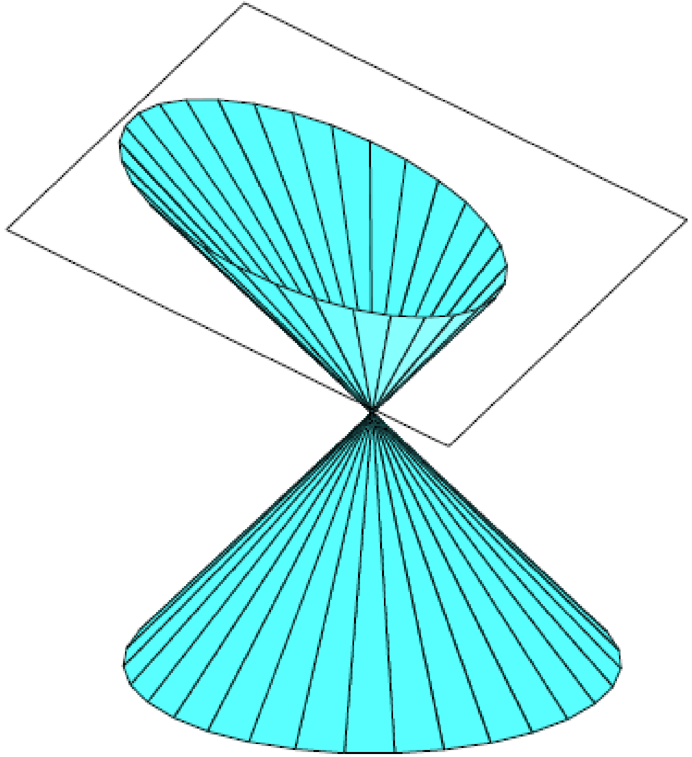
Elipse

Definição:
A elipse é a curva que se obtém cortando um cone com um plano que não passa pelo vértice, também não é paralelo a **reta geratriz** do cone e que corta apenas uma das folhas da superfície.



Elipse: Lugar geométrico

Definição: Uma **elipse** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano, tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante.

Observar: Como são dois pontos fixos (dados) calcula-se a distância entre eles:

$$dist(F_1, F_2) = d(F_1, F_2) = 2c.$$

O valor da soma que deve ser constante fazemos $2a$.

Qual a relação entre a e c ??

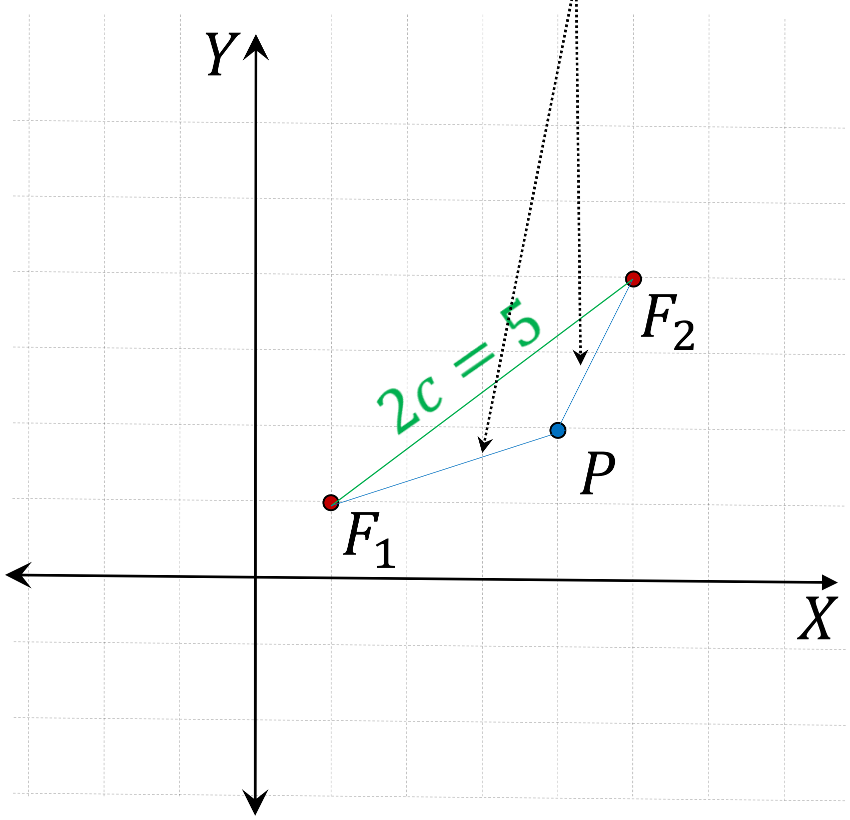
Exemplo Elipse

Sejam $F_1 = (1,1)$ e $F_2 = (5,4)$

Então:

$d(F_1, F_2) = 5 = 2c$

A soma dessas distâncias é maior do que 5.



Supondo que foi dado

$2a = 4$

observar que não existem pontos para essa elipse.

Portanto: $2a > 2c$, isto é $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{c}$.

Elipse: Lugar geométrico

Definição: Uma elipse é o conjunto dos pontos P que satisfazem: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$.
Onde: $a>c$ e $d(F_1,F_2)=2c$.

$$\mathcal{E}=\{P=(x,y)\ /\ d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}$$

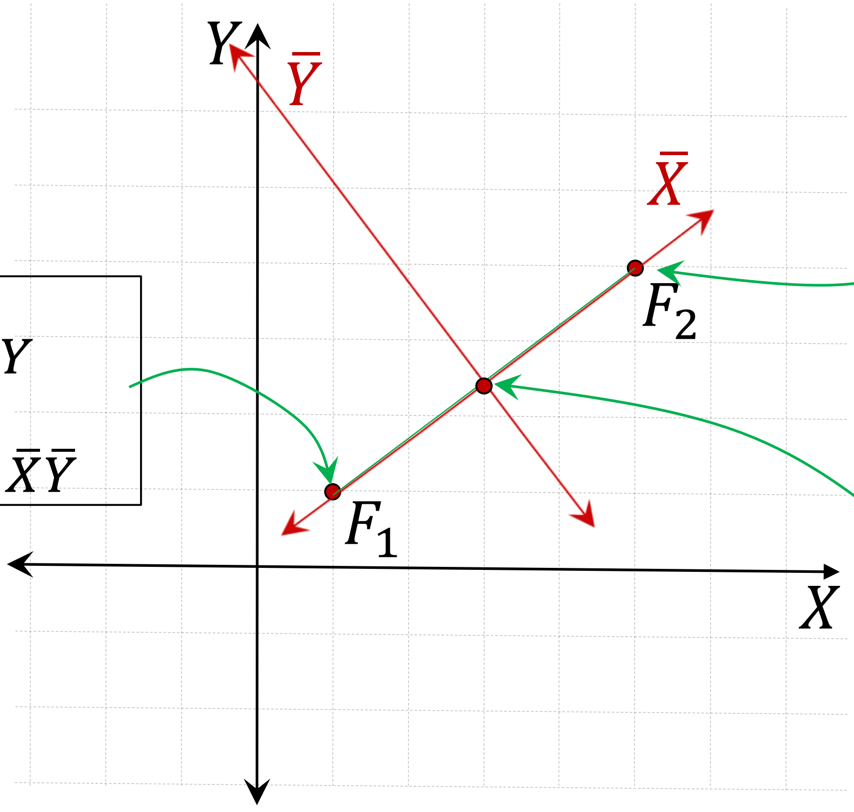
$$\mathcal{E}:\ d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

