Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

Núcleo de uma transformação linear

Define-se o núcleo da transformação linear L, como o conjunto

$$Ker(L) = \{u \in U \ / \ L(u) = 0\}$$

Imagem de uma transformação linear

Define-se a imagem de L, como o conjunto

$$Imag(L) = \{w \in W \ / \text{ Existe } u \in U \text{ com } L(u) = w\}$$

O $\boldsymbol{Ker(L)}$ e a $\boldsymbol{Imag(L)}$ são espaços vetoriais.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Qual o núcleo e a imagem de L ?

Determine uma base para cada conjunto.

Núcleo (Kernel): $Ker(L) \subset \mathbb{R}^3$

Quais os $u \in \mathbb{R}^3$ com $L(u) = 0$?

$$(x + y, 2x + 3z) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Daqui vemos que existem infinitas soluções.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Núcleo (Kernel):

Temos duas equações e três incógnitas.

Temos um grau de liberdade, que pode ser o x.

Nesse caso $y = -x$ e $z = -\frac{2}{3}x$.

Então:

$$Ker(L) = \left\{\left(x, -x, -\frac{2}{3}x\right) = x\left(1, -1, -\frac{2}{3}\right) \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

Todos os vetores múltiplos do vetor fixo $\left(1, -1, -\frac{2}{3}\right)$.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

O núcleo é um espaço vetorial: (é uma reta?)

$$Ker(L) = \left\{\left(x, -x, -\tfrac{2}{3}x\right) = x\left(1, -1, -\tfrac{2}{3}\right) \;/\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Uma base do núcleo da transformação linear é o conjunto

$$\beta = \left\{\left(1, -1, -\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

Outra base é

$$\bar{\beta} = \{(3, -3, -2)\}$$

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Imagem: $Imag(L) \subset \mathbb{R}^2$

Pergunto, pode existir alguma dupla que não possa ser representada com as componentes de uma tripla ?

Vamos trabalhar de forma mais simples, fazendo:

$$(u, v) = \left(0 + u, 0 + 3\tfrac{v}{3}\right) = L(0, u, \tfrac{v}{3})$$

Daqui vemos que qualquer dupla (u, v) pode ser vista como imagem da tripla $\left(0, u, \frac{v}{3}\right)$.

$Imag(L) = \mathbb{R}^2$, logo uma base é a base canônica.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

Uma transformação linear, por ser função, pode ser injetiva, pode ser sobrejetiva e se ambas é bijetiva.

Resultado:

Se o núcleo de L é $Ker(L) = \{0\}$, então

a transformação linear L é injetiva (um a um).

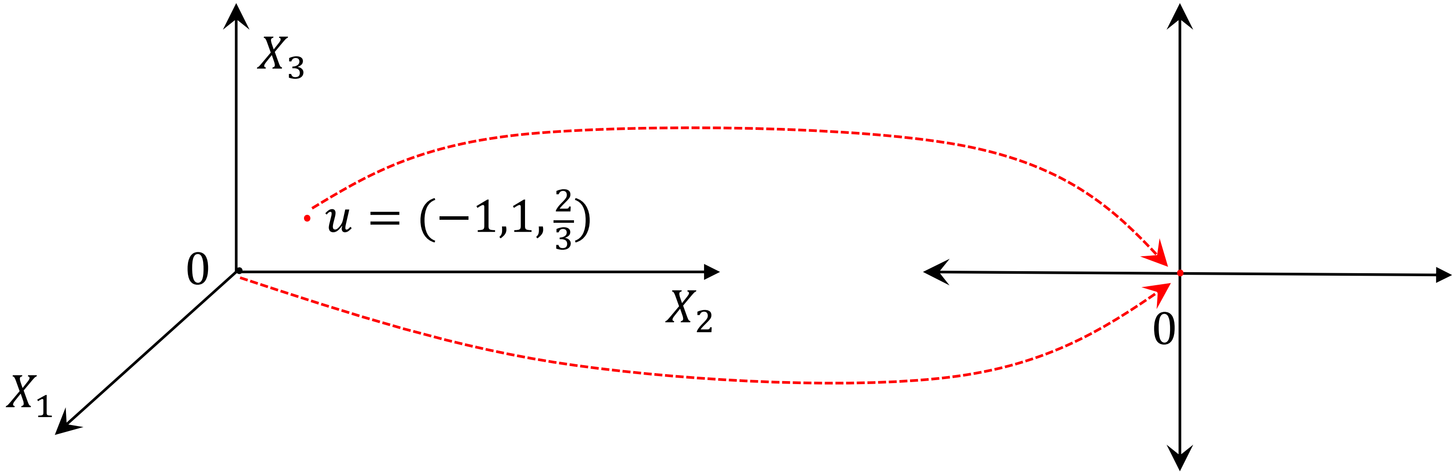
Se $Ker(L) = \{0\}$ então a base é o conjunto vazio, ϕ.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x,y,z) = (x+y, 2x+3z)$ **não é injetiva.**

   Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.



