Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Seja (r,r) quais os polinômios que podem ser construídos? E qual sua característica particular?

Isto é, estamos interessados nas imagens de uma reta

$$\mathcal{L}: (x,y) = r(1,1)\ /\ r \in \mathbb{R}$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

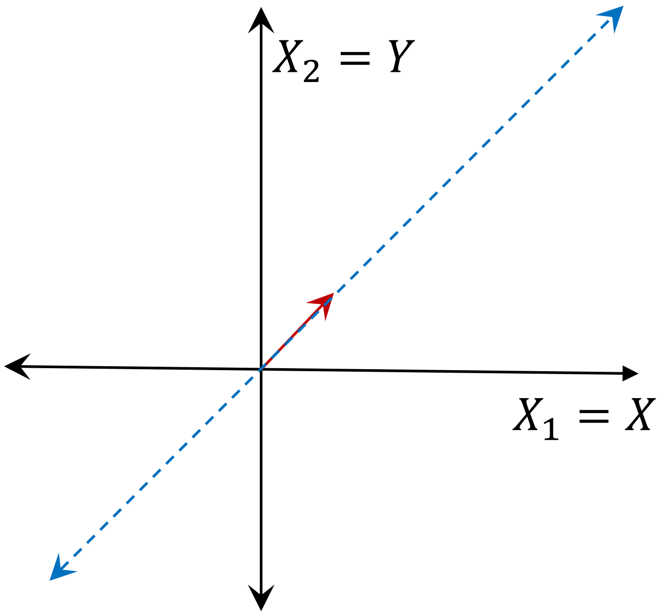
com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Seja (r,r)

$\mathcal{L}: (x,y) = r(1,1)\ /\ r \in \mathbb{R}$



Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

A base não é canônica, calculamos as colunas (duplas)

Seja $(r,r) = f_1(1,1) + f_2(0,1) = (f_1, f_1 + f_2)$

resolvendo $f_1 = r$ e $f_2 = 0$.

$$(r,r) \cong \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Calcular imagens de qualquer dupla ordenada:

Para $(r,r) \cong \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta$

$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2r \\ \frac{3}{2}r \end{bmatrix}_\delta = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Observar: $L(r,r) = (2r)t + r$

$$rL(1,1) = r(2t+1)$$

Para

$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \cong r\left(2(t-1) + \tfrac{3}{2}(2)\right) = r(2t+1)$$

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\ \}$

Como utilizar a matriz ?

A. Observar: $(r,r) = r(1,1)$ / $r \in \mathbb{R}$?

É uma reta em $\mathbb{R}^2$

E a imagem ?

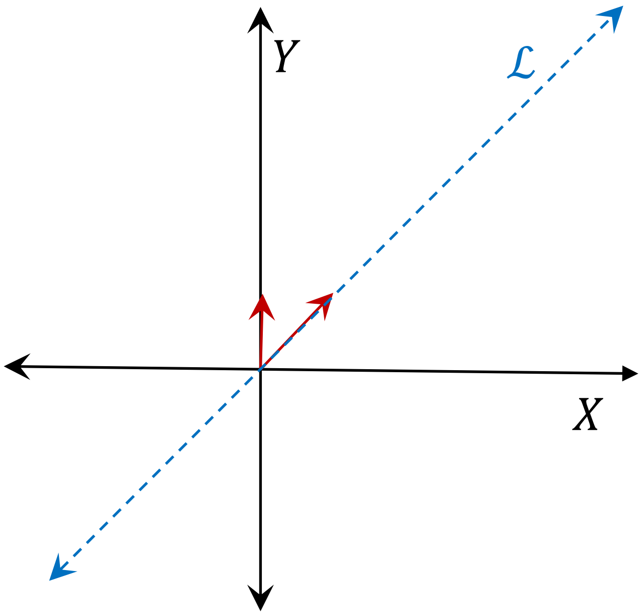
$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_\beta\right) = r\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \cong r(2t+1)$$

também é uma reta em P_1.

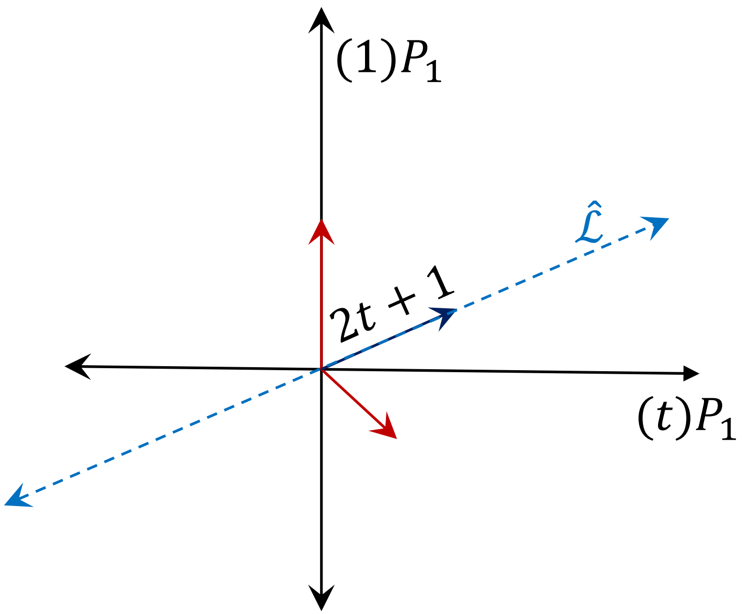
Transformação – interpretação geométrica

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1 \text{ e } \beta = \{(1,1),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(t-1),\ 2\}$$

$$\mathcal{L}: p = r(1,1) / \ r \in \mathbb{R} \qquad \hat{\mathcal{L}}: p = r(2t+1) / \ r \in \mathbb{R}$$

