

Além disso, para um furo pequeno, em um corpo qualquer, sob estado de tensão qualquer (avaliado no ponto do orifício), uma boa avaliação das tensões σ_{θ} na superfício do orifício pode ser encontrada utilizando-se as tensões principais no ponto (sem o furo) no lugar de S e $\bar{S}$ da solução deste item.

10.4.11 - Flexão simples de uma barra circular:

Na figura 10.27 apresenta-se uma barra circular submetida a uma carga radial em uma extremidade e engastada na outra. Apesar da extensão angular apresentada na figura ser de $\pi/2$ a solução apresentada serve para qualquer extensão.

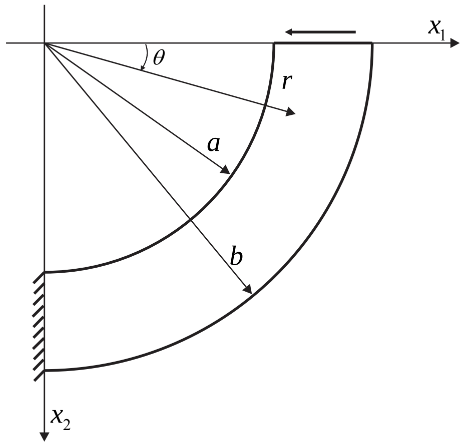


Figura 10.27 - Barra circular sob carregamento transversal (radial)

A função de tensão utilizada para resolver este problema é

$$\phi = f(r)sen\theta \tag{a}$$

que substituída na equação de compatibilidade resulta:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{f}{r^2}\right)=0 \tag{b}$$

com solução conhecida, como:

$$f(r) = Ar^3 + B\frac{1}{r} + C\,r + D\,r\ln r \tag{c}$$

Aplicando-se as equações (10.79) sobre ϕ resulta:

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sen\theta \tag{d}$$

$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sen\theta \tag{e}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\cos\theta \tag{f}$$

A condições de contorno para se determinar as 3 incógnitas (A, B e D) são:

$$\sigma_r(a,\theta) = \sigma_r(b,\theta) = \sigma_{r\theta}(b,\theta) = \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \tag{g}$$

Como o termo entre parêntesis nas equações (d) e (f) são os mesmo, as condições de contorno (g) resultam em apenas duas equações, ou seja:

$$2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0 \tag{h}$$

$$2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0 \tag{i}$$

Para $\theta = 0$ tem-se naturalmente $\sigma_\theta = 0$, mas $\sigma_{r\theta} \neq 0$ e deve-se impor a equação de equivalente mecânico, ou seja, a integral das tensões $\sigma_{r\theta}$ na superfície $\theta = 0$ deve resultar na carga aplicada, tal como:

$$P = \int_a^b \sigma_{r\theta}(r,0)dr = \int_a^b -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)dr = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bigg|_a^b = -\left(Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D\ln r\right)_a^b \tag{j}$$

ou

$$A\left(b^2 - a^2\right) + B\frac{(b^2 - a^2)}{a^2b^2} - D\ln\frac{b}{a} = P \tag{k}$$

Resolvendo-se o sistema (h), (i) e (k) tem-se:

$$A = \frac{P}{2N}, \qquad B = -\frac{Pa^2b^2}{2N} \qquad \text{e} \qquad D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \tag{ℓ}$$

com

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(m)}$$

Assim, chega-se a:

$$\sigma_r = \frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{(a^2+b^2)}{r} \right) sen\theta \qquad \text{(n)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N}\left(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{(a^2+b^2)}{r} \right) sen\theta \qquad \text{(o)}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{(a^2+b^2)}{r} \right) \cos\theta \qquad \text{(p)}$$

deve-se observar que a distribuição de tensões apresentada não usou o limite superior de θ para ser calculada, assim a solução vale para qualquer extensão angular da barra.

