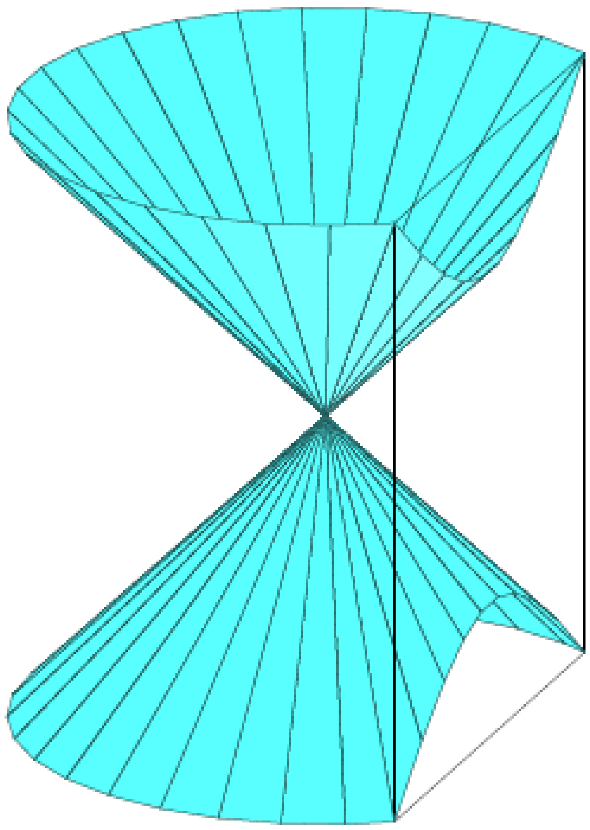
Hipérbole

Definição:

A hipérbole é a curva (intersecção) obtida ao cortar um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a **reta geratriz** do cone e que corta as duas folhas da superfície.



Hipérbole: Lugar geométrico

Definição: Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano, tais que o módulo da **diferença** entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante.

Observar: Como são 2 pontos fixos dados podemos calcular a distância entre eles:

$$dist(F_1, F_2) = d(F_1, F_2) = 2c.$$

O valor da soma que deve ser constante fazemos $2a$.

No caso, por utilizar diferença é esperado $a < c$.

Hipérbole : Lugar geométrico

Definição: Uma hipérbole é o conjunto dos pontos P que satisfazem: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$.
Onde: $a < c$ e $d(F_1,F_2) = 2c$.

$$\mathcal{H} = \{P = (x,y) \ /|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$$

$$\mathcal{H}: |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

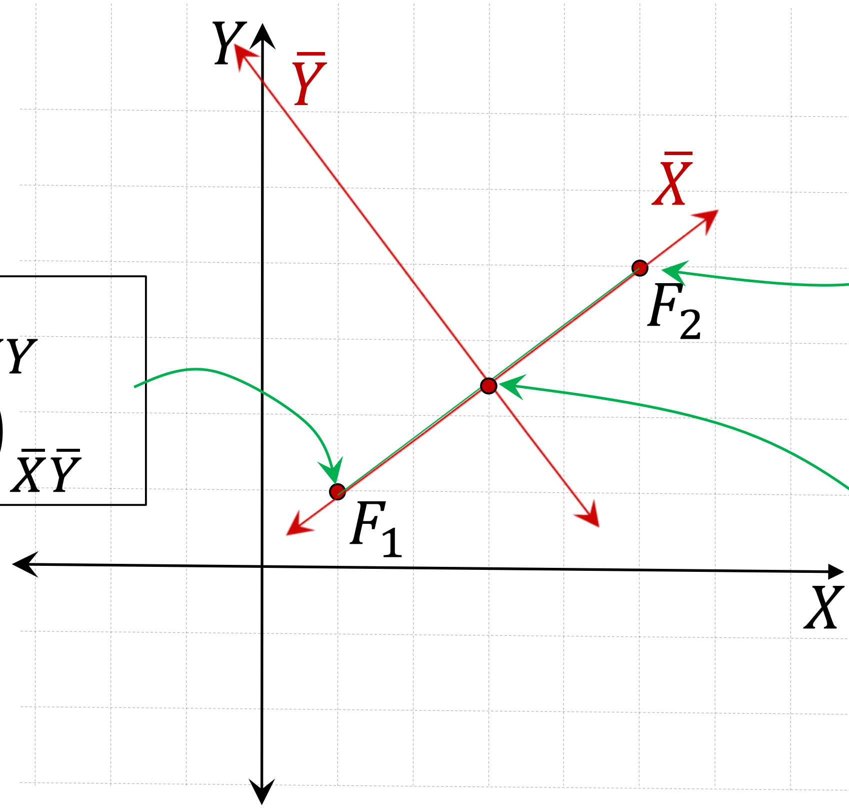
Observar: Uma hipérbole se define com três dados

- Dois focos: F_1 e F_2
- O valor constante $2a$, com $a < c$.