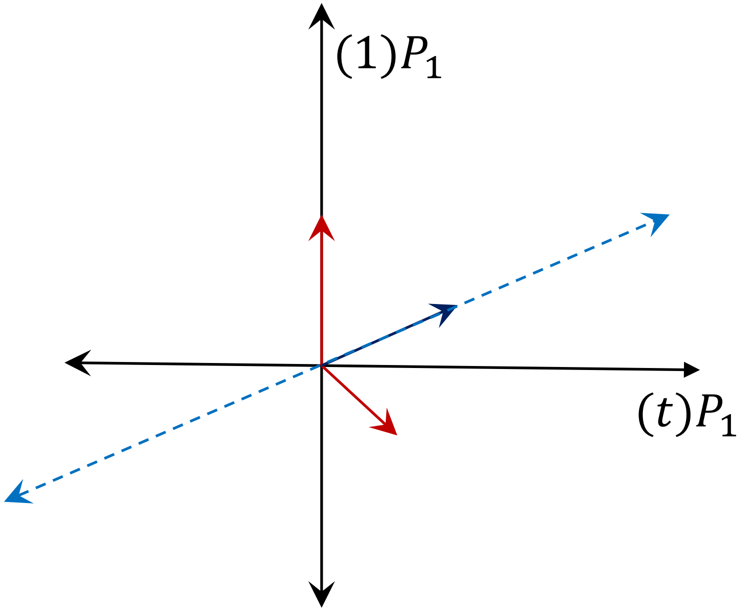


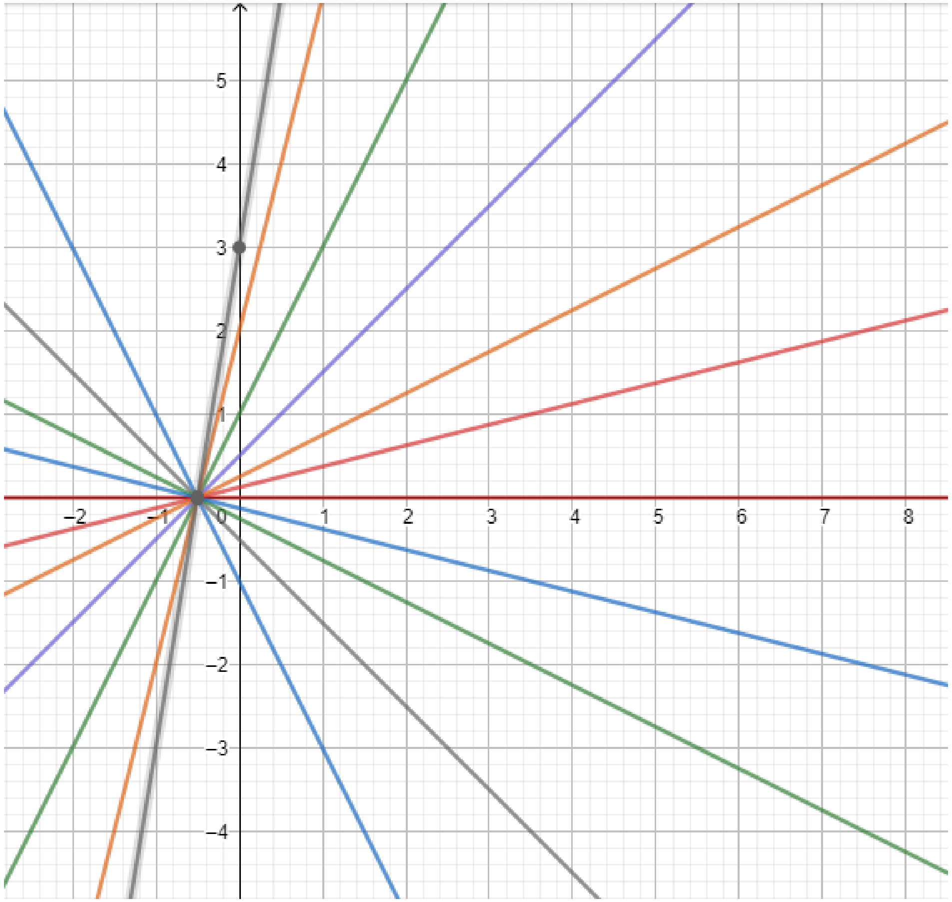
L



Transformação – interpretação geométrica

Gráficos dos elementos da reta de polinômios





Intervalo para dúvidas

Transformação – interpretação geométrica

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\}$

Como utilizar a matriz ?

B. Seria muito mais fácil: $L(r, r) = r(2t + 1)$

Porque utilizar a matriz associada ?

Resposta: Para automatizar cálculo computacional de transformações lineares.

Por agora parece pouco.

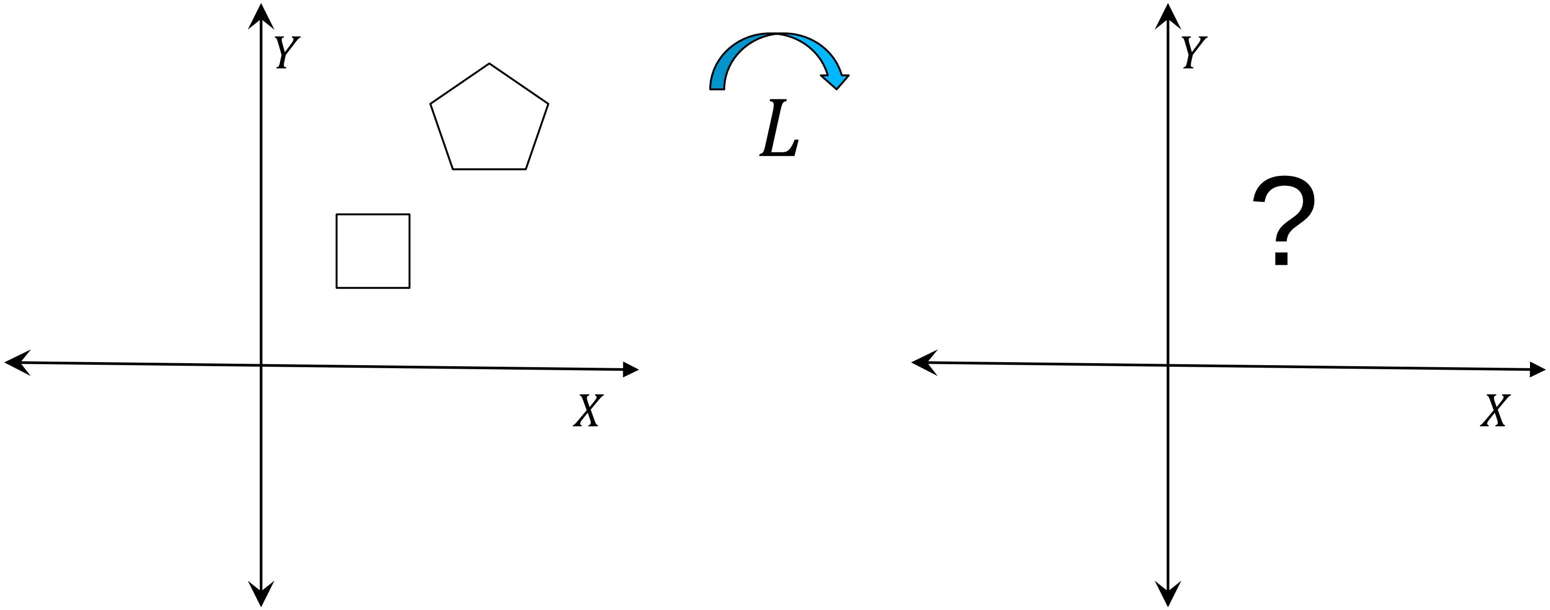
Principal uso: é utilizado quando temos poucos dados.

Transformação – interpretação geométrica

Para entender vejamos um exemplo:

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$L(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$. O que faz L ???

