Equações canônicas

Parábola $$x^2 = 4py$$

Elipse $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ onde: $a^2 = c^2 + b^2$

Hipérbole $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ onde: $c^2 = a^2 + b^2$

Assíntotas:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Caracterização das cônicas

Definição: Todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

Proposição 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**foco**) não pertencente a $\mathcal{L}$. O conjunto dos pontos do plano P = (x, y) tais que* $\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, \mathcal{L})$

em que $\varepsilon > 0$ é *uma constante fixa, é uma cônica.*

(a) Se $\varepsilon = 1$, *então a cônica é uma parábola.*

(b) Se $0 < \varepsilon < 1$, *então a cônica é uma elipse.*

(c) Se $\varepsilon > 1$, *então a cônica é uma hipérbole.*

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma: $\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, \mathcal{L})$.

Exercício

Identifique, escreva na forma canônica, e determine o centro da cônica: $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) = -5$

Autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 10$.

Autovetores $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.

Complementando quadrados chegamos em $\boldsymbol{\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 81}$

Utilizando a mudança total $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

Para calcular o centro $\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X$ resolvendo $C = \frac{\sqrt{5}}{5}(13,14)$.