Observar: Uma elipse se define com três dados

- Dois focos: F_1 e F_2
- O valor constante $2a$, com $a>c$.

Elipse

Dados os dois focos e a distância $2c$, vamos utilizar novos eixos para simplificar a representação:



$F_1 = (1,1)_{XY}$
$F_1 = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)_{\bar{X}\bar{Y}}$

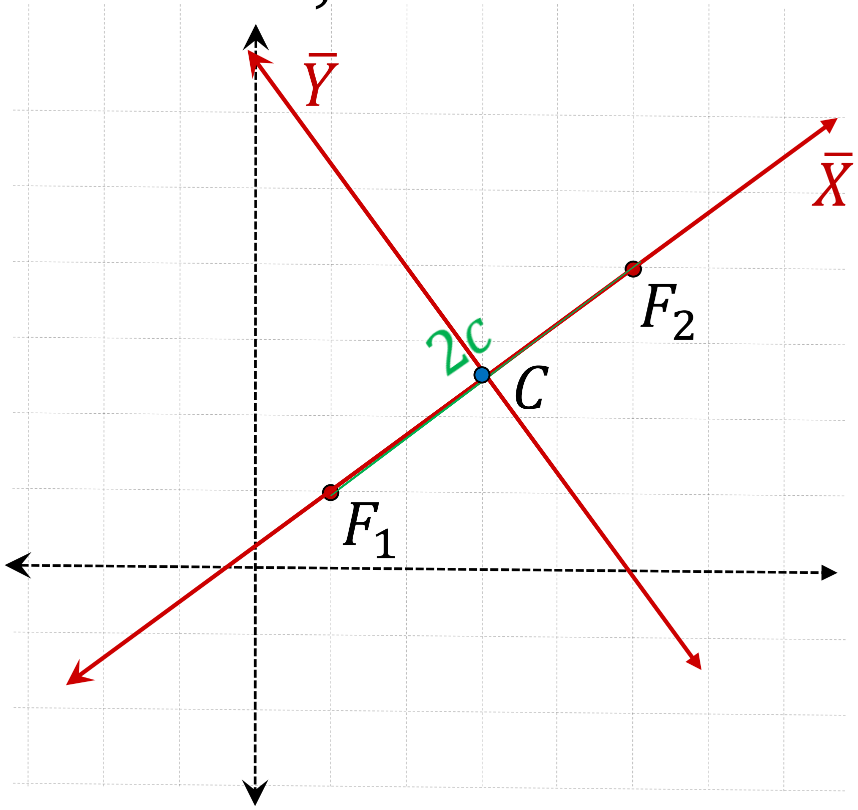
$F_2 = (5,4)_{XY}$
$F_2 = \left(\frac{5}{2}, 0\right)_{\bar{X}\bar{Y}}$

$C = \left(3, \frac{5}{2}\right)_{XY}$
$C = (0,0)_{\bar{X}\bar{Y}}$
$C = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$

Elipse

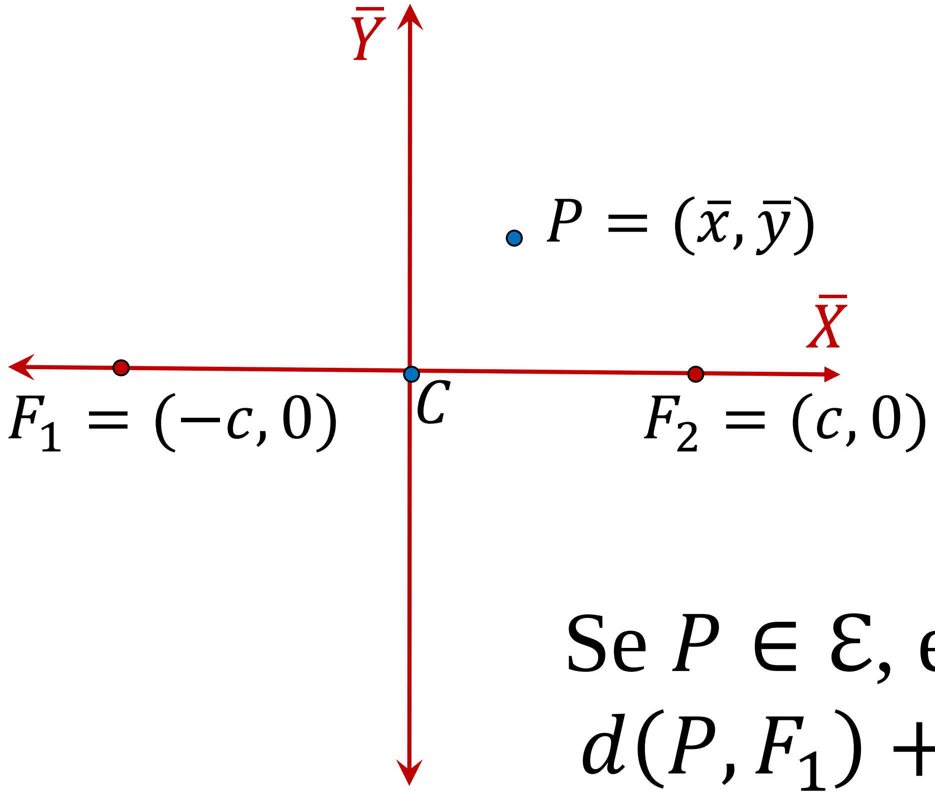
Então, passando pelos dois pontos foi construido um novo eixo $\bar{X}$ (eixo focal), também uma nova origem sendo o ponto médio entre os focos, e construindo o eixo $\bar{Y}$ como a reta ortogonal a $\bar{X}$.