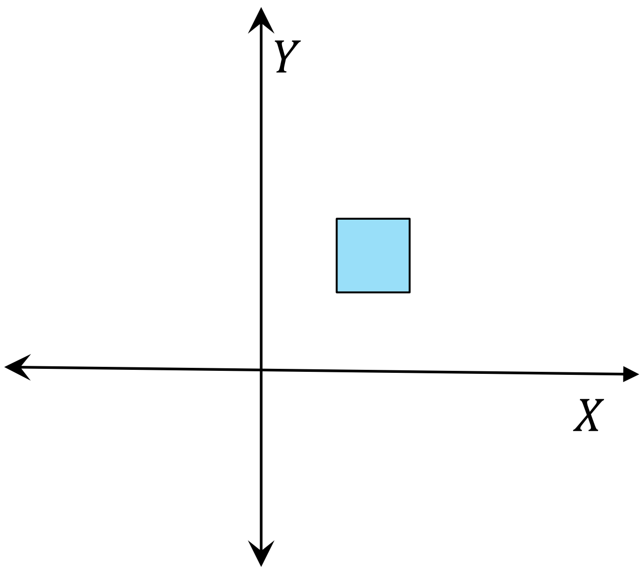


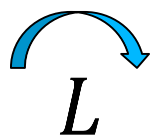
Transformação – interpretação geométrica

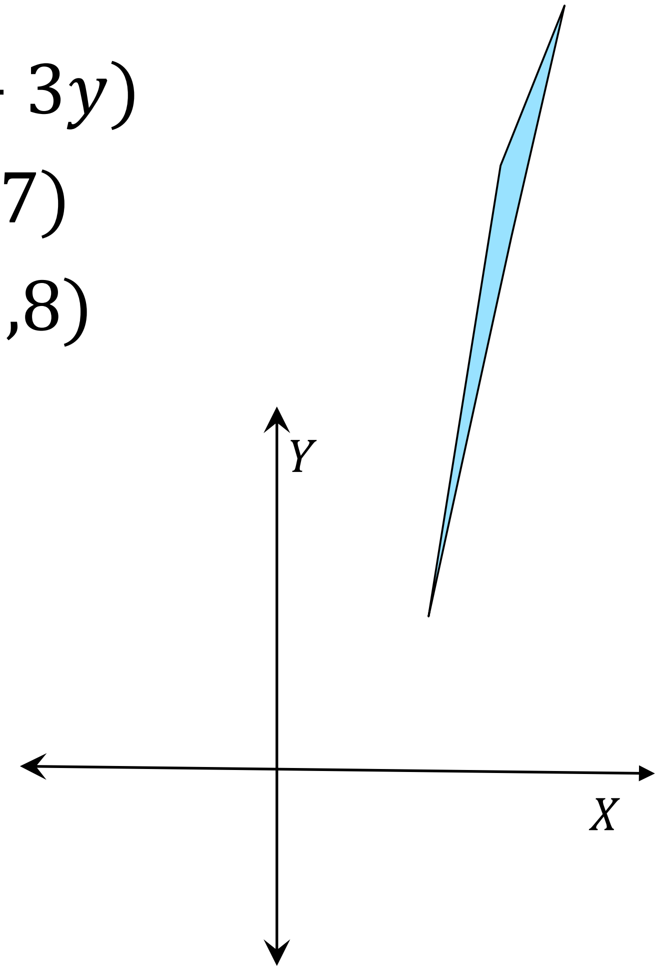
Para: $L(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$

$L(1,1) = (2,5)$ $L(2,1) = (3,7)$

$L(2,2) = (4,10)$ $L(1,2) = (3,8)$





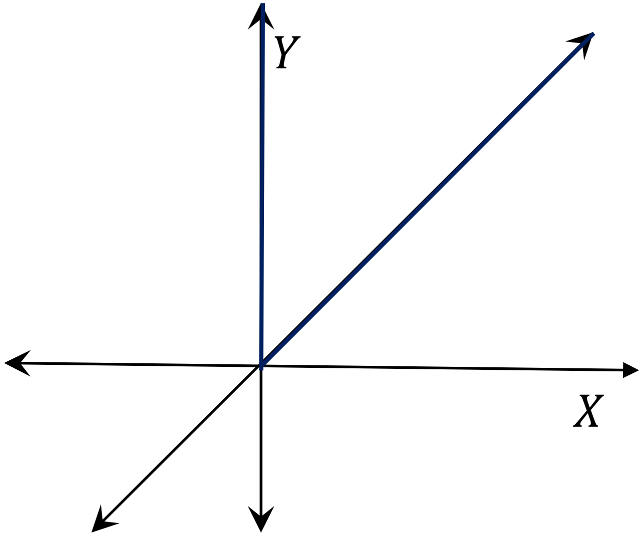


Deformou o quadrado. Não é triângulo.

Transformação – interpretação geométrica

Na prática precisamos deformar um objeto (figura) considerando que conhecemos alguns dados e isso deve ser um padrão para toda outra deformação.

- Preciso deformar com uma transformação linear.
- No caso não tenho fórmula definida.
- Poucos dados.



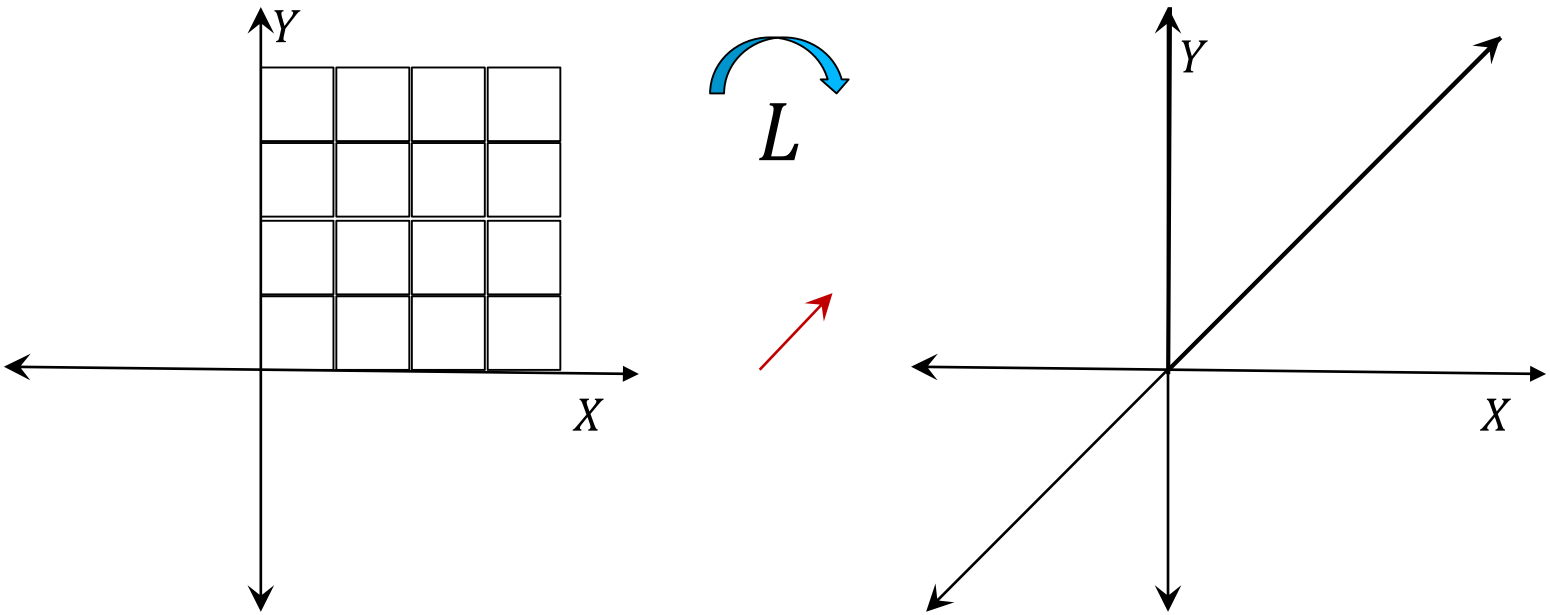
Exemplo: Tenho um espaço para transporte como na figura.

Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$L(x, y) = \ ???$

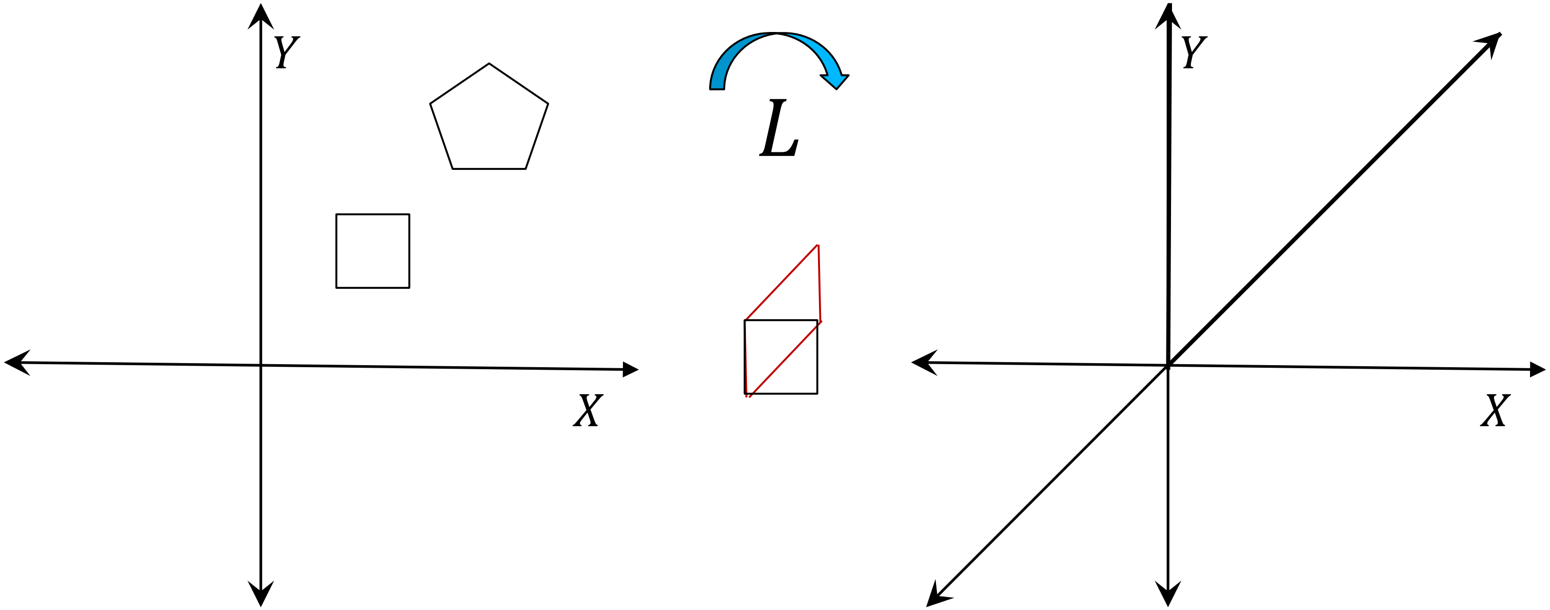


Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$L(x, y) = ???$ Deforme o quadrado sem perder a área.

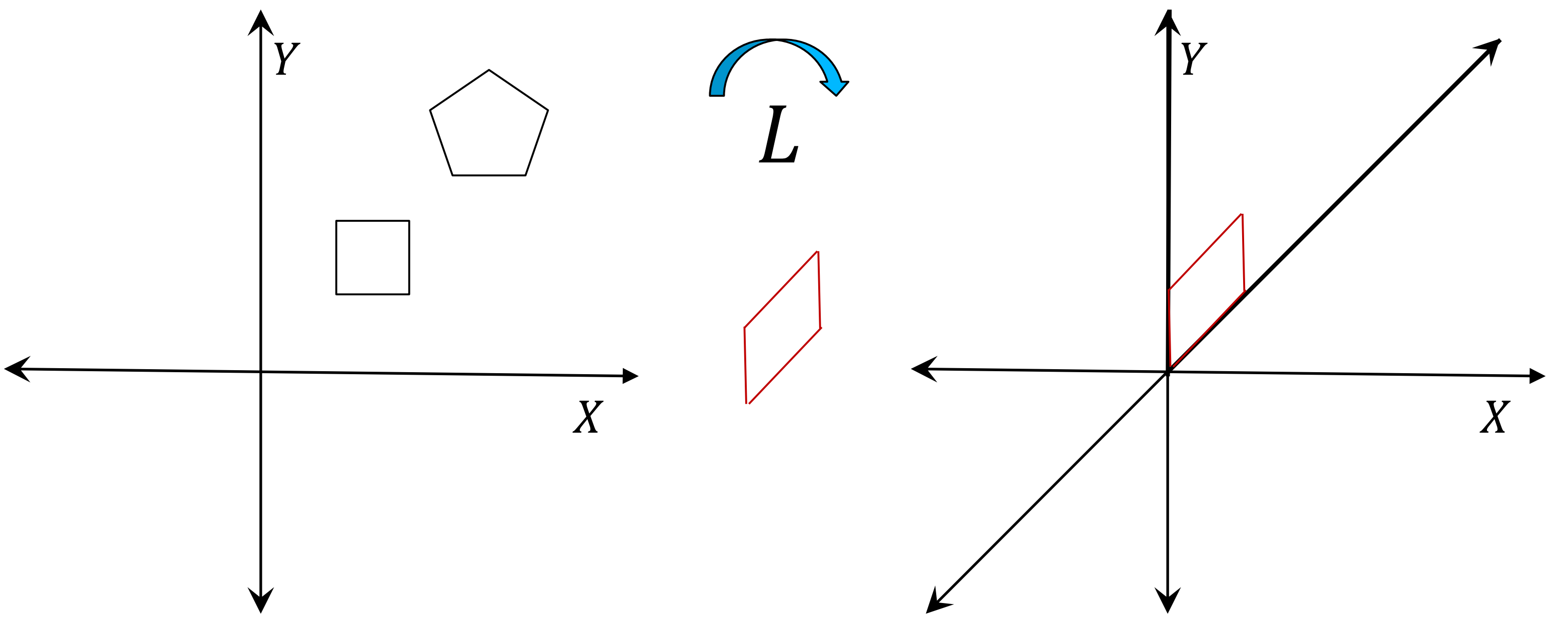


Transformação – interpretação geométrica

Exemplo:

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

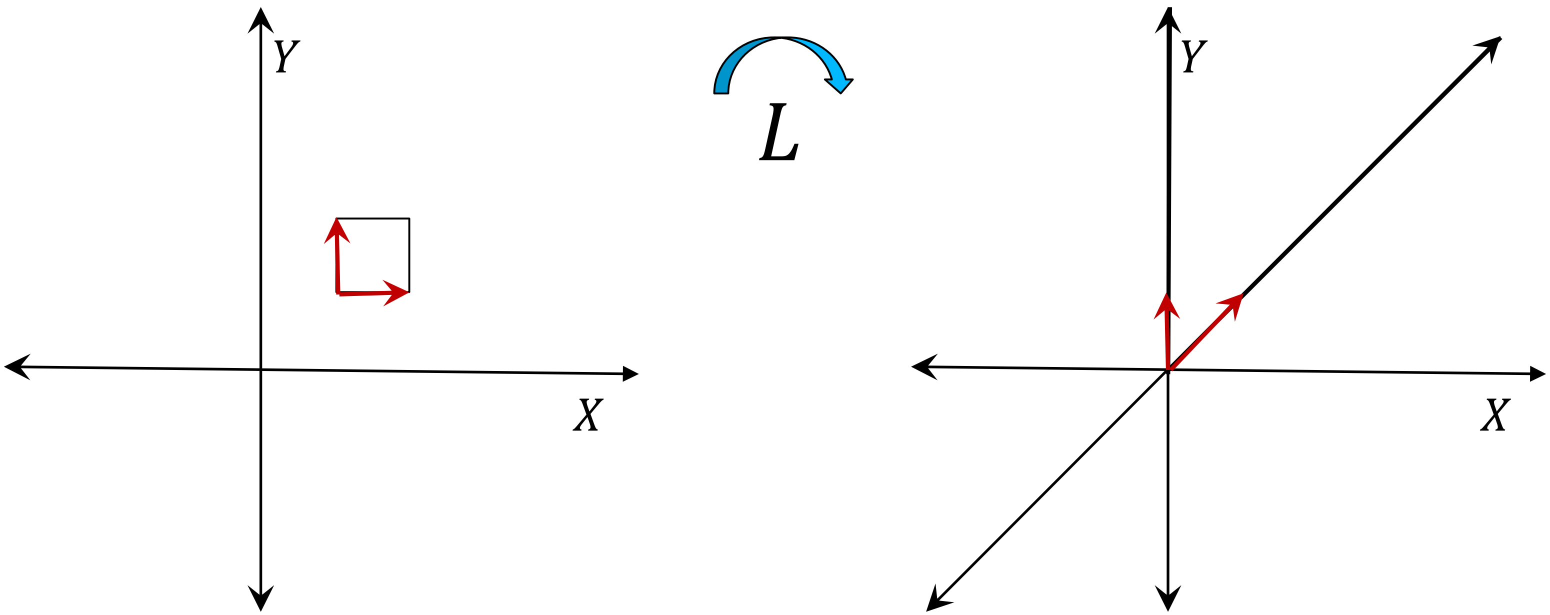
$$L(x, y) = ???$$



Transformação – interpretação geométrica

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x,y) \cong L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[[L(\beta_1)]_\delta [L(\beta_2)]_\delta\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

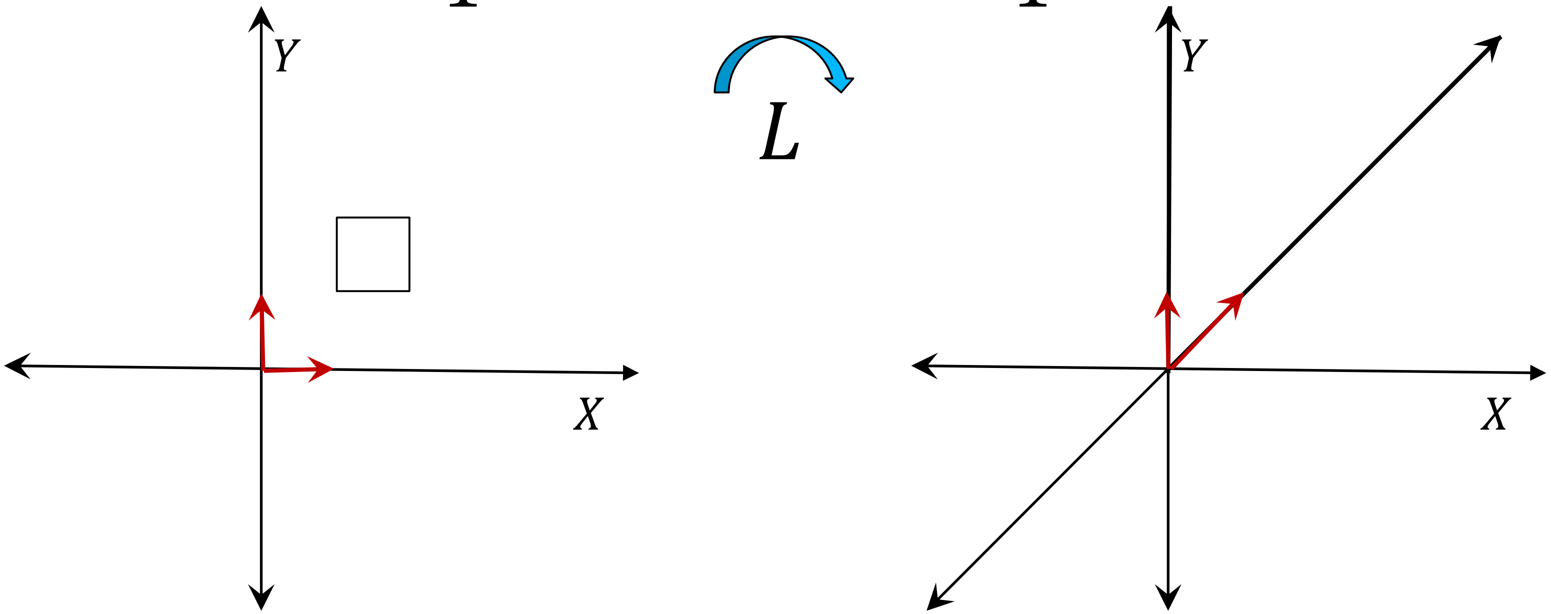


Transformação – interpretação geométrica

Precisamos de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\delta = \{(1,0),(0,1)\}$

$[L(\beta_1)]_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[L(\beta_2)]_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

