Cadeias de Markov

O estado do tempo pode ser representado utilizando uma matriz de duas linhas e uma coluna. Cada linha armazena o valor de cada possibilidade. Por exemplo, hoje

$$X_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} Chuvoso \\ Seco \end{array}$$

A matriz coluna com os valores de observação é chamada de **vetor de estado**.

Cadeias de Markov

Para conhecer o estado do tempo amanhã, fazemos

$$X_1 = TX_0$$

$$X_1 = \begin{array}{cc} Chuvoso\,S & \\ Seco\,S & \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para depois de amanhã:

$$X_2 = TX_1$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

Tem mais probabilidade de ser seco.

Cadeias de Markov

Podemos calcular para futuros períodos:

$$X_3 = TX_2$$

Observar:

$$X_3 = TX_2 = TTX_1 = TTTX_0 = T^3X_0$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{72} \\ \frac{43}{72} \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{29}{72} \\ \frac{43}{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{173}{432} \\ \frac{259}{432} \end{bmatrix}$$

Cadeias de Markov

Podemos calcular para futuros períodos:

$$X_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{173}{432} \\ \frac{259}{432} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1037}{2592} \\ \frac{1555}{2592} \end{bmatrix}$$

$$X_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1037}{2592} \\ \frac{1555}{2592} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6221}{15552} \\ \frac{9331}{15552} \end{bmatrix}$$

Será que em algum tempo chega a dar o mesmo valor??

Cadeias de Markov

Se chegasse a não mudar, significaria que aplicando a matriz de transição sobre um estado o próximo é igual (o mesmo estado)

$$TX = X$$

$$TX - X = 0$$

$$TX - IX = 0$$

$$(T - I)X = 0$$

Resolvendo:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cadeias de Markov

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observar que as linhas são dependentes. Infinitas soluções. Mas estamos olvidando de que os vetores são probabilísticos: $x_1 + x_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cadeias de Markov

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

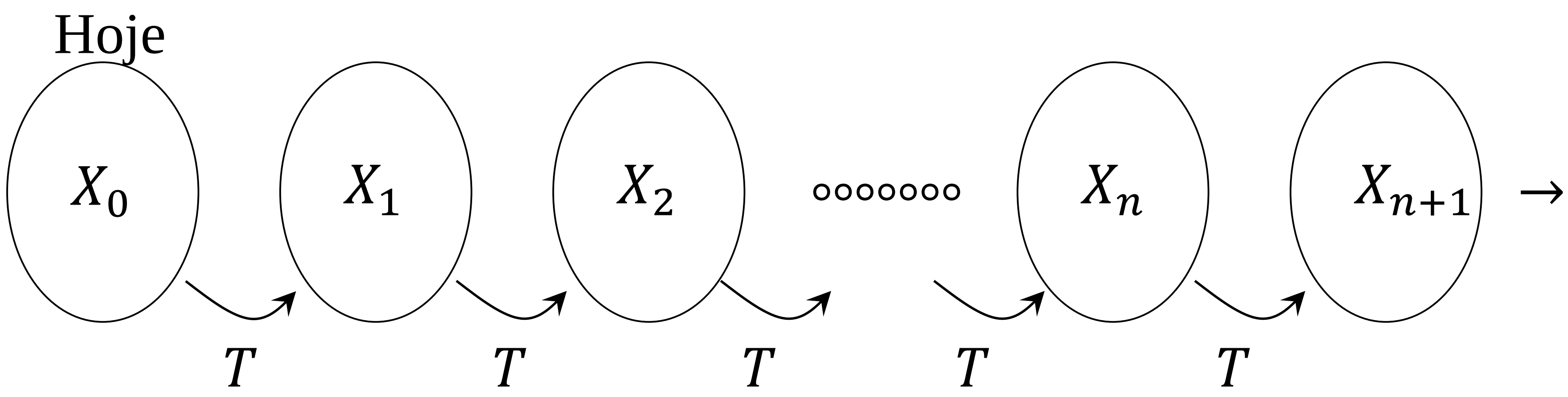
Resolvendo o sistema (por Gauss Jordan)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Um estado que não muda após aplicar uma matriz de transição é chamado de **estado estacionário.**

Resumo: Cadeias de Markov

Cadeia de Markov é um processo cuja probabilidade de o sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior.



Cadeias de Markov

Na nossa disciplina não estamos interessados em construir a matriz de transição dos processos comentados.

Geralmente vamos pegar a matriz de transição, já definida por outros.

Para a disciplina interessa:

Representar os dados em uma matriz de transição

Representar os estados do sistema e seu cálculo

Calcular os estados estacionários, se existirem.