$$F_1 = (-c, 0)$$
$$F_2 = (c, 0)$$
$$C = (0,0)$$



Elipse

Agora, trabalhando nos novos eixos $\bar{X}\bar{Y}$, temos



Supondo que o ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ pertence a elipse $\mathcal{E}$, então deve ser válida a equação dada para um valor dado $2a$:

Se $P \in \mathcal{E}$, então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Elipse: Equação canônica

$$\mathcal{E}: d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\mathcal{E}: d\big((\bar{x},\bar{y}),(-c,0)\big) + d\big((\bar{x},\bar{y}),(c,0)\big) = 2a$$

$$\mathcal{E}: \sqrt{(\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2} + \sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2} = 2a$$

$$\mathcal{E}: \sqrt{(\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2} = 2a - \sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$\mathcal{E}: (\bar{x}+c)^2+\bar{y}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2} + (\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2$$

$$\mathcal{E}: (\bar{x}+c)^2 - (\bar{x}-c)^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

$$\mathcal{E}: 4\bar{x}c - 4a^2 = -4a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

$$\mathcal{E}: \bar{x}c - a^2 = -a\sqrt{(\bar{x}-c)^2+\bar{y}^2}$$

Elipse: Equação canônica

Elevando ao quadrado novamente em

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}c - a^2 = -a\sqrt{(\bar{x}-c)^2 + \bar{y}^2}$$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2c^2 - 2\bar{x}ca^2 + a^4 = a^2\left((\bar{x}-c)^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2c^2 - 2\bar{x}ca^2 + a^4 = a^2(\bar{x}^2 - 2\bar{x}c + c^2 + \bar{y}^2)$$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2c^2 + a^4 = a^2\bar{x}^2 + a^2c^2 + a^2\bar{y}^2$$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2c^2 - a^2\bar{y}^2 - a^2\bar{x}^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2(c^2 - a^2) - a^2\bar{y}^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Observar o sinal do fator com a diferença, então

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2(a^2 - c^2) + a^2\bar{y}^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $(a^2 - c^2) > 0$, fazemos: $b^2 = a^2 - c^2$

Elipse: Equação canônica

Substituindo: $b^2 = a^2 - c^2$

$$\mathcal{E}:\ \bar{x}^2 b^2 + a^2 \bar{y}^2 = a^2 b^2$$

que é válido para qualquer ponto da elipse.

Mais ainda, dividindo entre $a^2 b^2$

$$\mathcal{E}:\ \frac{b^2 \bar{x}^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 \bar{y}^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$$

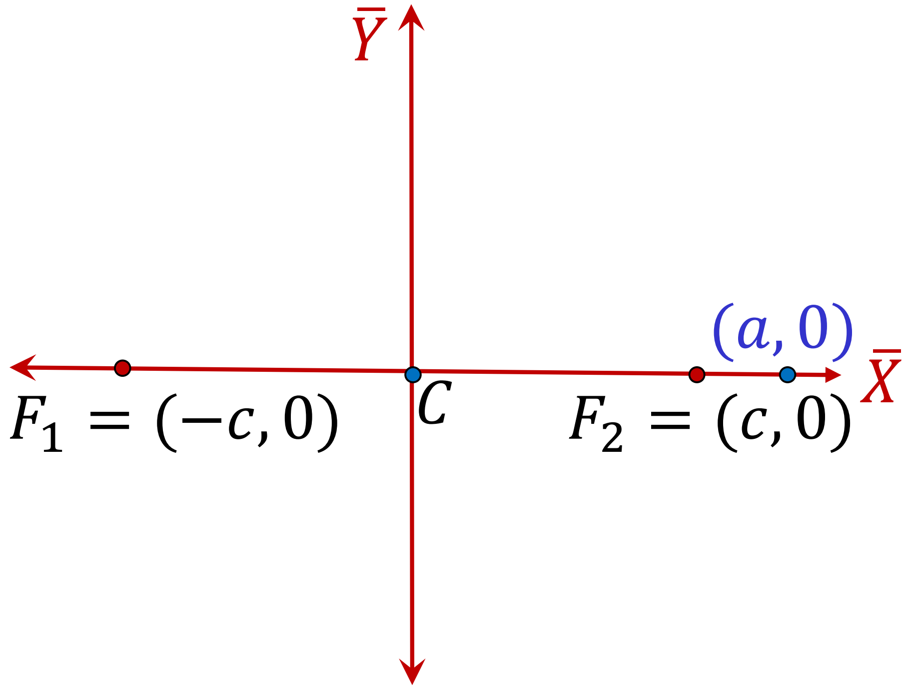
Simplificando

$$\mathcal{E}:\ \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \text{ onde } a^2 = b^2 + c^2$$

que é chamada de **equação canônica de uma elipse**.

Elipse

No desenho:



Como $a >$ c, vejamos o ponto $(a, 0)$.

Observar que:

$$d\big((a,0),(c,0)\big) = a - c$$

e

$$d\big((a,0),(-c,0)\big) = a + c$$

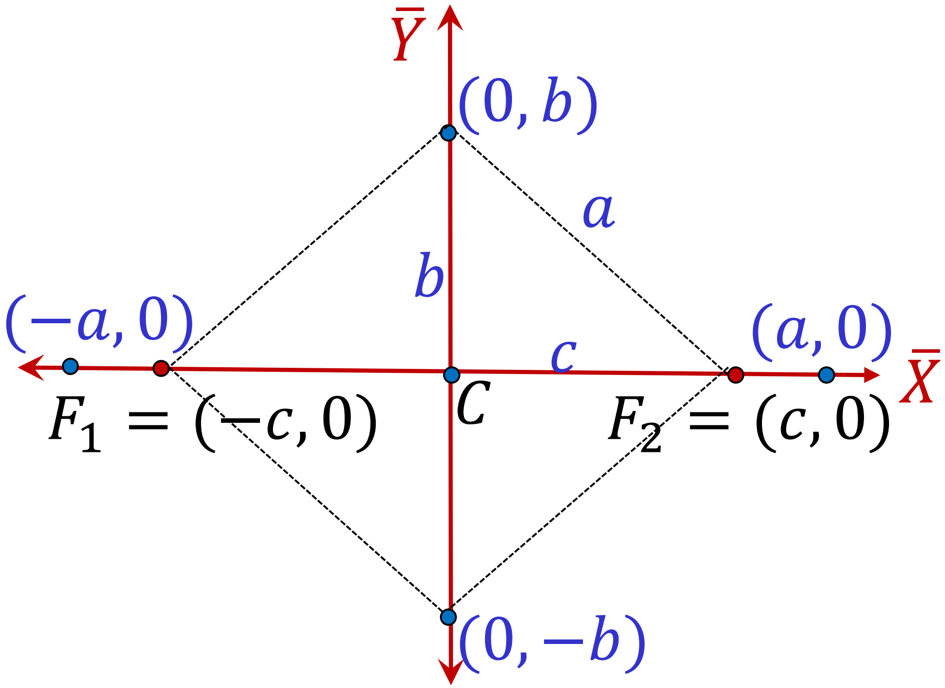
então:

$$d\big((a,0),(-c,0)\big) + d\big((a,0),(c,0)\big) = (a + c) + (a - c)$$

$$d\big((a,0),F_1\big) + d\big((a,0),F_2\big) = 2a$$

Então $V_2 = (a, 0) \in \mathcal{E}$.

Elipse



O mesmo vai acontecer com o ponto $(-a, 0)$.

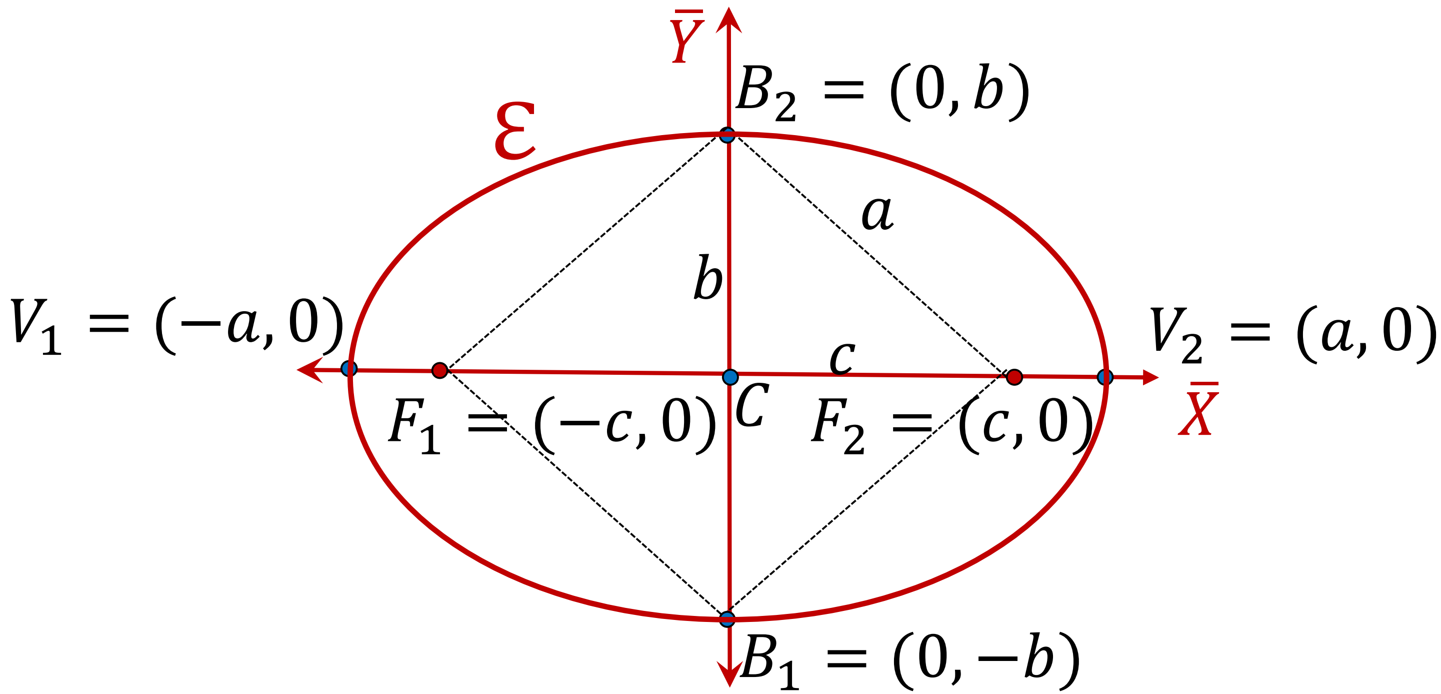
Denotamos por

$$V_1 = (-a, 0) \in \mathcal{E}$$

Observar: No eixo $\bar{Y}$ temos dois pontos da elipse. Denotamos por

$$B_2 = (0, b) \text{ e } B_1 = (0, -b)$$

Elipse

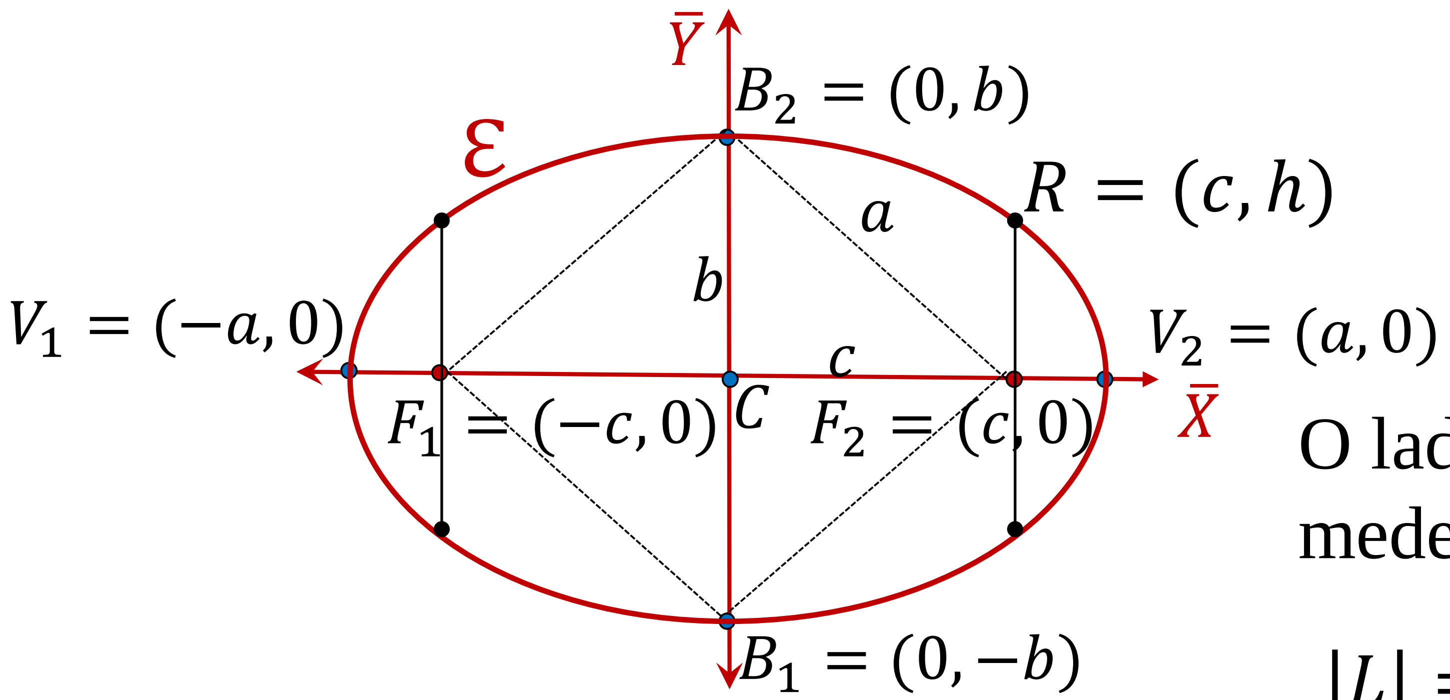


Portanto, nos eixos $\bar{X}\bar{Y}$, a elipse satisfaz a equação:

$$\text{Ɛ}: \ \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \qquad \text{onde } a^2 = b^2 + c^2$$

Fácil identificar os quatro pontos: V_1, V_2, B_1, B_2, todo a partir das medidas determinadas.

Elipse



O lado reto mede:

$$|L| = \frac{2b^2}{a}$$

