Aplicações das matrizes: Cadeias de Markov

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

Abril de 2020

Cadeias de Markov

Para casos, quando um sistema físico ou matemático sofre mudanças tais que a cada momento o sistema pode ocupar apenas um dentre um número finito de estados.

Exemplo:

1. Estado chuvoso ou seco de uma região.
2. Compra de um carro de uma marca.
3. O estoque de uma empresa: vazio ou não.
4. Aluno estudando ou não.

Cadeias de Markov

Vamos supor que podemos observar o sistema em períodos fixos de tempo. Exemplo de período:

1. A cada dia
2. Por hora
3. Uma geração
4. Uma década

A ideia é observar o sistema por muitos períodos para poder prever probabilisticamente o estado no próximo período de observação.

Cadeias de Markov

Vejamos o caso de um sistema que muda em período diário:

Tempo chuvoso ou seco no campus da USP

Por dia.

Observar que podemos registrar o tempo no nosso campus da USP, a cada dia, e podemos chegar a determinar uma probabilidade de o tempo ser chuvoso ou seco ao dia seguinte.

Cadeias de Markov

Se faz o registro durante 26 dias:

C → Tempo chuvoso

S → Tempo seco

Hoje

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Responda:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Cadeias de Markov

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Hoje

Responda:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Isto é: Se um dia foi chuvoso como foi o seguinte?

Observar: Estamos falando de quantas mudanças partindo de C (chuvoso) aconteceram?

Não quantos dias chuvosos tivemos!!!!

Cadeias de Markov

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Hoje

Responda:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Isto é: Se um dia foi chuvoso como foi o seguinte?

Observar: Aconteceram 10 mudanças, mas foram 11 dias chuvosos.

Cadeias de Markov

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Hoje

Responda:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Isto é: Se um dia foi chuvoso como foi o seguinte?

Mudanças: C C : Aconteceram 5 vezes.

C S : Aconteceram 5 vezes.

Cadeias de Markov

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Hoje

Pergunta: Se um dia foi chuvoso como foi o seguinte?

A pergunta foca na mudança C S.

Respondendo:

Teve 10 mudanças partindo de chuvoso, e 5 de essas mudanças foram → C S.

Probabilidade de chuvoso para seco é $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Cadeias de Markov

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Hoje

Pergunta: Se um dia foi chuvoso como foi o seguinte?

A pergunta foca na mudança C S.

Respondendo:

Probabilidade de chuvoso para seco é $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Observar que podemos concluir que as mudanças de chuvoso para chuvoso também é $= \frac{1}{2}$.

Porque a probabilidade total é 1, e só pode acontecer C C ou para C S.

Cadeias de Markov

Responda outra questão: Qual a probabilidade de se ter um dia chuvoso após um dia seco?

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Agora pensamos nas mudanças de S (seco) para C.

Pensamos:

Quantas mudanças partindo de S existem?

Quantas mudanças de S para C aconteceram?

Cadeias de Markov

Responda outra questão: Qual a probabilidade de se ter um dia chuvoso após um dia seco?

C C S S S S C C S S S S C C S S C C S S S C C S S C

Agora pensamos nas mudanças de S (seco) para C.

Respondemos

Mudanças partindo de S : 15

Mudanças de S para C : 5

Probabilidade de mudança de S para C $= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Cadeias de Markov

Observar que essas informações podem ser armazenadas em uma matriz que relaciona todas as possibilidades:

De Chuvoso para Chuvoso

De Chuvoso para Seco

De Seco para Chuvoso

De Seco para Seco

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Chuvoso} & \text{Seco} \end{array} \\ \begin{array}{c} Chuvoso \\ Seco \end{array} & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov

Também observar que tem chuvoso em dois tempos, o anterior (ChuvosoA) e o seguinte (ChuvosoS).

Identicamente para o Seco (SecoA e SecoS).

Assim escreveremos:

De ChuvosoA para ChuvosoS

De ChuvosoA para SecoS

De SecoA para ChuvosoS

De SecoA para SecoS

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ChuvosoA} & \text{SecoA} \end{array} \\ \begin{array}{c} ChuvosoS \\ SecoS \end{array} & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov

A informação obtida:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Probabilidade de mudança:

ChuvosoA para SecoS $= \frac{1}{2}$.

$$T = \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{ChuvosoA} & \text{SecoA} \end{array} \\ \begin{array}{r} ChuvosoS \\ SecoS \end{array} & \begin{bmatrix} & \\ \frac{1}{2} & \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov

A informação obtida:

Qual a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso?

Probabilidade de mudança: ChuvosoA para SecoS

Obviamente como a

probabilidade total é 1,

de ChuvosoA para ChuvosoS

também será $= \frac{1}{2}$.

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ChuvosoA} & \text{SecoA} \end{array} \\ \begin{array}{c} ChuvosoS \\ SecoS \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov

A segunda informação obtida:

Qual a probabilidade de se ter um dia chuvoso após um dia seco?

Probabilidade de mudança:

SecoA para ChuvosoS $= \frac{1}{3}$.

A matriz completa:

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ChuvosoA} & \text{SecoA} \end{array} \\ \begin{array}{c} ChuvosoS \\ SecoS \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov

Observar que a matriz considera todas as probabilidades de mudança do estado observado, mas apenas de um tempo dado para o próximo.

Essa informação tirada de um tempo para o período seguinte sem considerar outras informações, chama-se de : **eventos de memôria curta.**

Observar que as colunas são probabilísticas (soma 1)

Cadeias de Markov

A matriz desse tipo é chamada de **matriz de transição**.

A matriz de transição contêm a probabilidade de mudança de um estado de tempo (anterior) para o tempo seguinte (posterior).

No exemplo dado: Um tempo anterior pode ser hoje e o tempo seguinte é amanhã. De hoje para amanhã.

Cadeias de Markov

O estado do tempo pode ser representado utilizando uma matriz de duas linhas e uma coluna. Cada linha armazena o valor de cada possibilidade. Por exemplo, hoje

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} Chuvoso \\ Seco \end{array}$$

A matriz coluna com os valores de observação é chamada de **vetor de estado**.