Aplicando-se as relações tensão/deformação do EPT dadas pelas equações (10.48) até (10.50) e as relações deslocamento/deformação (10.41) até (10.43) pode-se escrever os deslocamentos para o problema como:

$$u_r = \frac{1}{E}\left\{ -2D\theta s\cos\theta - \left[D(\nu-1)\ln r + A(1-3\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] sen\theta \right\} + Ksen\theta - L\cos\theta + Hr \qquad \text{(q)}$$

$$v_\theta = \frac{1}{E}\left\{ 2D\theta sen\theta - \left[D(\nu-1)\ln r + A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} - D(1+\nu) \right] \cos\theta \right\} + K\cos\theta - Lsen\theta + Hr \qquad \text{(r)}$$

onde K, L e H são novas constantes a se determinar.

Essas constantes são determinadas impedindo-se os deslocamentos radial e circunferencial e o giro em um ponto no engaste. O ponto escolhido na seção do engaste é dado por $(r,\theta) = ((a+b)/2, \alpha)$ onde α é a extensão angular da barra. No caso da figura 10.27 tem-se $\alpha = \pi/2$ e, portanto,

$$v((a+b)/2, \alpha) = 0 \qquad \text{(circunferencial)} \qquad \text{(s)}$$

$$u((a+b)/2, \alpha) = 0 \qquad \text{(radial)} \qquad \text{(t)}$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{((a+b)/2,\alpha)} = 0 \qquad \text{(giro)} \qquad \text{(u)}$$

Para $\alpha = \pi / 2$ usando (s) e (u) tem-se $H = 0$, $L = D\pi / E$, substituindo-se esses valores em (t) determina-se K como,

$$K = \left[D(\nu - 1)\ln(a+b)/2 + A(1-3\nu)(a+b)^2/4 + \frac{4B(1+\nu)}{(a+b)^2} \right] \qquad \text{(v)}$$

10.4.12 - Anel ou tubo sob cisalhamento puro

O anel da figura 10.28 está submetido a um cisalhameto puro e a função de tensão que resolve este problema é:

$$\phi = \frac{M_t \theta}{2\pi} \qquad \text{com} \qquad M_t = 2\pi b^2 \tau(b) = 2\pi a^2 \tau(a) \qquad \text{(a)}$$

.

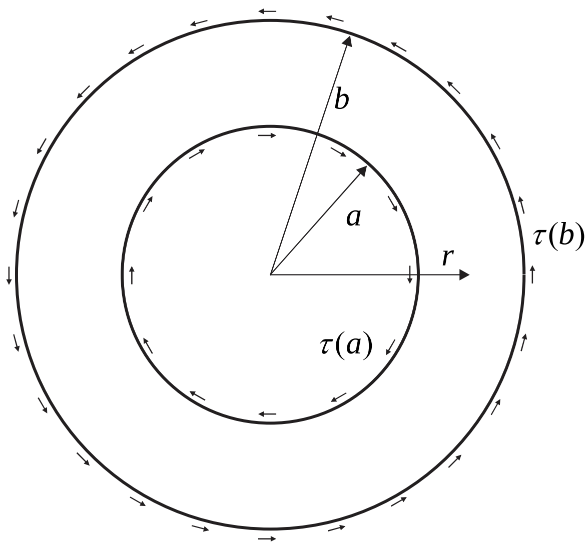


Figura 10.28 - Anel sob torção

Aplicando-se as equações 10.79 sobre ϕ resulta:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2 \cdot e} \qquad \text{(b)}$$

Em geral $e = 1$. Várias outras soluções e diversas análises sobre as soluções apresentadas podem ser vistas no livro clássico de Timoshenko & Goodier.

11 - Solução de problemas da elasticidade linear pela técnica dos deslocamentos:

Conforme comentado no item 7.4, a técnica dos deslocamentos é geralmente aplicada na solução do segundo Problema de Valor de Contorno (PVC) da elasticidade linear, ou seja, quando se conhecem os deslocamentos na superfície do corpo analisado. Em geral esta técnica é escolhida para corpos que possuem dimensões infinitas.