Hipérbole

Dados os dois focos e a distância $2c$, vamos utilizar novos eixos para simplificar a representação:

$$F_1 = (1,1)_{XY}$$
$$F_1 = \left(-\tfrac{5}{2}, 0\right)_{\bar{X}\bar{Y}}$$



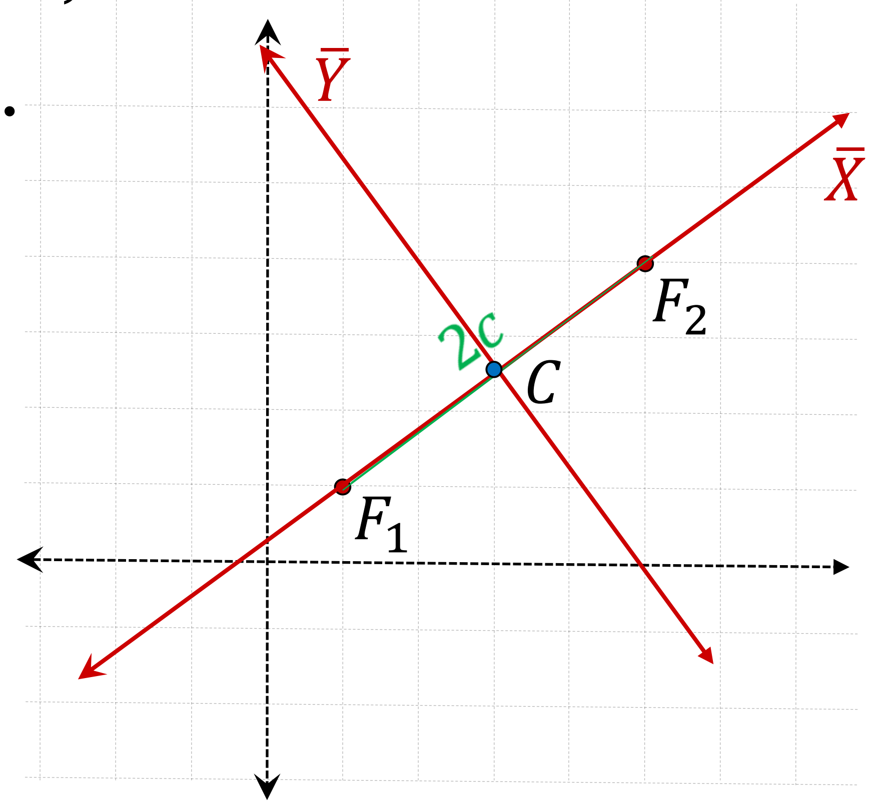
$$F_2 = (5,4)_{XY}$$
$$F_2 = \left(\tfrac{5}{2}, 0\right)_{\bar{X}\bar{Y}}$$

$$C = \left(3, \tfrac{5}{2}\right)_{XY}$$
$$C = (0,0)_{\bar{X}\bar{Y}}$$
$$C = \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

Hipérbole

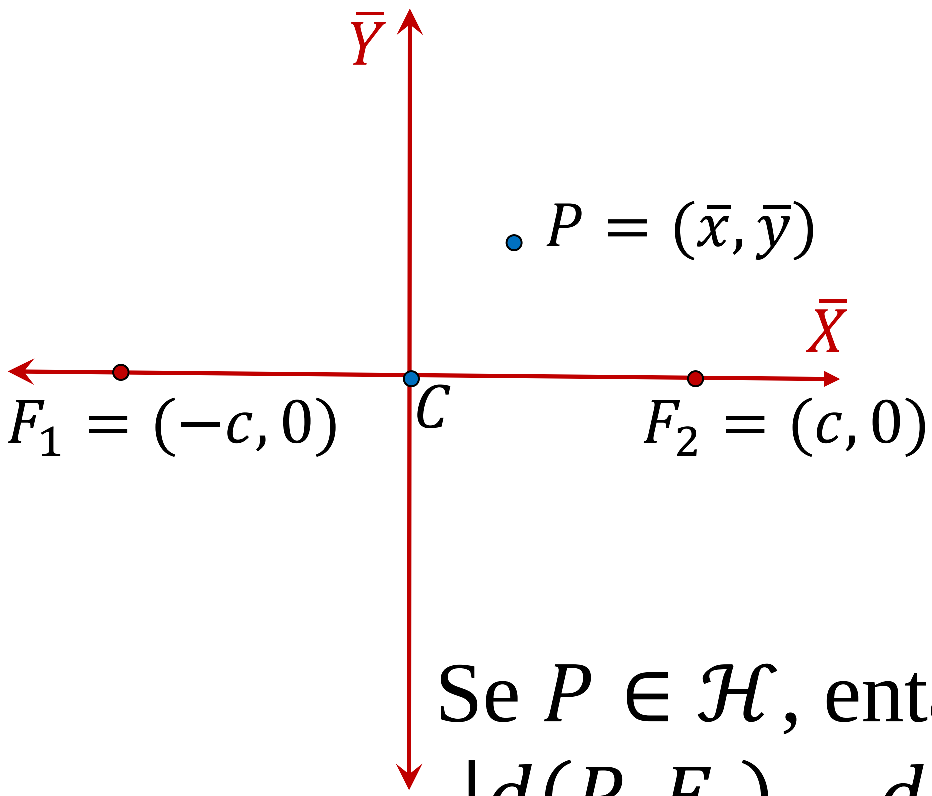
Então, passando pelos dois pontos foi construido um novo eixo $\bar{X}$ (eixo focal), uma nova origem sendo o ponto do médio entre eles, e construindo o eixo $\bar{Y}$ como a reta ortogonal a $\bar{X}$.