Em $\bar{X}\bar{Y}$, também é importante o lado reto, segmento ortogonal ao eixo focal, mas passando por cada foco.

$$R \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{h^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow h = \frac{b^2}{a}$$

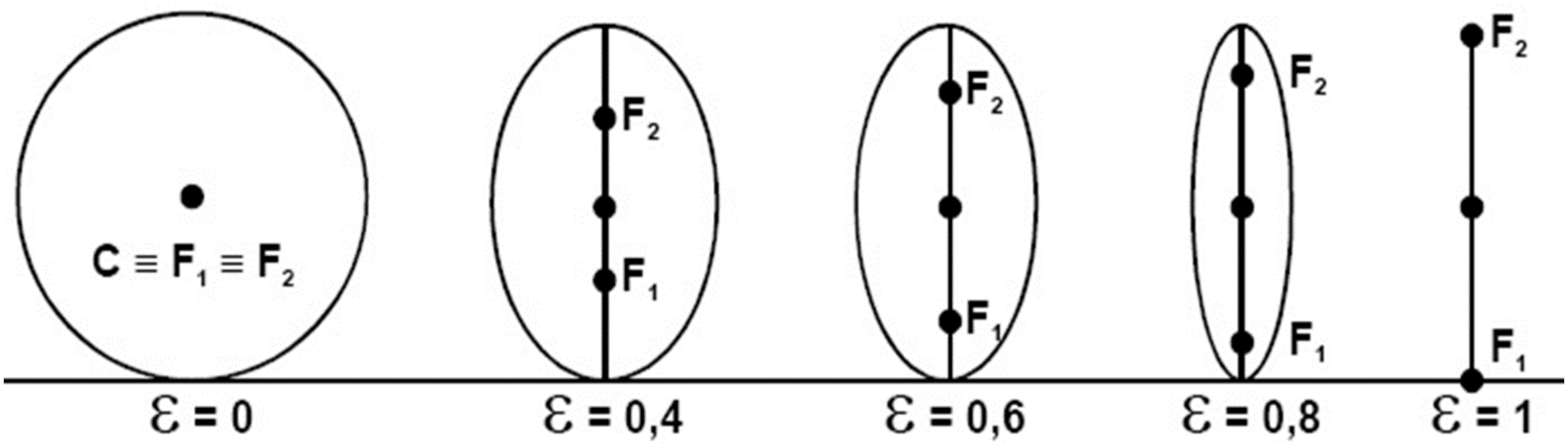
Elipse: excentricidade

Existe uma relação importante das cônicas, é a **excentricidade**: é o quociente entre as constantes

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Para a elipse: como $a > c > 0$, temos que

$$0 < \varepsilon < 1.$$



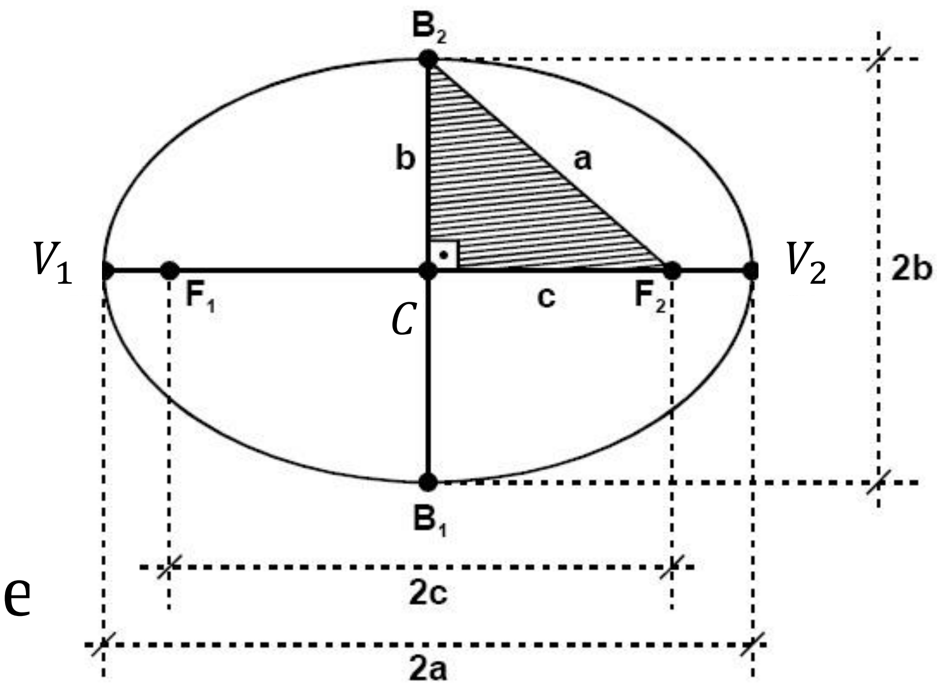
Elementos de uma elipse

$\boldsymbol{C}$**:** centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

$\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_2}$, $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$: vértices (elipse).

