Ajuste de Curvas: Método dos Mínimos Quadrados

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

13 de maio de 2020

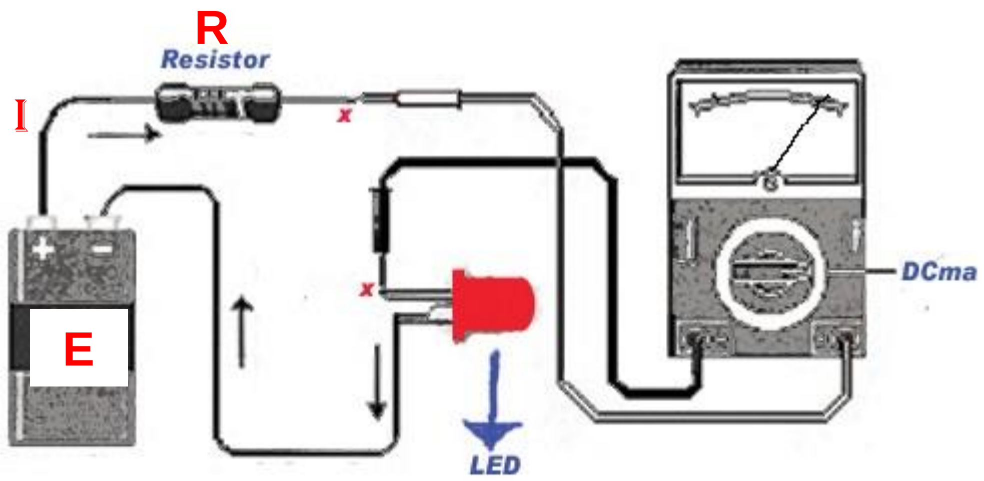
Noção

Dados os valores experimentais de grandezas (considerando que contêm erros)

Objetivo: encontrar uma curva “adequada” que “represente” os dados fornecidos e outros relacionados, de tal forma que seja minimizado o erro total cometido no sentido da média quadrática.

Método: Método dos mínimos quadrados utilizando matrizes.

Lei de Ohm – Laboratório de Física



Fonte:https://www.ibytes.com.br/os-procedimentos-para-medir-a-intensidade-da-corrente-continua/

Lei de Ohm

- A lei de Ohm que relaciona o diferencial de potencial (tensão) em uma resistência como o produto da resistência vezes a intensidade de corrente.

$$E = IR$$

Como a resistência é uma, consideramos R fixo.

Supondo que podemos utilizar I como variável conhecida de uma função linear, então:

$$E(I) = RI \Rightarrow y(x) = Rx$$

Tabela com valores experimentais

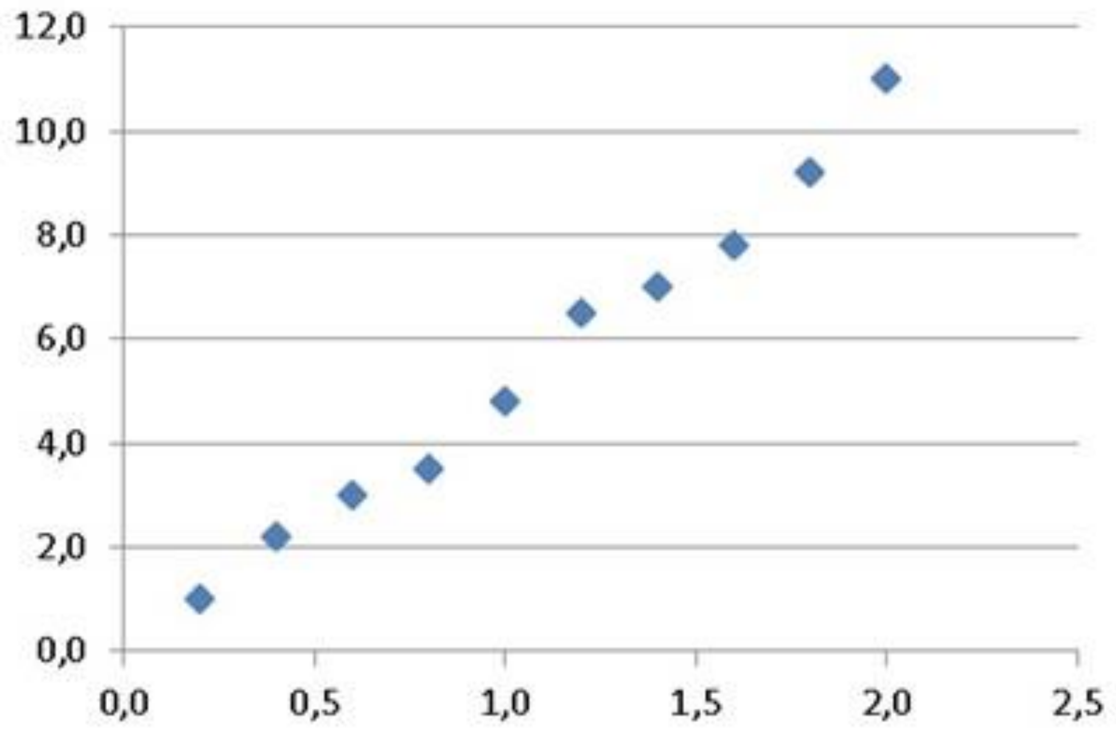
Verificar a lei de Ohm!!!
Realizam-se experiências em um laboratório de física.