$$F_1 = (-c, 0)$$
$$F_2 = (c, 0)$$
$$C = (0,0)$$



Hipérbole

Agora, trabalhando nos novos eixos $\bar{X}\bar{Y}$, temos



Supondo que o ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ pertence a hipérbole $\mathcal{H}$, então deve ser válida a equação dada para um valor dado $2a$:

Se $P \in \mathcal{H}$, então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Hipérbole : Equação canônica

$$\mathcal{H}: \ |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$\mathcal{H}: \ \big|d\big((\bar{x},\bar{y}),(-c,0)\big) - d\big((\bar{x},\bar{y}),(c,0)\big)\big| = 2a$$

$$\mathcal{H}: \ \sqrt{(\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2} - \sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2} = \pm 2a$$

$$\mathcal{H}: \ \sqrt{(\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2} = \pm 2a + \sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$\mathcal{H}: \ (\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2} + (\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2$$

$$\mathcal{H}: \ (\bar{x}+c)^2 - (\bar{x}-c)^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

$$\mathcal{H}: \ 4\bar{x}c - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

$$\mathcal{H}: \ \bar{x}c - a^2 = \pm a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

Hipérbole : Equação canônica

Elevando ao quadrado novamente em

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}c - a^2 = \pm a\sqrt{(\bar{x}-c)^2 + \bar{y}^2}$$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2c^2 - 2\bar{x}ca^2 + a^4 = a^2\left((\bar{x}-c)^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2c^2 - 2\bar{x}ca^2 + a^4 = a^2(\bar{x}^2 - 2\bar{x}c + c^2 + \bar{y}^2)$$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2c^2 + a^4 = a^2\bar{x}^2 + a^2c^2 + a^2\bar{y}^2$$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2c^2 - a^2\bar{y}^2 - a^2\bar{x}^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2(c^2 - a^2) - a^2\bar{y}^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como $c > a > 0 \Longrightarrow c^2 > a^2 \Longrightarrow c^2 - a^2 > 0$

Fazemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2b^2 - a^2\bar{y}^2 = a^2b^2$$

Hipérbole : Equação canônica

Então, temos que todo ponto da hipérbole satisfaz:

$$\mathcal{H}:\ \bar{x}^2 b^2 - a^2 \bar{y}^2 = a^2 b^2$$

para $c^2 = a^2 + b^2$.

Mais ainda, dividindo entre $a^2 b^2$

$$\mathcal{H}:\ \frac{b^2 \bar{x}^2}{a^2 b^2} - \frac{a^2 \bar{y}^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$$

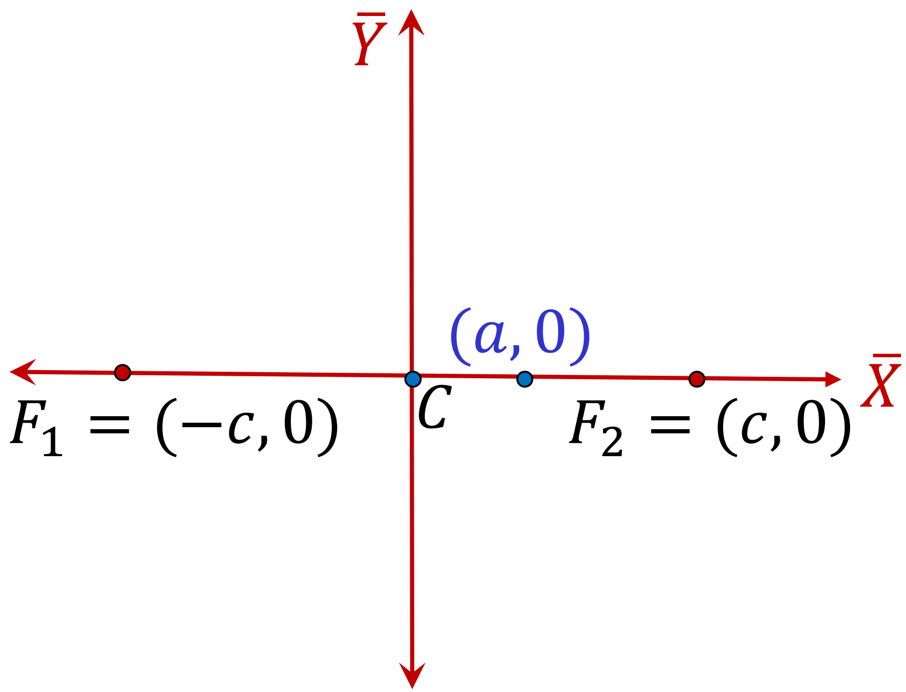
Simplificando

$$\mathcal{H}:\ \frac{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}} - \frac{\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{1} \text{ onde } \ c^2 = a^2 + b^2$$

que é chamada de **equação canônica da hipérbole**.