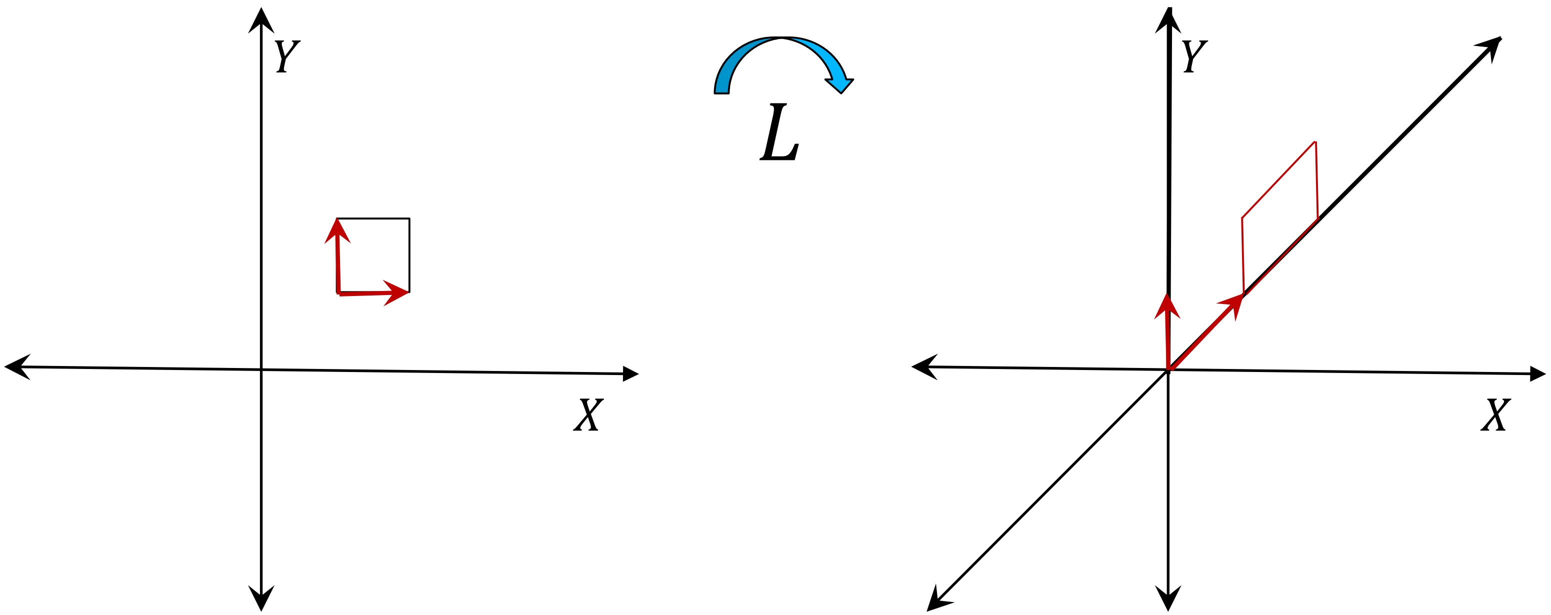


Transformação – interpretação geométrica

Assim, temos a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$[L]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix} \Rightarrow L(x,y) = (x, x+y)$$

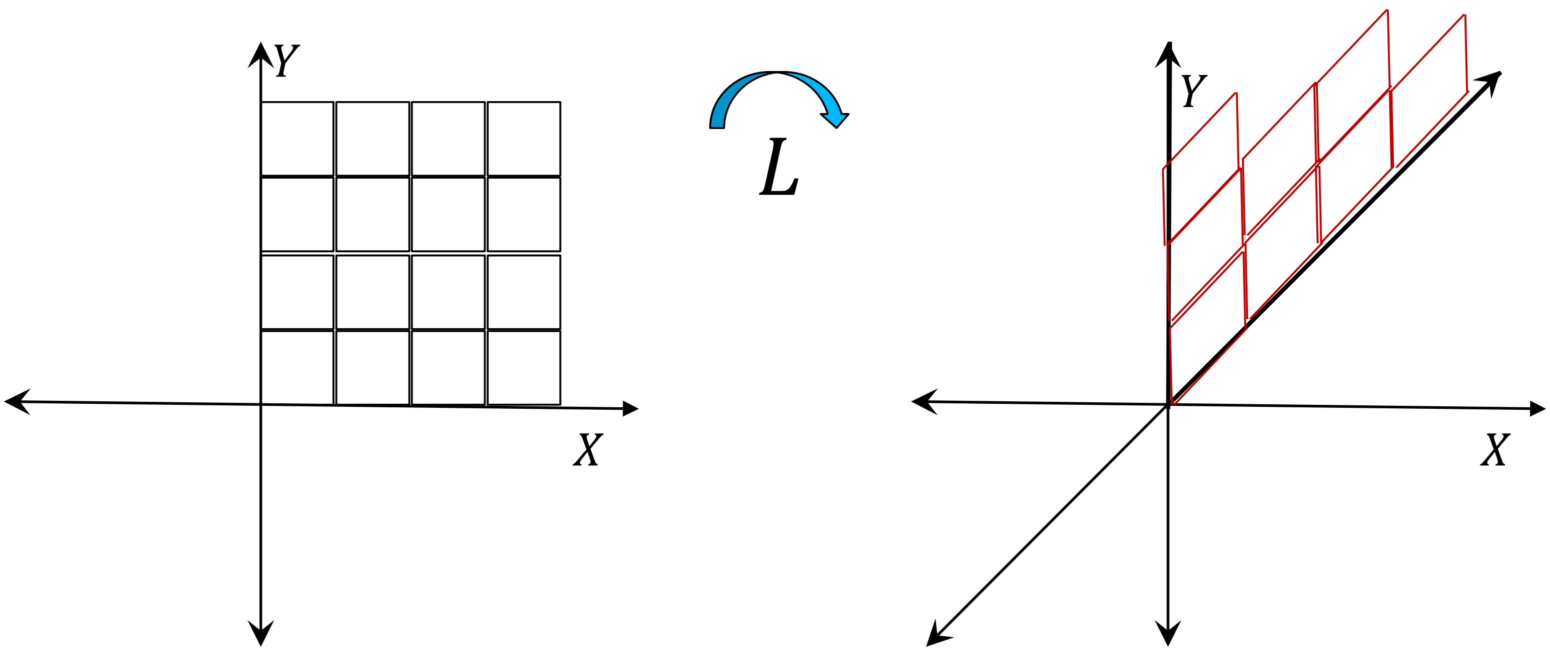
$L(1,1) = (1,2)$ $L(2,1) = (2,3)$ $L(2,2) = (2,4)$ $L(1,2) = (1,3)$