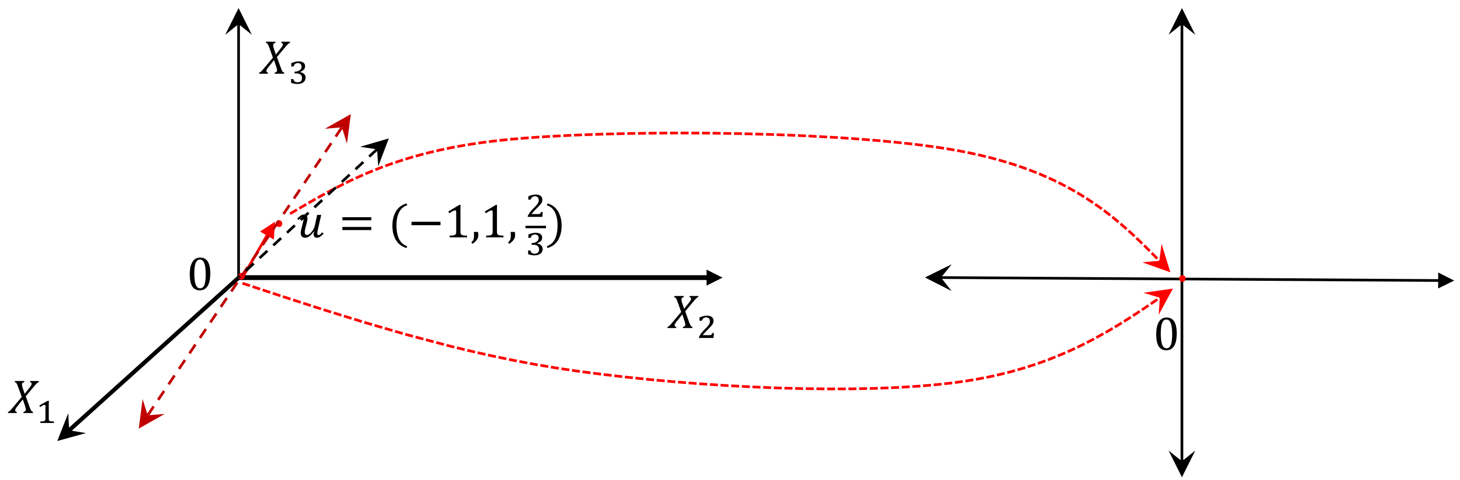
Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

   $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva.**

   Observar que toda a reta (vermelha) tem imagem o zero em $\mathbb{R}^2$.



Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva.**

   Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.

2. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2$, com

$$L(x, y, z) = xt^2 + yt + z$$

A única forma de formar o polinômio zero é com

$$Ker(L) = \{(0,0,0)\}$$

E para qualquer polinômio $p = at^2 + bt + c$ existe a tripla (a, b, c) que $L(a, b, c) = p$. $\boldsymbol{L}$ **é sobrejetiva**.

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial de dimensão n, isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$$

é uma base de U.

Lembrar que todo vetor de U é combinação linear dos elementos da base, então, se $x \in U$ temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n$$

Considerando a base fixa, podemos associar todo vetor com a matriz dos coeficientes únicos que precisa o vetor para ser representado como combinação linear dos elementos da base.

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial de dimensão n, isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

é uma base de U.

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Cuidado, tem que preservar a ordem em β.

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial e $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ base

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Observar:

A base será considerada como conjunto ordenado.

