Aplicações geométricas
Transformações

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

1 de junho de 2020

Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

As condições acima significam que a transformação linear L preserva a soma e multiplicação vezes escalar de um espaço no outro.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

Núcleo de uma transformação linear

Define-se o núcleo da transformação linear L, como o conjunto

$$Ker(L) = \{u \in U \ / \ L(u) = 0\}$$

Imagem de uma transformação linear

Define-se a imagem de L, como o conjunto

$$Imag(L) = \{w \in W \ / \ \text{Existe } u \in U \text{ com } L(u) = w\}$$

O $\boldsymbol{Ker(L)}$ e a $\boldsymbol{Imag(L)}$ são espaços vetoriais.

Transformação linear e matriz associada

Considerando:

Um espaço vetorial U com base $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

Um espaço vetorial W com base $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$

A matriz associada a L está formada por n colunas, e cada coluna é a representação de cada imagem dos elementos de β na base δ:

$$[L]_\delta^\beta = [[L(\beta_1)]_\delta \quad \dots \quad [L(\beta_n)]_\delta]_\delta^\beta$$

Intervalo para dúvidas

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a, b) = (a + b)t + (2a - b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ e $\delta = \{(t - 1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t + 1$$
$$L(\beta_2) = L(0,1) = t - 1$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t+1$$
$$L(\beta_2) = L(0,1) = t-1$$

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

Expressar como CL dos elementos de δ.

$$L(\beta_1) = 2t+1 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 = c_1(t-1) + 2c_2$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ.

Precisamos resolver o sistema

$$L(\beta_1) = 2t + 1 = c_1 t + (2c_2 - c_1)$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ 2c_2 - c_1 = 1 \end{cases}$$

Facilmente vemos $c_1 = 2$ e $c_2 = \frac{3}{2}$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ.

Portanto,

$$L(\beta_1) = 2t + 1$$

$$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Expressar como CL dos elementos de δ. Para $L(\beta_2)$

$$L(\beta_2) = t-1 = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 = d_1(t-1) + d_2 2$$

$$L(\beta_2) = t-1 = d_1 t + (2d_2 - d_1)$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ 2d_2 - d_1 = -1 \end{cases}$$

Facilmente vemos $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

1. Encontremos as imagens dos elementos da base β:

$L(\beta_1) = L(1,1) = 2t + 1$ $L(\beta_2) = L(0,1) = t - 1$

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta$ $L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1$,

$$L(a,b) = (a+b)t + (2a-b)$$

com as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\delta = \{(t-1),\ 2\}$

Qual a matriz de *L* ??

2. Determinemos as colunas para cada vetor imagem

$$L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_\delta \quad L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta$$

3. Construir a matriz: $[L]_\delta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}_\delta^\beta$