Transformação – interpretação geométrica

Determinamos a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

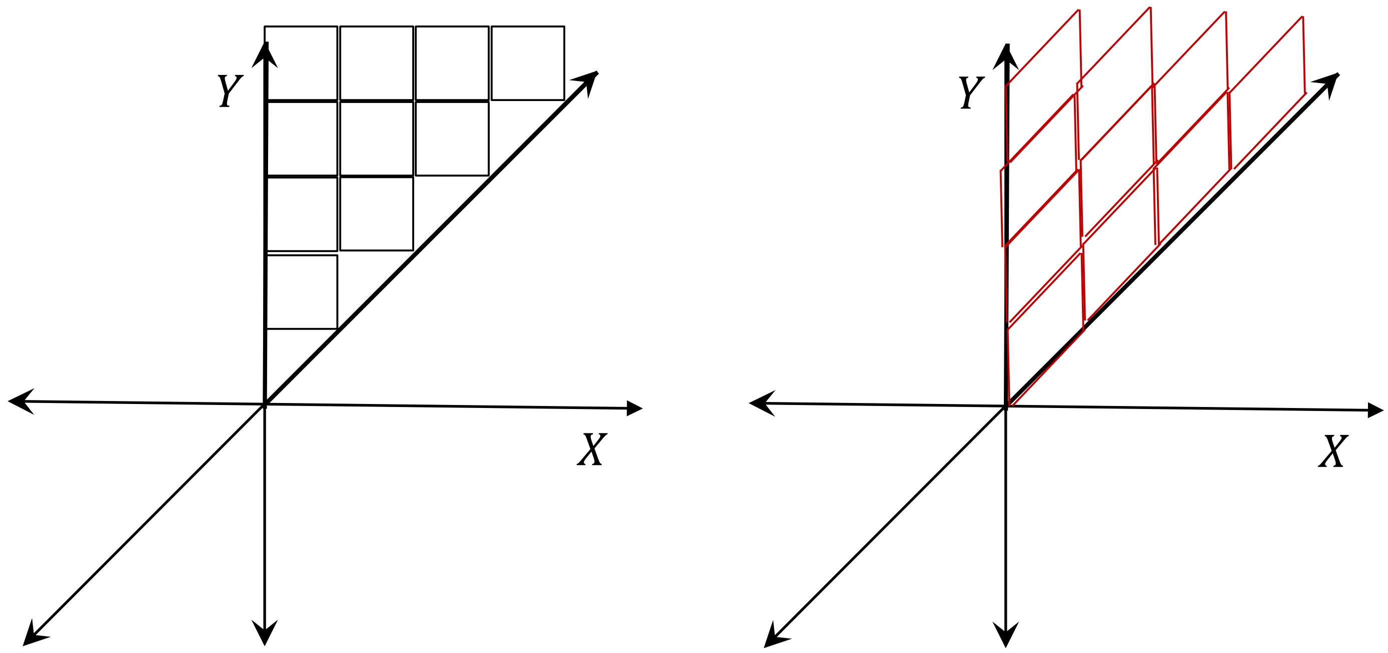
$$L(x, y) = (x, x + y)$$



Transformação – interpretação geométrica

Determinamos a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = (x, x + y)$$



Transformação – interpretação geométrica

Assim, é possível definir uma transformação linear utilizando um número de dados igual à dimensão do espaço de partida.

Todo o trabalho foi identificar as imagens dos elementos da base, atendendo o problema.

Com esses dados é possível determinar uma matriz associada a uma transformação linear.

A partir da matriz pode-se determinar uma fórmula para a transformação linear procurada.

Intervalo para dúvidas

O que significa bases diferentes ??

Quando U e W são o mesmo espaço vetorial mas as bases são diferentes

$$\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \text{ e } \delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$$

O que significa ???

Por exemplo:

$U = \mathbb{R}^2$ com a base $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, e

$W = \mathbb{R}^2$ com a base $\delta = \{(1,1), (0,1)\}$

O que significa bases diferentes ??

Exemplo: $U = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^2$ com as bases diferentes

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

Para poder identificar o que significa, utilizemos a transformação linear "identidade" entre os espaços.

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x,y) = (x,y)$.

$$L(1,0) = (1,0)$$

$$L(0,1) = (0,1)$$

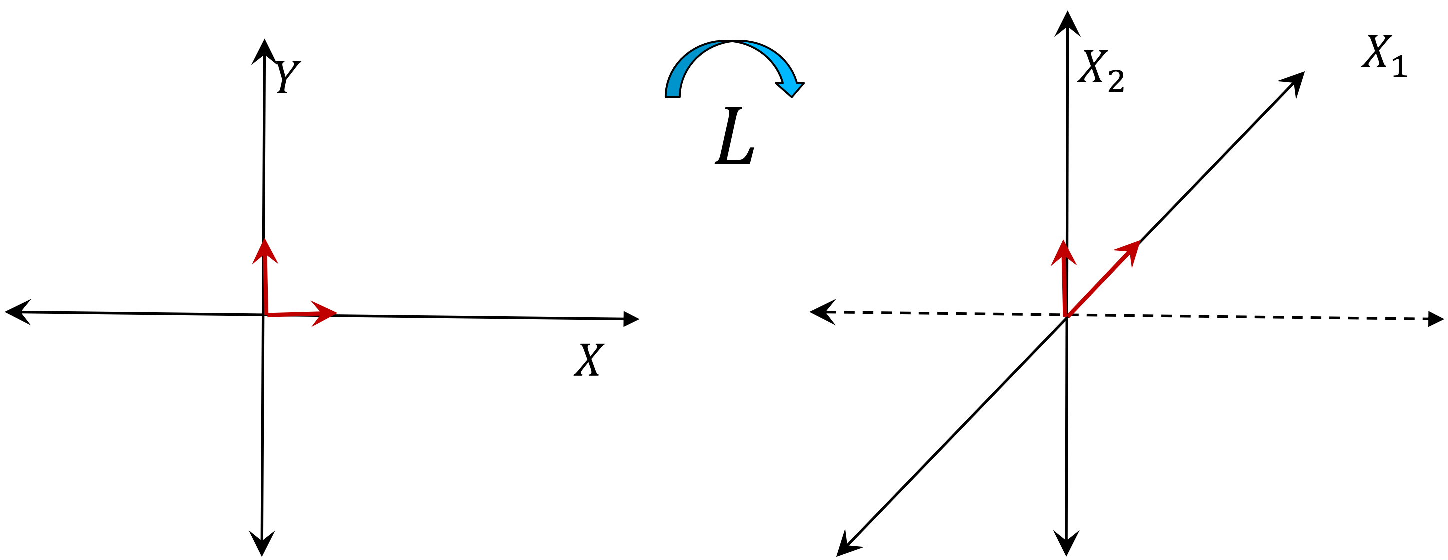
O que significa bases diferentes ??

Exemplo: $U = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^2$ com as bases diferentes

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (0,1)\}$$

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y) = (x, y)$.

$L(1,0) = (1,0) \quad L(0,1) = (0,1)$



O que significa bases diferentes ??

Seja $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

Para montar a matriz da TL combinamos os β em δ:

$$L(1,0) = (1,0) = c_1(1,1) + c_2(0,1) = (c_1, c_1 + c_2)$$

$c_1 = 1$ e $c_2 = -1$

$$L(0,1) = (0,1) = d_1(1,1) + d_2(0,1) = (d_1, d_1 + d_2)$$

$d_1 = 0$ e $d_2 = 1$

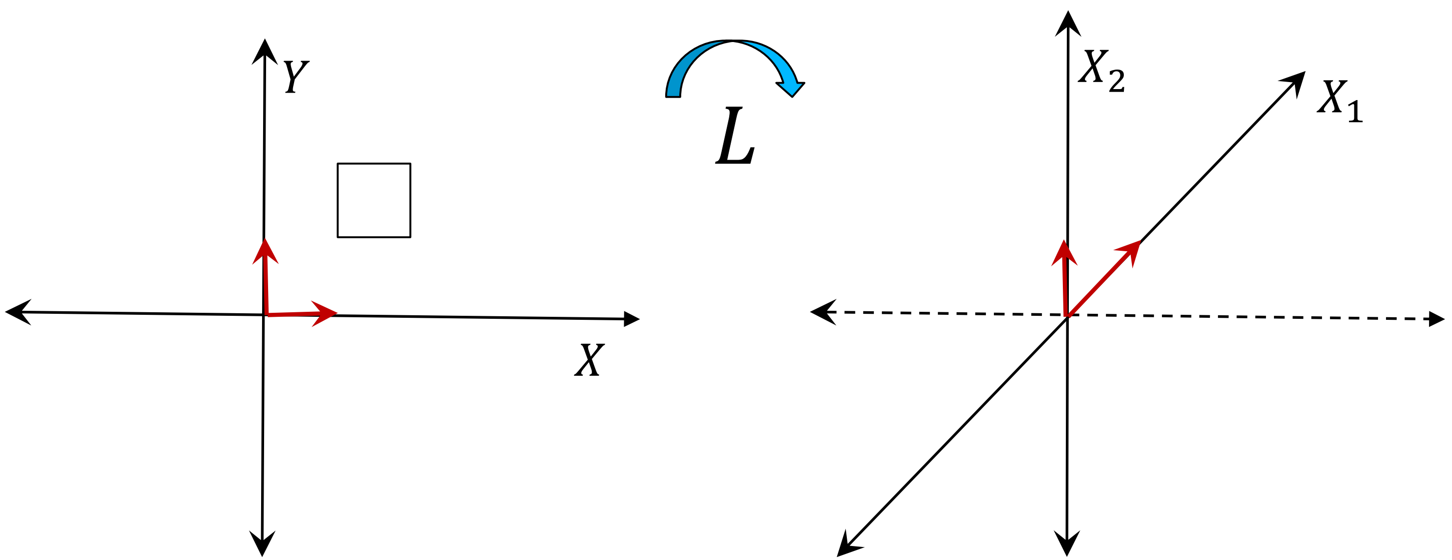
$$[L]_\delta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_\delta^\beta$$

O que significa bases diferentes ??

Seja $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

Vejamos a transformação do quadrado com vértices em P = (1,1), Q = (2,1), R = (2,2) e S = (1,2)



O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$\mathrm{P} = (1,1) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathrm{Q} = (2,1) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathrm{R} = (2,2) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_\delta$$

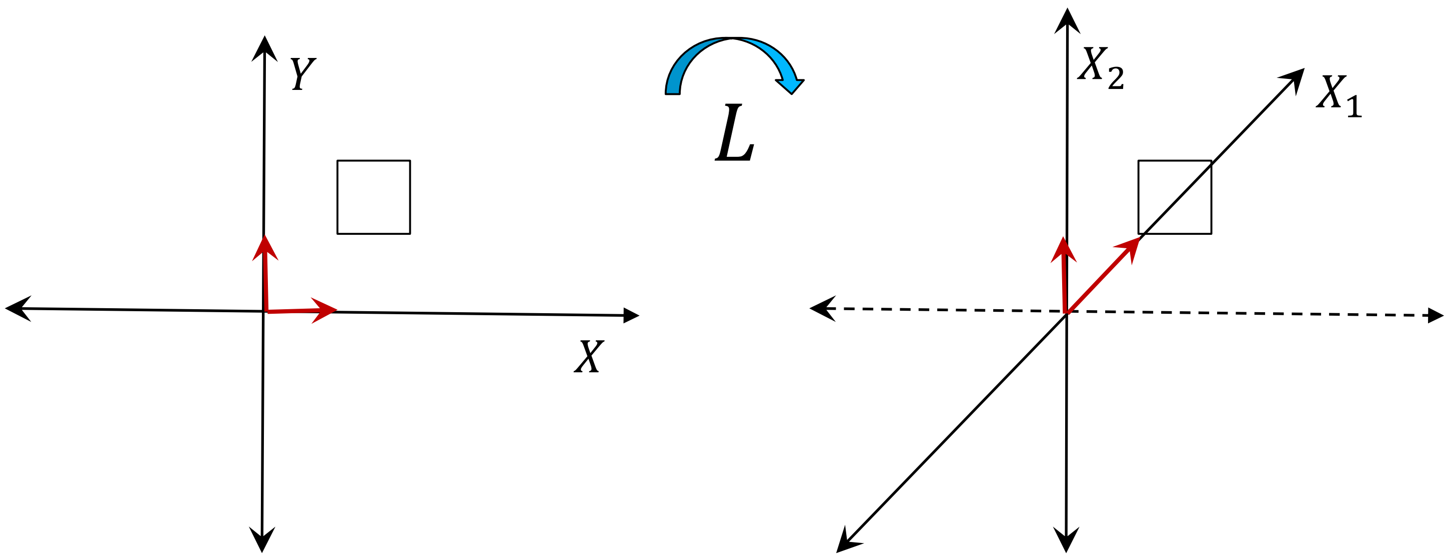
$$\mathrm{S} = (1,2) \Rightarrow [L]\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_\delta$$

O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x,y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$[L](P) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_\delta, [L](Q) = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}_\delta, [L](R) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_\delta, [L](S) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_\delta$$

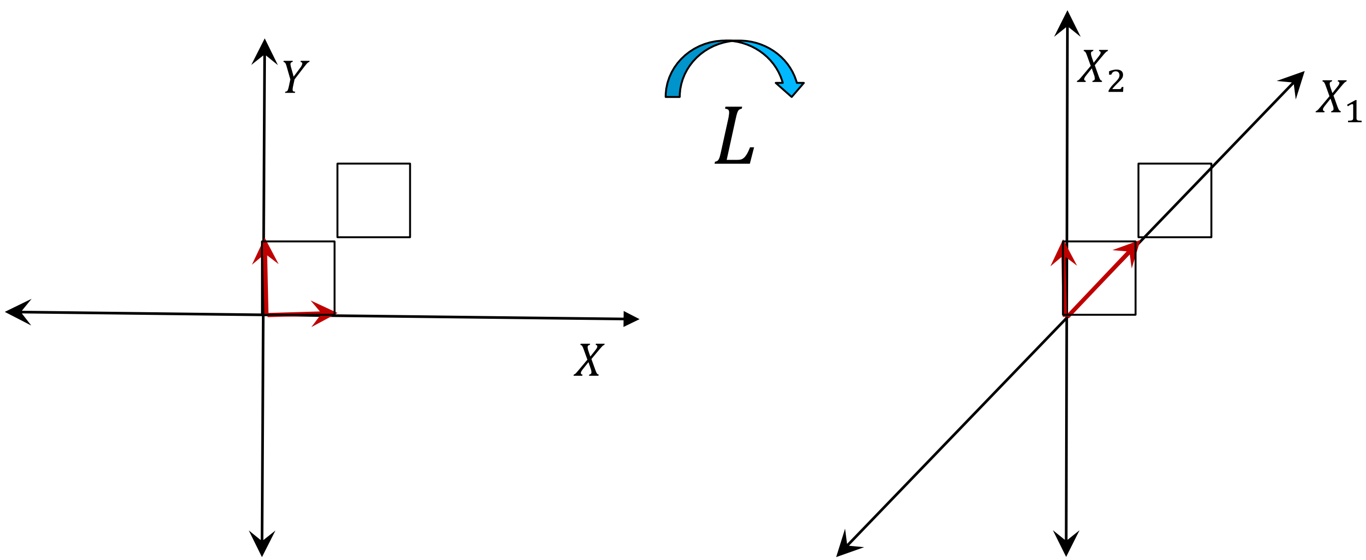


O que significa bases diferentes ??

Seja $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x, y)$ com as bases

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (0,1)\}$$

Observar: Com a base δ temos outros eixos e a medida da unidade depende dos vetores da base ...



Intervalo para dúvidas