Hipérbole

No desenho:



Como $a <$ c, vejamos o ponto $(a, 0)$.

Observar que:

$$d\big((a,0),(c,0)\big) = c - a$$

e

$$d\big((a,0),(-c,0)\big) = a + c$$

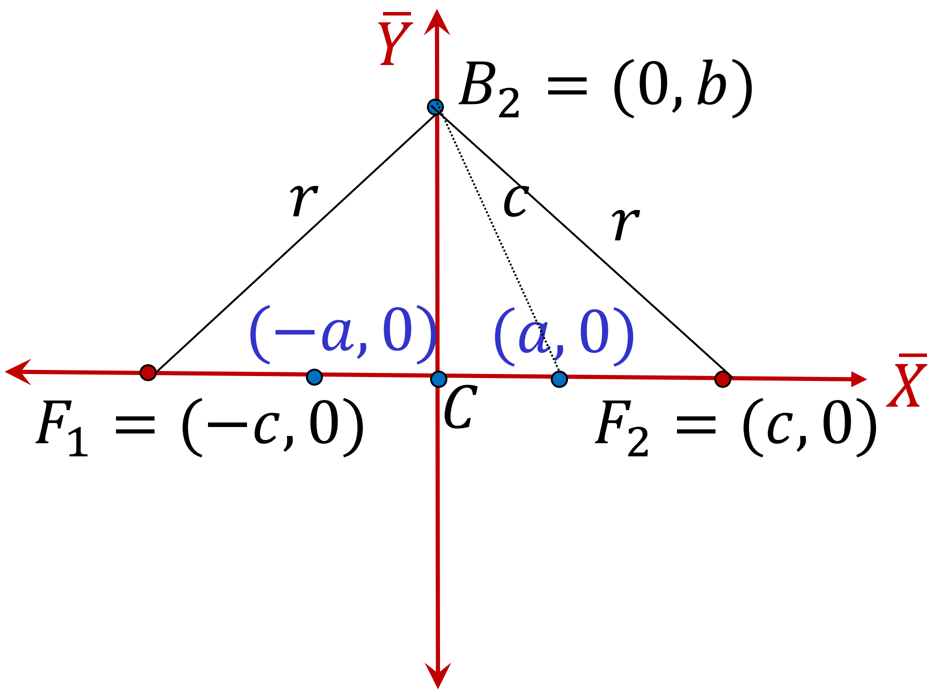
então:

$$\left|d\big((a,0),(-c,0)\big) - d\big((a,0),(c,0)\big)\right| = (a+c) - (c-a)$$

$$\left|d\big((a,0),(-c,0)\big) - d\big((a,0),(c,0)\big)\right| = 2a$$

Então $V_2 = (a, 0) \in \mathcal{H}$.

Hipérbole



O mesmo vai acontecer com o ponto $(-a, 0)$.