Eixo maior**:** é o segmento V_1V_2 e cujo comprimento é *2a*.

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é *2b*.



Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na figura, obtemos a relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$.

Elipse: Relacionando eixos

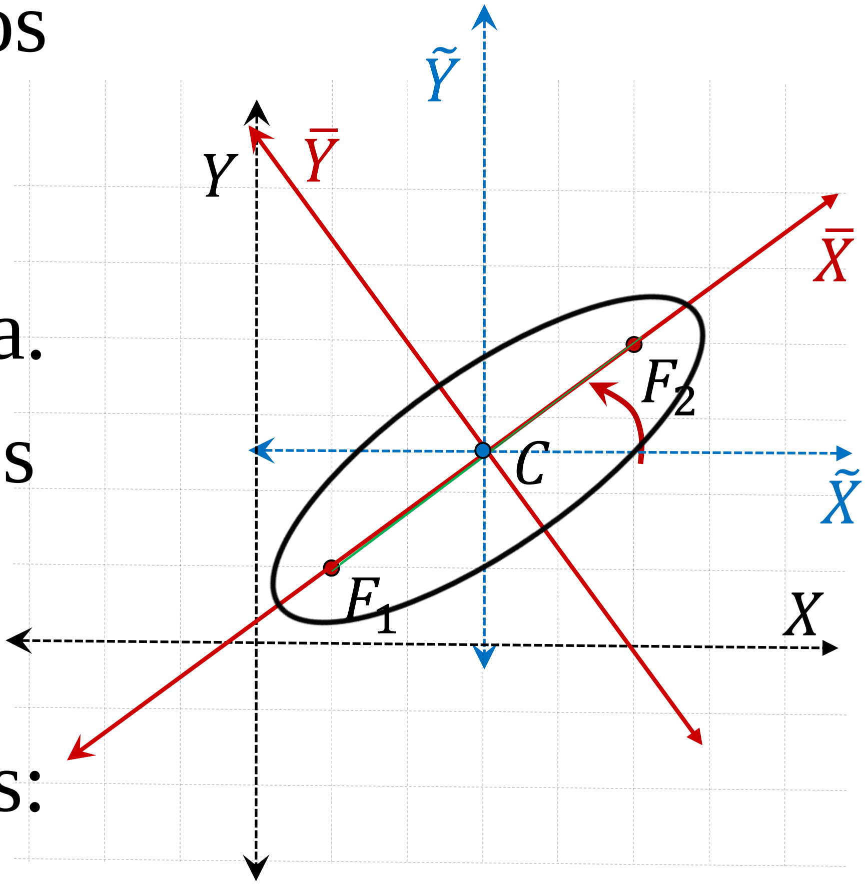
Observar que se construimos os eixos $\bar{X}\bar{Y}(adequados)$, para qualquer elipse a equação canônica é válida.

Mas se precisarmos usar nos eixos **originais**???

Podemos utilizar as mudanças de coordenadas:

Por translação: $XY \to \tilde{X}\tilde{Y}$

Por rotação: $\tilde{X}\tilde{Y} \to \bar{X}\bar{Y}$.

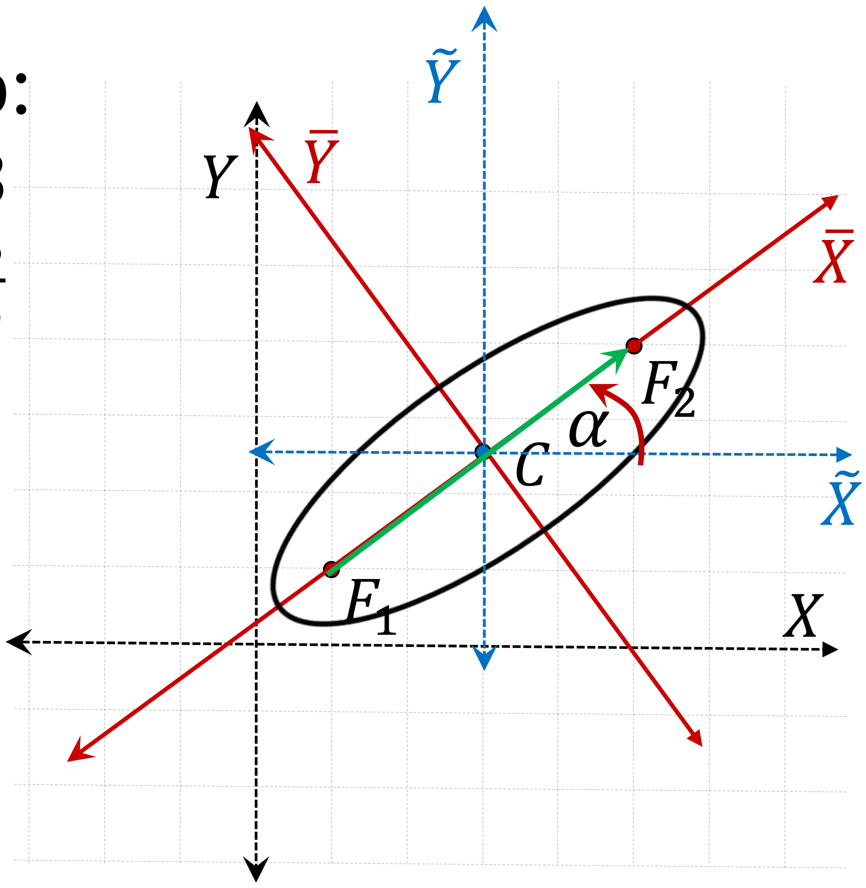


Elipse: Mudanças de coordenadas

No exemplo: Por translação:

De $XY \to \tilde{X}\tilde{Y} \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{x} = x - 3 \\ \tilde{y} = y - \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + 3 \\ y = \tilde{y} + \frac{5}{2} \end{cases}$$



Por rotação:

Vetor de direção do eixo focal $v = (4,3)$ ou

$$v_u = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right) = (\cos\alpha\,, \sin\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{4}{5}\tilde{x} + \frac{3}{5}\tilde{y} \\ \bar{y} = -\frac{3}{5}\tilde{x} + \frac{4}{5}\tilde{y} \end{cases}$$