Se a base tem n elementos, a matriz associada será de ordem $n \times 1$.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2\ ) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_\beta = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cong 2(1,0) + 1\ (0,1)$

$$\left(4, -\tfrac{1}{3}\right) \cong \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cong 4\beta_1 - \tfrac{1}{3}\beta_2$$

Por ser a base canônica não precisa ser referenciada.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(0,1),(1,0)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2\ ) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_2 + x_2\beta_1$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}_\beta$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right) \cong \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 4 \end{bmatrix}_\beta$

Por não ser a base canônica, esta deve ser referenciada informando a base utilizada.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(1,1), (-1,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$x = c_1(1,1) + c_2(-1,1) = (c_1 - c_2, c_1 + c_2)$$

Resolvendo: $c_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $c_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \end{bmatrix}_\beta$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_\beta$ e $(2,1) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^4$ e a base canônica

$$\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Podemos dizer: O espaço $\mathbb{R}^4$ com a base β é equivalente ao espaço de matrizes $M_{4\times 1}$ com a base

$$\bar{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja o espaço de polinômios P_3 e a base

$$\beta = \{t^3, t^2, t, 1\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

Sabemos que: $p = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0 \in P_3$

$$p = p_3\beta_1 + p_2\beta_2 + p_1\beta_3 + p_0\beta_4$$

Assim

$$p = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0 \cong \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}_\beta$$

P_3 com a base β é equivalente a $M_{4\times 1}$ com a $\bar{\beta}$.

Utilizando vetores como matriz coluna

Para exemplificar, utilizaremos

A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

e os espaços vetoriais com as bases canônicas.

Representando como matrizes coluna, temos

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Utilizando vetores como matriz coluna

A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim, podemos representar como

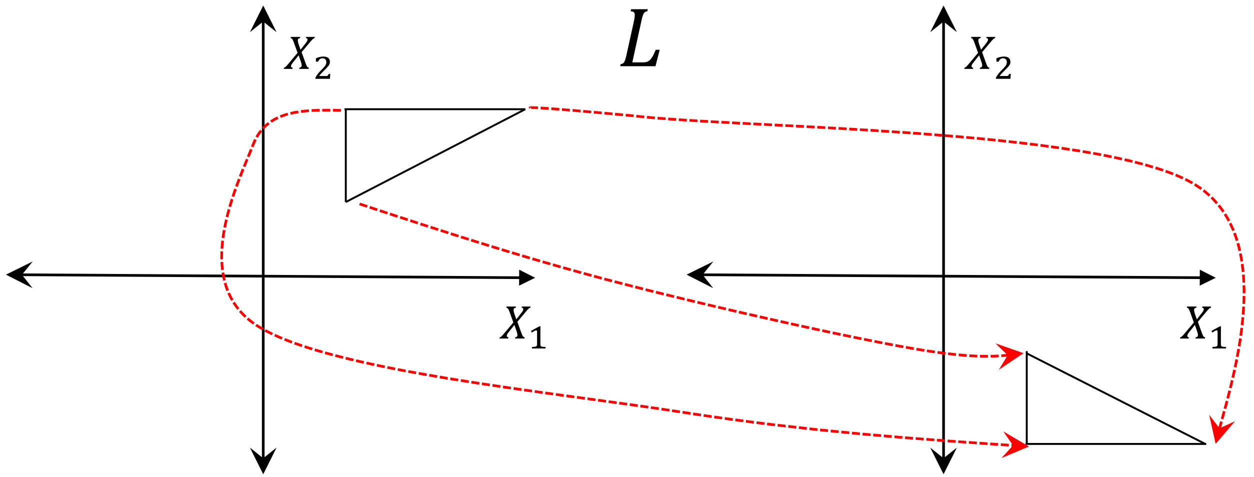
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad ???$$

Transformação linear reflexão no eixo X_1

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo X_1 (X):

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \Leftrightarrow L(x, y) = (x, -y)$$

Graficamente:

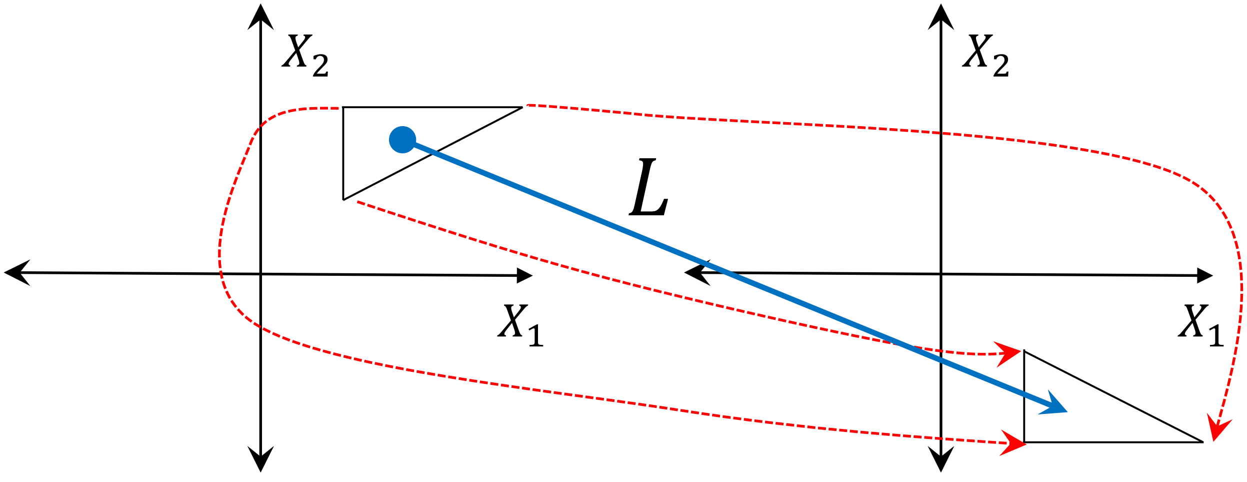


Transformação linear reflexão no eixo X_1

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:

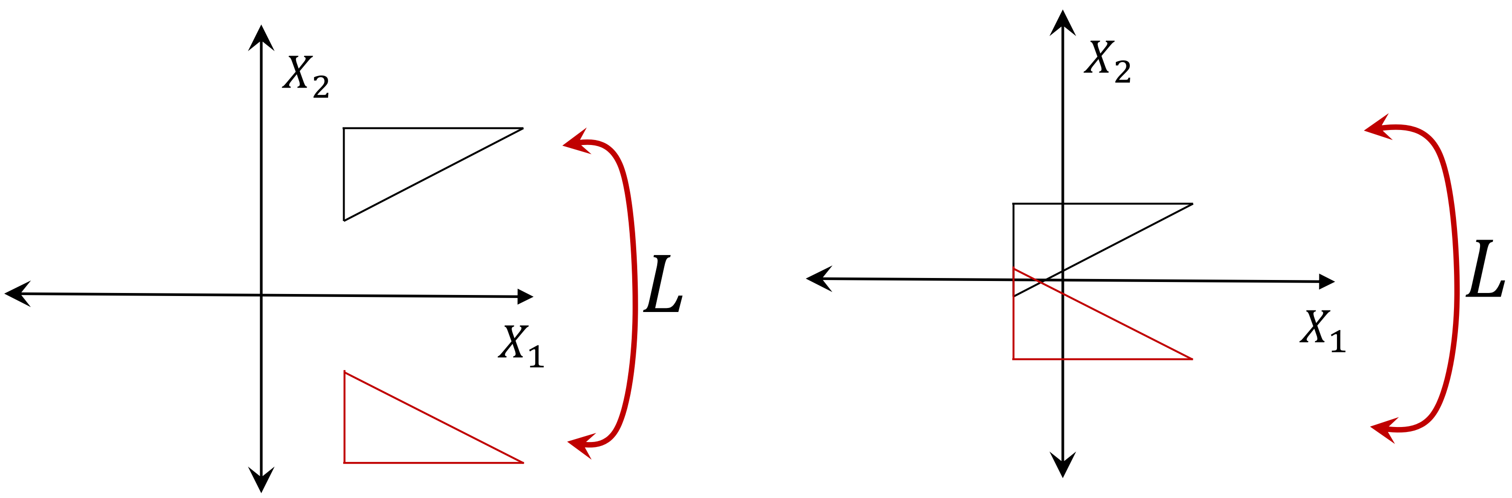


Transformação linear reflexão no eixo X_1

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:



O eixo X_1 funciona como um "espelho" em L.

Transformação linear reflexão no eixo X_1

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Representando como matrizes:

$$(x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Mas $\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. A matriz representa a TL.