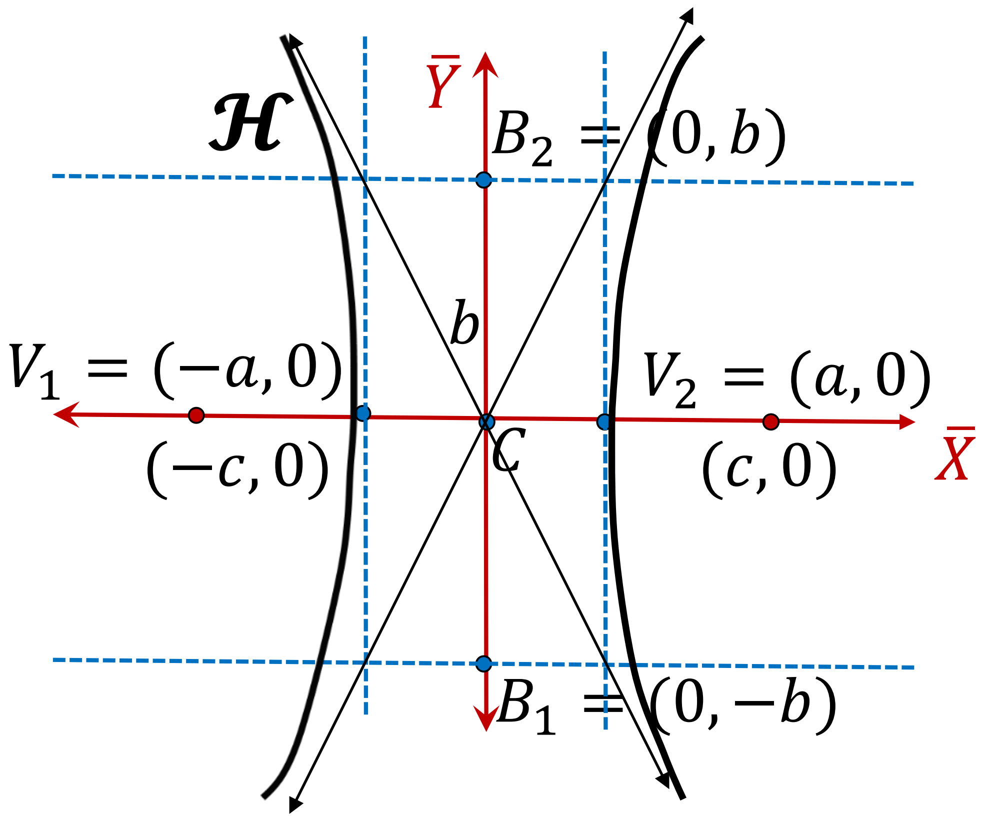
Denotamos por

$$V_1 = (-a, 0) \in \mathcal{H}$$

Temos $V_1, V_2 \in \mathcal{H}$

Observar: Agora não dá para obter pontos da hipérbole no eixo $\bar{Y}$. Mas podemos desenhar os pontos $B_2 = (0, b)$ e $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 \notin \mathcal{H}$

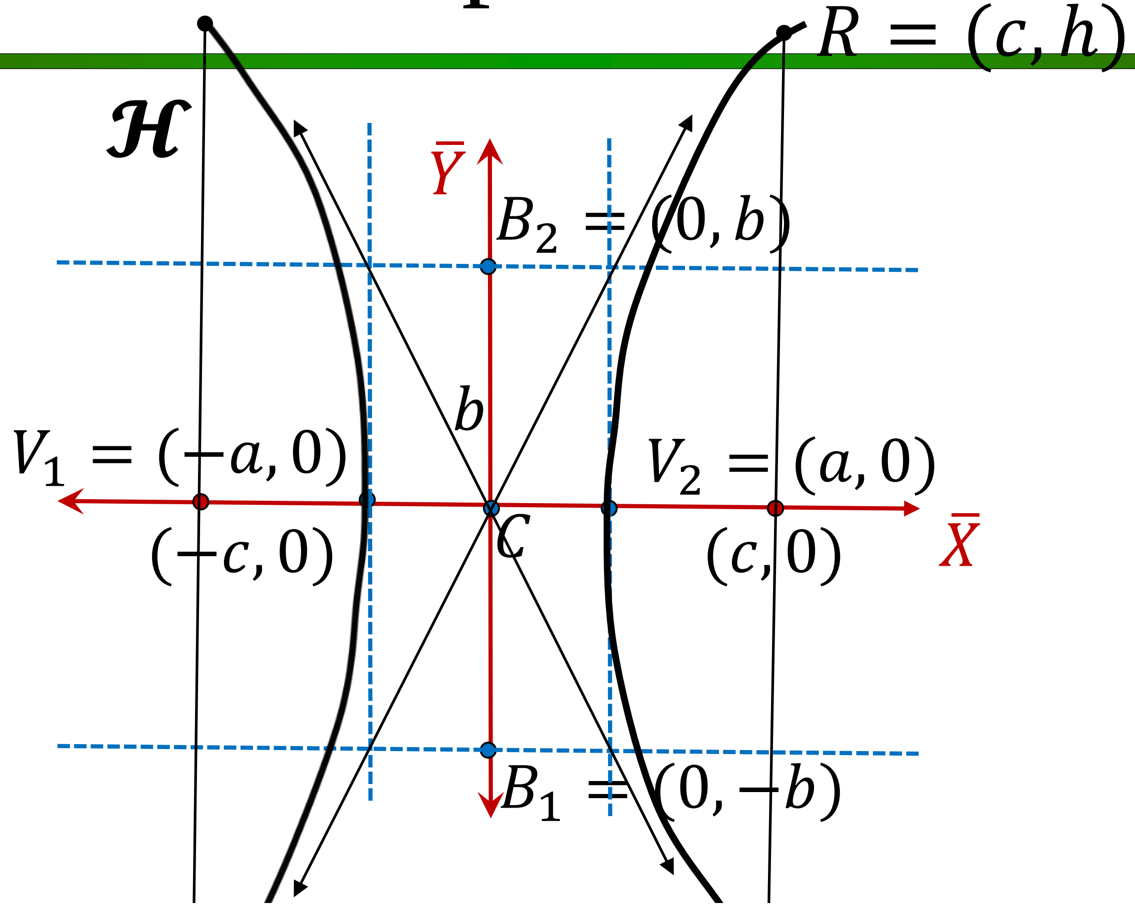
Hipérbole



Portanto, nos eixos $\bar{X}\bar{Y}$, a hipérbole tem a equação:

$$\mathcal{H}: \ \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \qquad \text{onde } c^2 = a^2 + b^2$$

Hipérbole



O lado reto mede:

$$|L| = \frac{2b^2}{a}$$

Em $\bar{X}\bar{Y}$, também é importante o lado reto, segmento que passa pelo foco ortogonal ao eixo focal.

$$R \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -\frac{h^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow h = \frac{b^2}{a}$$