Para deixar o texto mais claro repete-se a obtenção da equação de equilíbrio escrita em deslocamentos. Substitui-se na Lei de Hooke, equação (7.4), a relação deslocamento-deformação (7.5) como:

$$\sigma_{ij} = G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} \tag{11.1}$$

A equação (11.1) relaciona diretamente os deslocamentos às tensões. Substituindo-se (11.1) no divergente da tensão $\sigma_{ij,i} = \sigma_{ji,i}$ resulta:

$$\sigma_{ji,i} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{k,ki}\delta_{ij} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{k,kj} = G\left(u_{i,ji} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{i,ij} \tag{11.2}$$

ou, substituindo-se (11.2) na equação de equilíbrio (7.1) e agrupando-se, resulta:

$$G\left(u_{i,ij} + u_{j,ii}\right) + \lambda u_{i,ij} + b_j = \rho \ddot{u}_j \qquad \text{ou ainda} \qquad G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \tag{11.3}$$

Observando-se que $u_{j,j}$ pode ser escrito como o $Div(\vec{u})$, a equação (11.3) pode ser escrita em notação dyadica como:

$$G\nabla^2\vec{u} + (G+\lambda)Grad(Div(\vec{u})) + \vec{b} = \rho\ddot{\vec{u}} \quad \text{ou} \quad G\nabla^2\vec{u} + (G+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \vec{b} = \rho\ddot{\vec{u}} \tag{11.4}$$

Ainda com relação à notação, o Laplaciano $\nabla^2(\bullet)$ pode ser entendido como o divergente do gradiente de uma função, no caso $\nabla^2(\vec{u}) = Div(Grad(\vec{u}))$.

As equações de equilíbrio escritas em deslocamentos são conhecidas como equações de Navier-Cauchy e são dadas por (11.3) ou (11.4). Estas equações são em número de três para três deslocamentos incógnitos. A forma mais comum para se solucionar as equações de Navier-Cauchy é a aplicação das chamadas funções de deslocamento. Existem diversas funções de deslocamento que podem ser consultadas em um excelente resumo apresentado por Chou & Pagano. Neste texto apresenta-se apenas o chamado Vetor de Galerkin com o máximo de detalhes possível culminando na solução do chamado problema fundamental de Kelvin.

11.1 - Vetor de Galerkin:

Inicia-se a sequência de solução escrevendo-se a equação de Navier-Cauchy na seguinte forma:

$$\frac{G}{G}u_{i,jj}+\frac{(\lambda+G)}{G}u_{j,ji}+\frac{1}{G}b_i=\frac{1}{G}\rho\ddot{u}_i \tag{11.5}$$

que, levando-se em consideração a equação (6.83) fica:

$$u_{i,jj}+\frac{1}{(1-2\nu)}u_{j,ji}+\frac{1}{G}b_i=\frac{1}{G}\rho\ddot{u}_i \quad \text{ou} \quad \nabla^2\vec{u}+\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{u})}{(1-2\nu)}+\frac{\vec{b}}{G}=\frac{\rho\ddot{\vec{u}}}{G} \tag{11.6}$$

Seja a função $\vec{G}$ (Vetor de Galerkin) tal que:

$$u_j=G_{j,mm}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,jm} \quad \text{ou} \quad \vec{u}=\nabla^2\vec{G}-\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{G}\right) \tag{11.7}$$

A sugestão da forma do Vetor de Galerkin se assemelha à sugestão da função de tensão de Airy, porém parece menos óbvia, pois sua aplicação é mais árdua. Nas passagens subseqüentes será aplicada notação indicial, retorna-se à notação dyadica em momento oportuno.

Será de interesse ter a equação (11.7) escrita na forma

$$u_i=G_{i,mm}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,im} \tag{11.8}$$

Calcula-se o divergente da equação (11.7) como:

$$u_{j,j}=G_{j,mmj}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,jmj} \tag{11.9}$$

Calcula-se agora o gradiente de (11.9), como:

$$u_{j,ji}=G_{j,mmji}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,jmji} \tag{11.10}$$

que, multiplicado por $1/(1-2\nu)$ fica

$$\frac{u_{j,ji}}{(1-2\nu)}=\frac{G_{j,mmji}}{(1-2\nu)}-\frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)}G_{m,jmji} \tag{11.11}$$

Calcula-se o gradiente de (11.8) como:

$$u_{i,j}=G_{i,mmj}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,imj} \tag{11.12}$$

e seu laplaciano como:

$$u_{i,jj}=G_{i,mmjj}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,imjj} \tag{11.13}$$