Transformação linear reflexão no eixo X_2

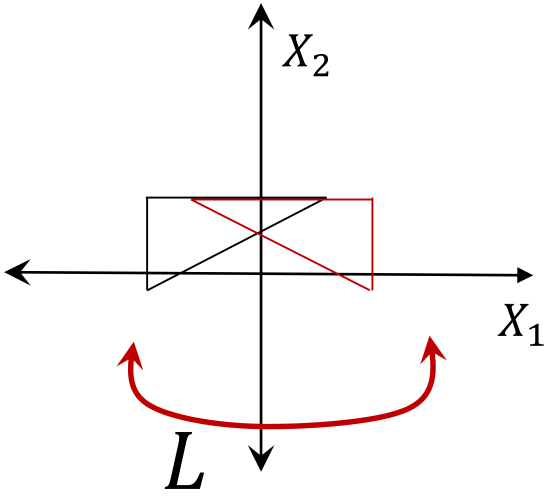
Vejamos uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo X_2 :

$$L(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

Graficamente:

$$(-x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Transformação linear reflexão na origem

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão na origem:

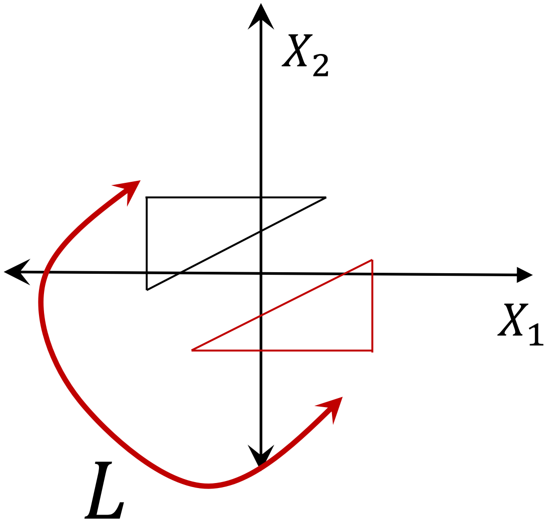
$$L(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$$

Graficamente:

$$(-x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

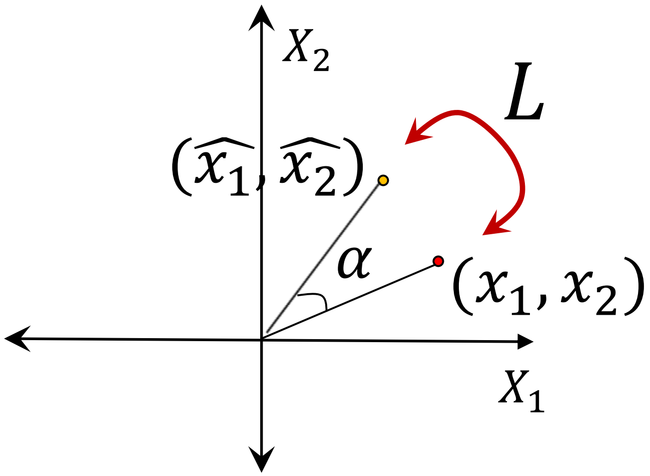
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Transformação: rotação em um ângulo α

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo α:

$$L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$$

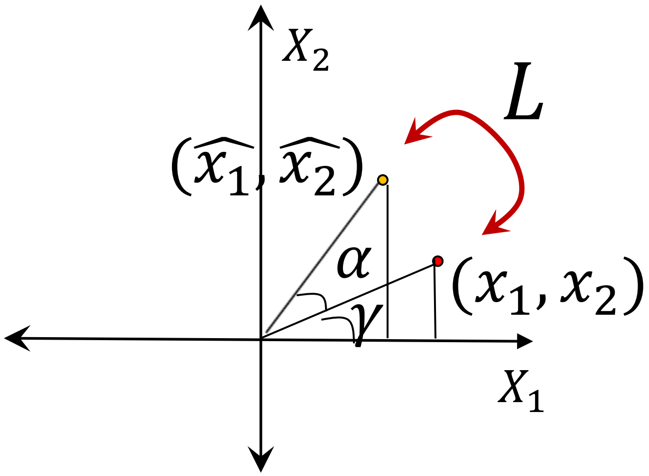


Transformação: rotação em um ângulo α

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo α:

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \hat{x}$$

Vemos que: $\|x\| = \|\hat{x}\| = m$



$$\cos(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x_1}}{m}$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x_2}}{m}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{x_1}{m}$$

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{x_2}{m}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma)\cos(\alpha) + cos(\gamma)sen(\alpha)$$

Transformação: rotação em um ângulo α

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo α:

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \hat{x}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$$
$$\frac{\widehat{x_1}}{m} = \frac{x_1}{m}\cos(\alpha) - \frac{x_2}{m}sen(\alpha)$$
$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma)\cos(\alpha) + cos(\gamma)sen(\alpha)$$
$$\frac{\widehat{x_2}}{m} = \frac{x_2}{m}\cos(\alpha) + \frac{x_1}{m}sen(\alpha)$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$