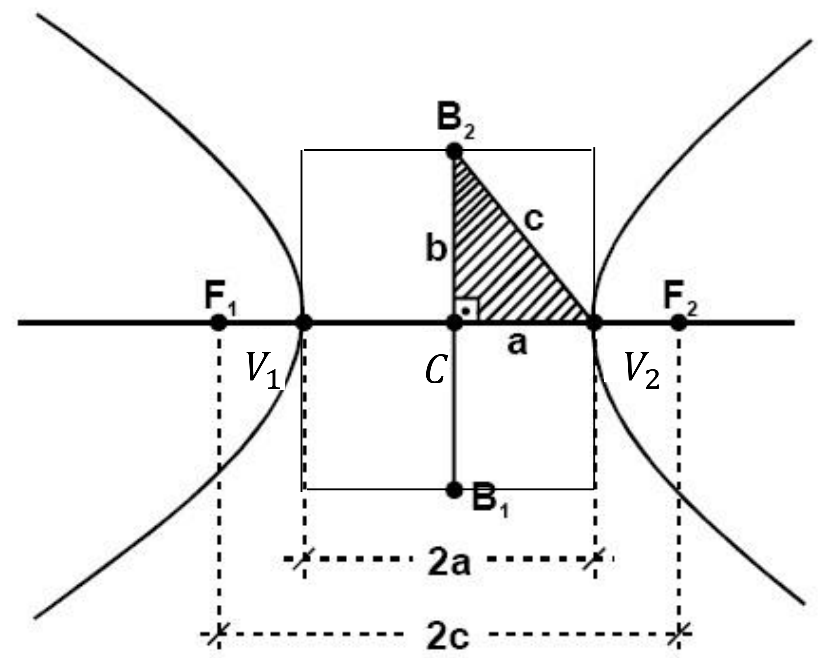
Elementos da hipérbole

C: centro da Hipérbole; é o ponto médio do segmento $\boldsymbol{F_1F_2}$.

$\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_2}$***:*** *v*értices da Hipérbole.

Eixo real ou transversal: é o segmento $\boldsymbol{V_1V_2}$ e cujo comprimento é *2a*.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento $\boldsymbol{B_1B_2}$ e cujo comprimento é *2b*.



Do triângulo B_2OV_2, hachurado na figura, obtemos a **relação notável:**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Hipérbole : excentricidade

Existe uma relação importante das cônicas, é a **excentricidade**: é o quociente entre as constantes

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

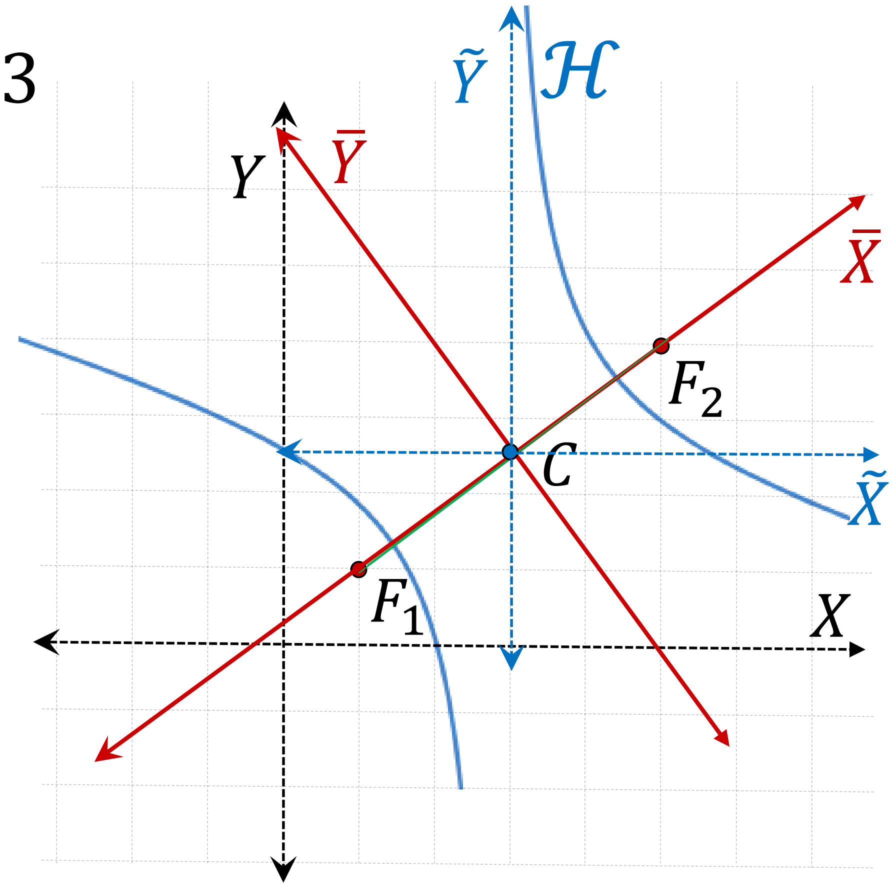
Para a hipérbole:

como $c > a > 0$, temos que

$$\varepsilon > 1.$$

Hipérbole : Equação do exemplo

$F_1 = (1,1)$, $F_2 = (5,4)$, $2a = 3$



Em $\bar{X}\bar{Y}$: $\mathcal{H}$: $\dfrac{\bar{x}^2}{a^2} - \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$

$$b^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$$

então $\mathcal{H}$: $\dfrac{4\bar{x}^2}{9} - \dfrac{\bar{y}^2}{4} = 1$

$$\mathcal{H}:\ 16\bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 = 36$$

Em $\tilde{X}\tilde{Y}$, pela rotação:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{5}(4\tilde{x} + 3\tilde{y}) \\ \bar{y} = \frac{1}{5}(-3\tilde{x} + 4\tilde{y}) \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathcal{H}:\ 175\tilde{x}^2 + 600\tilde{x}\tilde{y} = 900$$