Somando-se (11.13) com (11.11) resulta:

$$u_{i,jj}+\frac{1}{(1-2\nu)}u_{j,ji}=\frac{G_{j,mmji}}{(1-2\nu)}-\frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)}G_{m,jmji}+G_{i,mmjj}-\frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,imjj} \tag{11.14}$$

observando a existência de índices repetidos (mudos) e livre permutação da ordem de derivação sabe-se que:

$$G_{j,mmji} = G_{m,jjmi} = G_{m,jmji} = G_{m,imjj} \tag{11.15}$$

Assim, executando operações algébricas sobre a equação (11.14), resulta:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ji} = G_{i,mmjj} \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \vec{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{u})}{(1-2\nu)} = \nabla^4 \vec{G} \tag{11.16}$$

Comparando-se (11.16) com (11.6) resulta:

$$G_{i,mmjj} + \frac{b_i}{G} = \frac{\rho \ddot{u}_i}{G} \quad \text{ou} \quad \nabla^4 \vec{G} + \frac{\vec{b}}{G} = \frac{\rho \ddot{\vec{u}}}{G} \tag{11.17}$$

Ou seja, caso o problema seja estático e esteja livre de forças de volume a solução do problema da elasticidade em deslocamentos se resume a resolver:

$$\nabla^2 \nabla^2 \vec{G} = \nabla^4 \vec{G} = \vec{0} \tag{11.18}$$

Uma observação importante que pode ser feita na equação (11.17) é que as componentes do Vetor de Galerkin são independentes, i.e., as 3 equações diferenciais em (11.17) são desacopladas. Este fato é muito útil para a solução dos problemas gerais. Pois, ao se resolver $\vec{G}$ pode-se construir $\vec{u}$ aplicando-se a equação (11.8). Como comentado no item 7.4 a aplicação de condições de contorno em deslocamentos e forças de superfície é a parte complicada no método dos deslocamentos, porém quando o domínio é infinito todas as condições de contorno são nulas.

11.2 - Solução fundamental de Kelvin:

Neste item, a título de exemplo, resolve-se o problema fundamental de Kelvin no espaço bidimensional, figura 11.1. Primeiramente simplifica-se a notação da equação (11.17) criando-se uma função $\vec{F}$ que é o Laplaciano de $\vec{G}$, ou seja:

$$F_i = G_{i,mm} \tag{11.19}$$

Substituindo-se (11.19) em (11.17) para problema estático resulta:

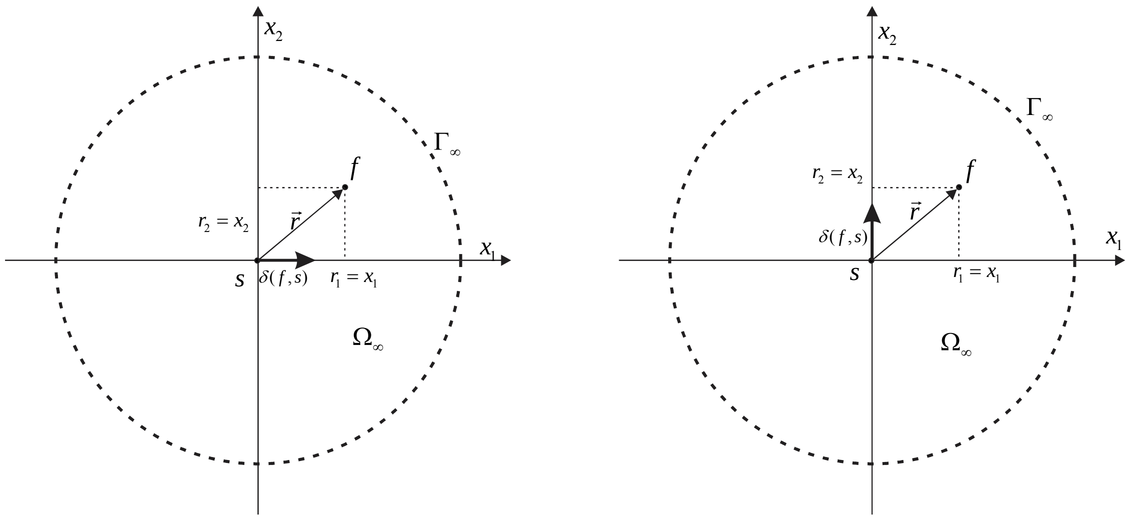
$$F_{i,jj} + \frac{b_i}{G} = 0_i \tag{11.20}$$

Na figura 11.1 observa-se que o problema a ser resolvido é o de uma carga unitária aplicada no domínio do corpo. Escolhe-se dividir o problema em dois problemas que podem ser superpostos. Um com carregamento horizontal (1) e outro com carregamento vertical (2).