Elipse: Equação do exemplo

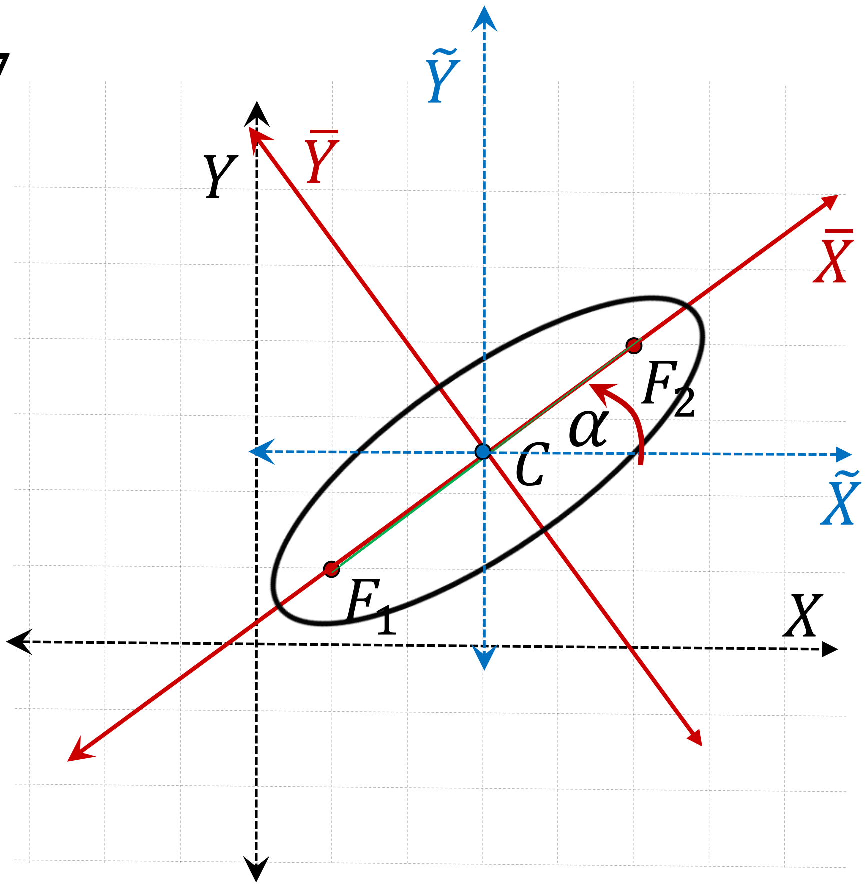
$F_1 = (1,1)$, $F_2 = (5,4)$, $2a = 7$

Em $\bar{X}\bar{Y}$: $\mathcal{E}$: $\dfrac{\bar{x}^2}{a^2} + \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$

$$b^2 = \frac{49}{4} - \frac{25}{4} = 6$$

então $\mathcal{E}$: $\dfrac{4\bar{x}^2}{49} + \dfrac{\bar{y}^2}{6} = 1$

$$\mathcal{E}: 24\bar{x}^2 + 49\bar{y}^2 = 294$$



Em $\tilde{X}\tilde{Y}$, pela rotação:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{5}(4\tilde{x} + 3\tilde{y}) \\ \bar{y} = \frac{1}{5}(-3\tilde{x} + 4\tilde{y}) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{E}:\ 33\tilde{x}^2 + 40\tilde{y}^2 - 24\tilde{x}\tilde{y} = 294$$

Elipse: Equação do exemplo

Dados do exemplo: $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (5,4)$, $2a = 7$

Em $\bar{X}\bar{Y}$: Ɛ: $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4\bar{x}^2}{49} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1$

Pela rotação utilizada

Em $\tilde{X}\tilde{Y}$: Ɛ: $\mathbf{33\tilde{x}^2 + 40\tilde{y}^2 - 24\tilde{x}\tilde{y} = 294}$

E utilizando a translação:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 3 \\ \tilde{y} = y - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Em XY:

Ɛ: $\mathbf{33x^2 + 40y^2 - 24xy - 138x - 128y + 73 = 0}$

Elipse

Muitas vezes o que é fornecido é a equação:

$$33x^2 + 40y^2 - 24xy - 138x - 128y + 73 = 0$$

Nesse caso, para identificar a elipse que temos visto antes, precisamos:

- diagonalizar - identifica a rotação necessária
- completar quadrados - identifica a translação necessária.

Sempre será possível chegar na equação

$$\frac{4\bar{x}^2}{49} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1$$

Elipse

Faça os cálculos necessários. Por exemplo, seja

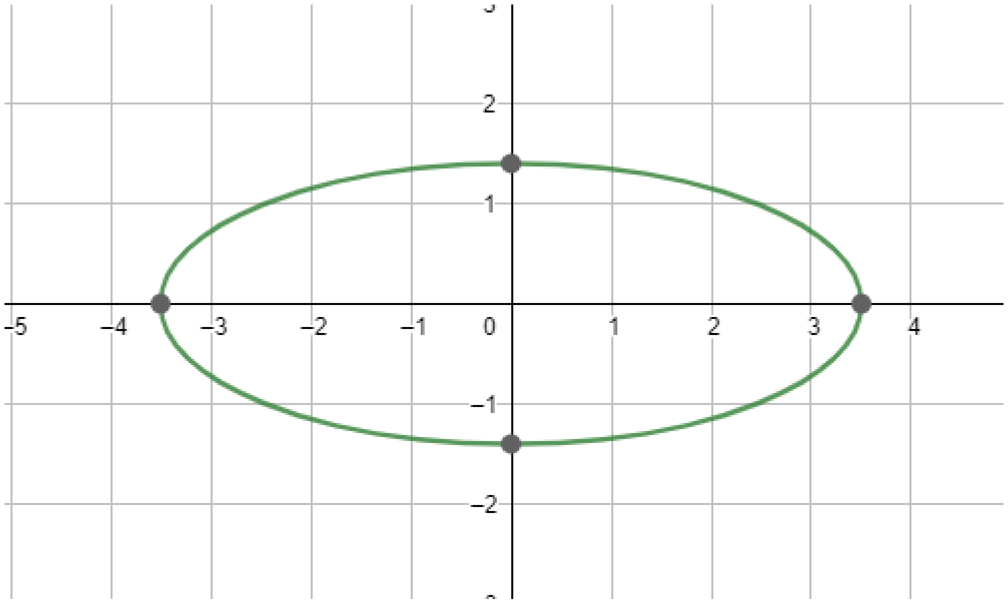
$$4x^2 = 49 - 25y^2$$

então

$$4x^2 + 25y^2 = 49$$

$$\frac{4x^2}{49} + \frac{25y^2}{49} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{49}{4}} + \frac{y^2}{\frac{49}{25}} = 1$$