Hipérbole : Equação do exemplo

Dados do exemplo: $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (5,4)$, $2a = 3$

Em $\bar{X}\bar{Y}$: $\mathcal{H}$: $\frac{\bar{\boldsymbol{x}}^2}{\boldsymbol{a}^2} - \frac{\bar{\boldsymbol{y}}^2}{\boldsymbol{b}^2} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{\mathbf{4}\bar{\boldsymbol{x}}^2}{\mathbf{9}} - \frac{\bar{\boldsymbol{y}}^2}{\mathbf{4}} = \mathbf{1}$

Pela rotação utilizada

Em $\tilde{X}\tilde{Y}$: $\mathcal{H}$: $\mathbf{7}\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{24}\widetilde{\boldsymbol{x}}\widetilde{\boldsymbol{y}} = \mathbf{36}$

E utilizando a translação:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 3 \\ \tilde{y} = y - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Em XY:

$$\mathcal{H}: \ \mathbf{7}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{24}\boldsymbol{xy} - \mathbf{102}\boldsymbol{x} - \mathbf{72}\boldsymbol{y} + \mathbf{207} = \mathbf{0}$$

Hipérbole

Muitas vezes o que é fornecido é a equação:

$$7x^2 + 24xy - 102x - 72y + 207 = 0$$

Nesse caso, para identificar a hipérbole que temos visto antes, precisamos:

- diagonalizar - identifica a rotação necessária
- completar quadrados - identifica a translação necessária.

Sempre será possível chegar na equação

$$\frac{4\bar{x}^2}{9} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Hipérbole

Faça os cálculos necessários. Por exemplo, seja

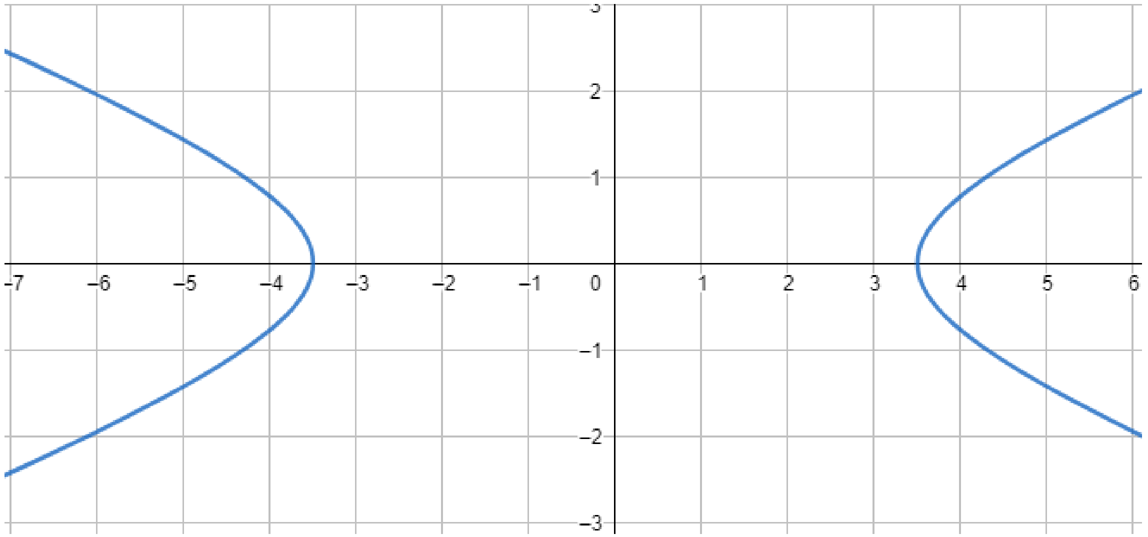
$$4x^2 = 49 + 25y^2$$

então

$$4x^2 - 25y^2 = 49$$

$$\frac{4x^2}{49} - \frac{25y^2}{49} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{49}{4}} - \frac{y^2}{\frac{49}{25}} = 1$$