A carga unitária é descrita pela distribuição Delta de Dirac ($\delta(s, f)$) que vale zero se $f \neq s$ e ∞ se $f = s$. Sendo f um ponto chamado de campo (field) e s um ponto chamado de fonte (source). A propriedade da distribuição Delta de Dirac que a habilita a representar a carga unitária é:

$$\int_{\Omega_\infty} \delta(s,f)\,d\Omega = 1 \qquad (11.21)$$

onde Ω_∞ representa o domínio infinito e Γ_∞ o contorno no infinito com condições de contorno nulas. Adotando-se s como a origem do sistema, tem-se $r_i = x_i = r.r_{,i} = r.(r_i / |\vec{r}|)$.



(a) Força Horizontal - problema (1) (b) Força Vertical - problema (2)

Figura 11.1 - Problema de Kelvin dividido em dois casos

O problema (1) pode ser explicitado de (11.20) como:

$$\begin{cases} F_{1,jj} + \dfrac{\delta(s,f)}{G} = 0 \\ F_{2,jj} + 0 = 0 \end{cases} \qquad (11.22)$$

cuja solução, aproveitando coordenadas polares, é conhecida,

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{1}{2\pi G}(\ln(r) - 1) \\ F_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} G_{1,mm} = -\dfrac{1}{2\pi G}(\ln(r) - 1) \\ G_{2,mm} = 0 \end{cases} \qquad (11.23)$$

Seja proposto o seguinte Vetor de Galerkin:

$$\begin{cases} G_1 = -\dfrac{1}{8\pi G} r^2 \ln r \\ G_2 = 0 \end{cases} \qquad (11.24)$$

este satisfaz (11.23).

Aplicando-se (11.8) sobre (11.24) resulta para o EPD (pois a lei constitutiva aplicada vale diretamente para esse caso):

$$u_{1j} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln r - r_{,j}r_{,1} + \frac{7-8\nu}{2}\right\} \tag{11.25}$$

onde o índice 1 representa o problema 1. A solução para o problema (2) fica

$$u_{2j} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln r - r_{,j}r_{,2} + \frac{7-8\nu}{2}\right\} \tag{11.26}$$

onde o índice 2 representa o problema 2.

A consideração simultânea (soma) dos dois problemas resulta na chamada solução fundamental do problema de Kelvin, ou seja:

$$u_{ij} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln r - r_{,j}r_{,i} + \frac{7-8\nu}{2}\right\} \tag{11.27}$$

onde o último termo dentro da chave é uma constante e representa um movimento de corpo livre que é desprezado, ou seja:

$$u_{ij} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln r - r_{,j}r_{,i}\right\} \tag{11.28}$$

Esta solução é muito usada no desenvolvimento de um método numérico chamado Método dos Elementos de Contorno.

11.3 - Disco giratório:

O problema do disco giratório pode ser resolvido pela técnica das tensões, porém, é um bom exemplo de solução de problema axissimétrico pelo método dos deslocamentos, mesmo não sendo um problema de dimensões infinitas. As equações de equilíbrio em tensões para o problema da elasticidade linear foram dadas nas equações (10.74) e (10.75), transcritas aqui:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta = \rho \ddot{u}_\theta \tag{11.29}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = \rho \ddot{u}_r \tag{11.30}$$

Se a aceleração angular é nula, velocidade angular constante, o problema passa a ser axissimétrico e nenhuma variável depende de θ, assim, com a ajuda da equação (10.79) sabe-se que $\sigma_{r\theta} = 0$ e as equações acima se simplificam para apenas,

$$\frac{d}{dr}\left(r\sigma_r\right) - \sigma_\theta = \rho r \ddot{u}_r \tag{11.31}$$

pois a equação (11.29) é naturalmente satisfeita.