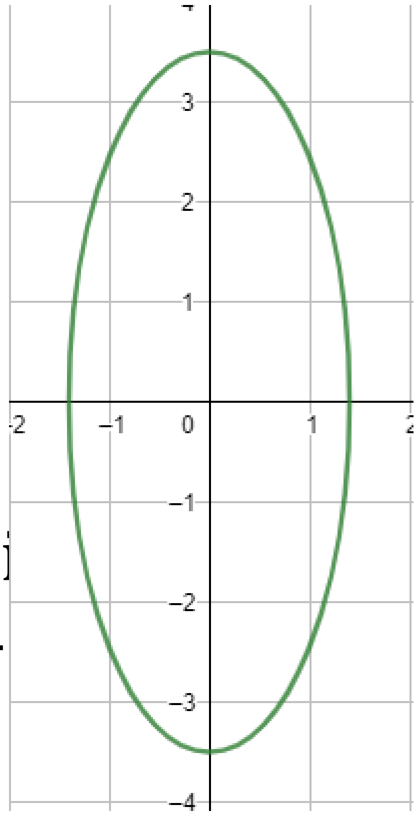


Assim $a^2 = \frac{49}{4}$ e $b^2 = \frac{49}{25}$ então $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{5}$ e $c = \frac{7\sqrt{21}}{10}$

Elipse

Faça os cálculos necessários, por exemplo, seja

$$25x^2 = 49 - 4y^2$$



então

$$25x^2 + 4y^2 = 49$$

$$\frac{25x^2}{49} + \frac{4y^2}{49} = 1$$

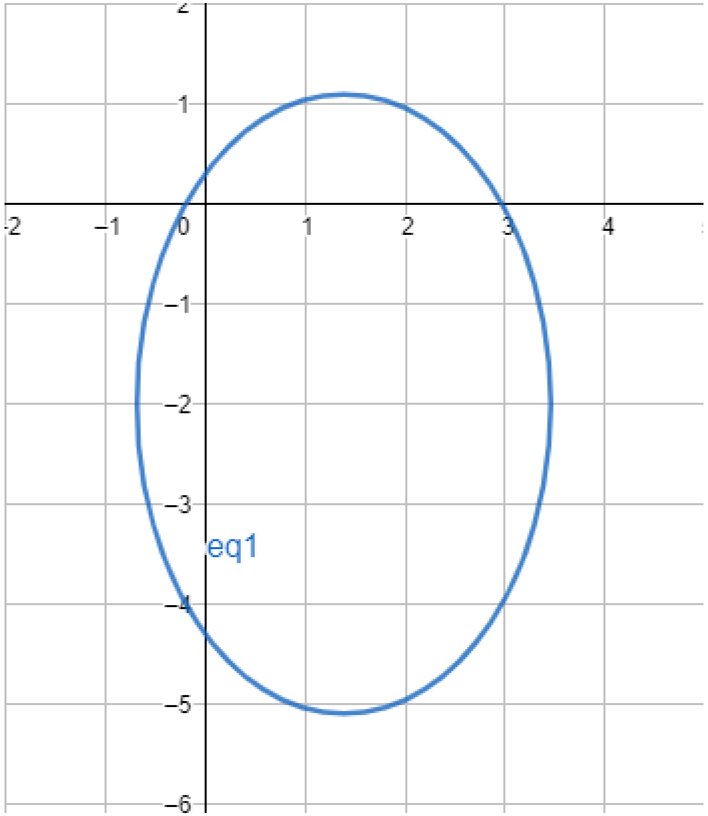
$$\frac{x^2}{\frac{49}{25}} + \frac{y^2}{\frac{49}{4}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \cos\alpha\, x + \mathrm{si} \\ \bar{y} = -\sin\alpha\, x + \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Assim $a^2 = \frac{49}{4}$ e $b^2 = \frac{49}{25}$ então $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{5}$ e $c = \frac{7\sqrt{21}}{10}$

Elipse

Quando não temos termos mistos, basta completar quadrados: $9x^2 + 4y^2 - 25x + 16y = 5$



Então procure o centro ao completar quadrados.

Determine a, b e c se necessário

Determine os vértices, focos

Determine os lados retos e seus comprimentos e os pontos extremos nesses lados retos.

Aplicações Elipse

1. A trajetória ao redor do Sol não é circular e sim elíptica (não considerando o deslocamento do sistema solar). Foi Kepler (1571-1630) quem desenvolveu esta teoria. No caso da Terra os semi-eixos são:

   a = 153.493.000km e b = 153.454.000 km.

   Calcule a excentricidade da órbita da Terra: (quase uma circunferência)

   O eixo maior apresenta dois pontos: o periélio (janeiro) e o afélio (julho), que correspondem às distâncias mínimas e máxima da Terra ao Sol, respectivamente.

   Ademais, no globo terrestre (geóide) o equador tem aproximadamente a forma de uma circunferência e o meridiano de uma elipse.

2. Arcos em forma de semi-elipse são muito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos)

Aplicações Elipse

3. Em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia.
4. Conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.
5. Na Mecânica são usadas engrenagens elípticas.
6. Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.
7. O mais portentoso monumento arquitetônico da Roma antiga foi o Coliseu. A planta baixa possuía a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188 m e a menor 156 m. Começou a ser construído em 72 por Vespasiano e foi concluído em 82 por Tito. A cobertura móvel, à altura de 85m, era sustentada por um sistema inédito de tirantes, adicionada em caso de chuva para proteger seus 40.000 espectadores. Diante da tribuna imperial, os garbosos gladiadores romanos desfilavam antes da luta e proferiam em alto e bom som: “Ave, César, morituri te salutant” (Salve, César, os que vão morrer te saúdam).

Exercícios de elipse

1. Desenhe o lugar geométrico que satisfaz
$$150x - 128y + 25x^2 + 16y^2 = 1119$$
2. Determine a equação da elipse com um foco em (2,3), o vértice correspondente é (2,5) e o centro está sobre o eixo X.
3. Determine a elipse com centro em (-2,3) e as distâncias de um foco aos vértices são 1 e 9.

   O eixo maior é paralelo ao eixo X.