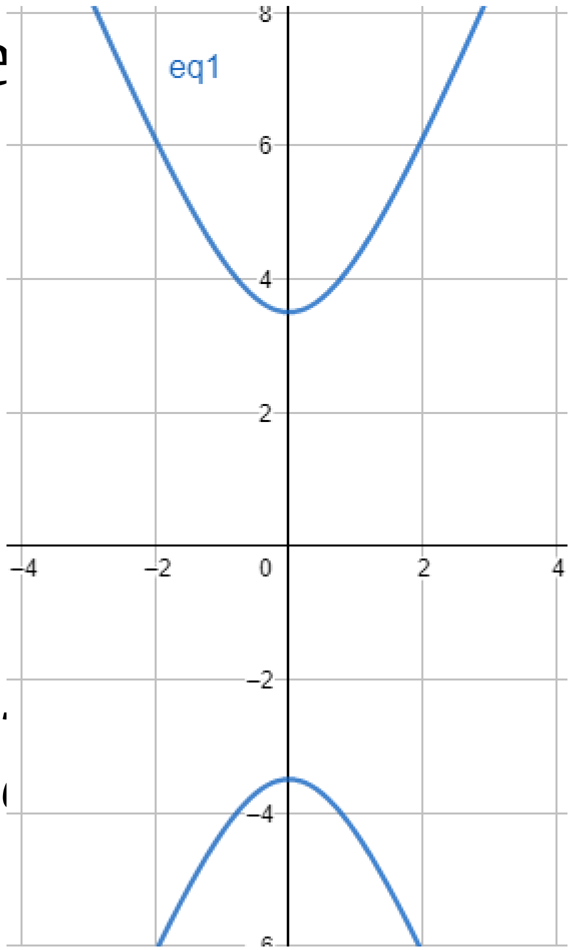


Assim $a^2 = \frac{49}{4}$ e $b^2 = \frac{49}{25}$ então $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{5}$ e $c = \frac{7\sqrt{29}}{10}$

Hipérbole

Faça os cálculos necessários. Por exe

$$4y^2 = 49 + 25x^2$$



então

$$4y^2 - 25x^2 = 49$$

$$\frac{4y^2}{49} - \frac{25x^2}{49} = 1$$

$$\frac{y^2}{\frac{49}{4}} - \frac{x^2}{\frac{49}{25}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \cos\alpha \\ \bar{y} = -\sin \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Assim $a^2 = \frac{49}{4}$ e $b^2 = \frac{49}{25}$ então $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{5}$ e $c = \frac{7\sqrt{29}}{10}$

Hipérbole

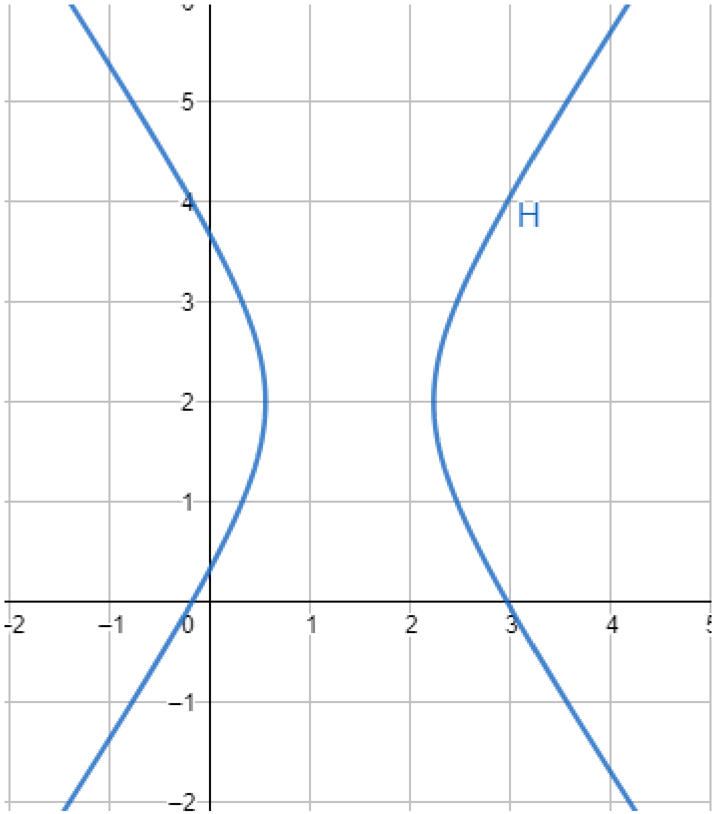
Quando não temos termos mistos, basta completar quadrados: $9x^2 - 4y^2 - 25x + 16y = 5$

Então procure o centro ao completar quadrados.

Determine a, b e c se necessário

Determine os vértices, focos

Determine os lados retos e seus comprimentos e os pontos extremos nesses lados retos.



Aplicações Hipérbole

Mecânica Celeste: dependendo de sua velocidade, um cometa tem uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica (foco coincide com o Sol).

Em Mecânica dos Fluidos e em alguns problemas referentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipérboles homofocais (de mesmo foco).

O sistema LORAN (long range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Daq Terraz, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina *2a (constante)* e assim obtêm a característica da hipérbole na qual está P.

Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: O sistema RADUX (de baixíssima freqüência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

Exercícios

1. Os vértices de uma hipérbole são $(0, \pm 3)$ e os focos são $(0, \pm 5)$. Desenhe e determine os elementos da hipérbole.
2. Uma hipérbole tem vértices em $(\pm 3,0)$ e as equações das assíntotas são $y = \pm x$. Desenhe e determine sua equação.
3. Desenhe e determine os elementos da hipérbole
$$16x^2 - 9y^2 + 96x + 72y + 144 = 0$$