Para o problema em questão $\ddot{u}_r = -rw^2$ onde w é a velocidade angular constante. Assim, (11.31) se simplifica ainda mais para:

$$\frac{d}{dr}\left(r\sigma_r\right) - \sigma_\theta + \rho r^2 w^2 = 0 \tag{11.32}$$

Com se aplicará a técnica em deslocamentos, eliminam-se as tensões aplicando-se as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento. Adotando-se o Estado Plano de Tensões, se escreve:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right) \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r\right) \tag{11.33}$$

Lembrando-se que o problema é axissimétrico, as relações deslocamento-deformação são:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \tag{11.34}$$

que substituídas em (11.33) resulta:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + \nu\frac{u_r}{r}\right) \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \nu\frac{du_r}{dr}\right) \tag{11.35}$$

Para simplificar a obtenção do primeiro termo da equação (11.32) faz-se:

$$r\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(r\frac{du_r}{dr} + \nu u_r\right) \tag{11.36}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dr}\left(r\sigma_r\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + r\frac{d^2u_r}{dr^2} + \nu\frac{du_r}{dr}\right) \tag{11.37}$$

Substituindo-se as equações (11.37) e a segunda de (11.35) em (11.32) encontra-se:

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + r\frac{d^2u_r}{dr^2} - \frac{u_r}{r}\right) + \rho r^2 w^2 = 0 \tag{11.38}$$

ou, ajeitando-se para uma forma padrão,

$$r^2\frac{d^2u_r}{dr^2} + r\frac{du_r}{dr} - u_r = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho r^3 w^2 \tag{11.39}$$

com solução conhecida dada por:

$$u_r = \frac{1}{E}\left[C\left(1-\nu\right)r - C_1\left(1+\nu\right)\frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8}\rho w^2 r^3\right] \tag{11.40}$$

Para se determinar as constantes de integração, usam-se as condições de contorno em tensões, para tanto, é necessário substituir (11.40) em (11.35), resultando:

$$\sigma_r = C + C_1\frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho w^2 r^2 \tag{11.41}$$

$$\sigma_\theta = C - C_1\frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho w^2 r^2 \tag{11.42}$$

Disco maciço:

Para o disco maciço o deslocamento em seu centro $u_r(0)=0$ deve ser nulo e a tensão $\sigma_r(0)$ deve ser finita. Isto é verdade se $C_1 = 0$. Considerando-se raio externo do disco $r=b$ anda tem-se

$$\sigma(b) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{3+\nu}{8}\rho w^2 b^2 \tag{11.43}$$

Assim:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho w^2\left(b^2 - r^2\right) \tag{11.44}$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{3+\nu}{8}\rho w^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8}r^2\right)\rho w^2 \tag{11.45}$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{8E}\left[(3+\nu)b^2 - (1+\nu)r^2\right]\rho w^2 r \tag{11.46}$$

Disco com orifício circular:

Neste caso as condições de contorno em tensão são:

$$\sigma_r(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_r(b) = 0 \tag{11.47}$$

De onde se encontram as constantes de integração:

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho w^2\left(a^2 + b^2\right) \qquad \text{e} \qquad C_1 = \frac{-(3+\nu)}{8}\rho w^2\left(a^2 - b^2\right) \tag{11.48}$$

que, substituídas nas expressões das tensões resultam:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right)\rho w^2 \tag{11.49}$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)\rho w^2 \tag{11.50}$$

Neste caso a tensão radial máxima não ocorre nas extremidades. Derivando-se σ_r e igualando-se à zero encontra-se:

$$\sigma_r^{\max} = \sigma_r\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{3+\nu}{8}(b-a)^2\rho w^2 \tag{11.51}$$

já a tensão circunferencial máxima ocorre no contorno interno:

$$\sigma_\theta^{\max} = \sigma_r\left(a\right) = \frac{3+\nu}{4}\left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu}a^2\right)\rho w^2 \tag{11.52}$$