Aplicamos 10 diferentes intensidades de corrente e realizamos as medições do diferencial de potencial, com um tensiômetro.

Registramos os dados na Tabela de Dados:

Item	Intensidade	Tensão
1	0.2	1.0
2	0.4	2.2
3	0.6	3.0
4	0.8	3.5
5	1.0	4.8
6	1.2	6.5
7	1.4	7.0
8	1.6	7.8
9	1.8	9.2
10	2.0	11.0

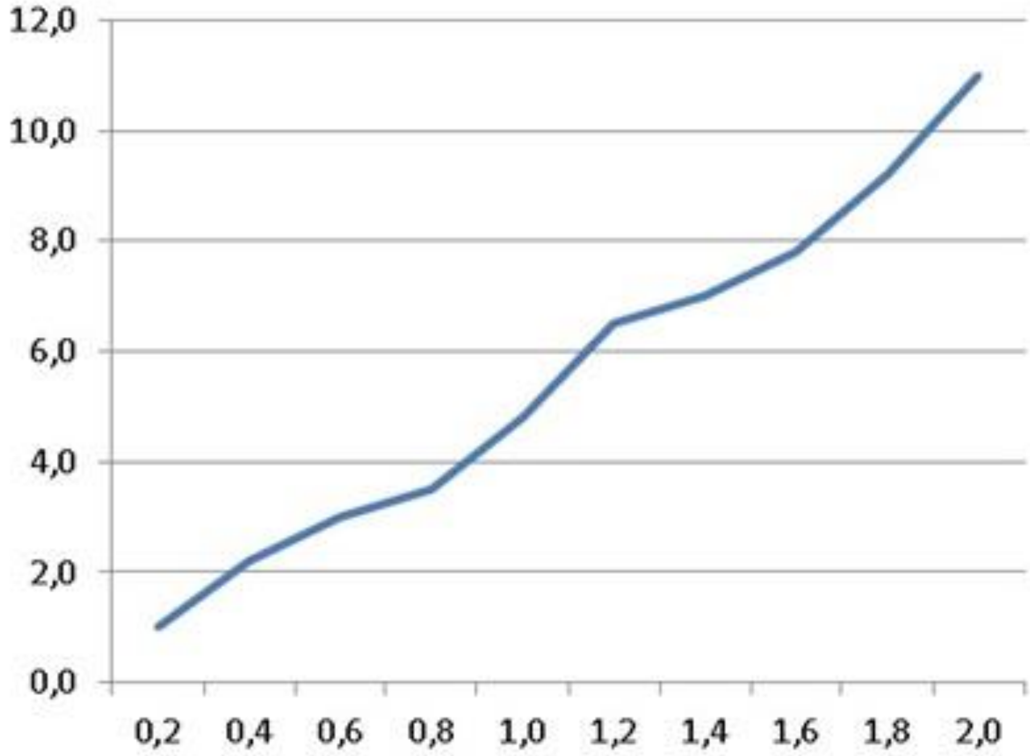
Se geramos um gráfico dos dados, observa-se:



Aparenta ter um comportamento **linear** com algumas oscilações.

Tentando desenhar uma reta que una os dados:

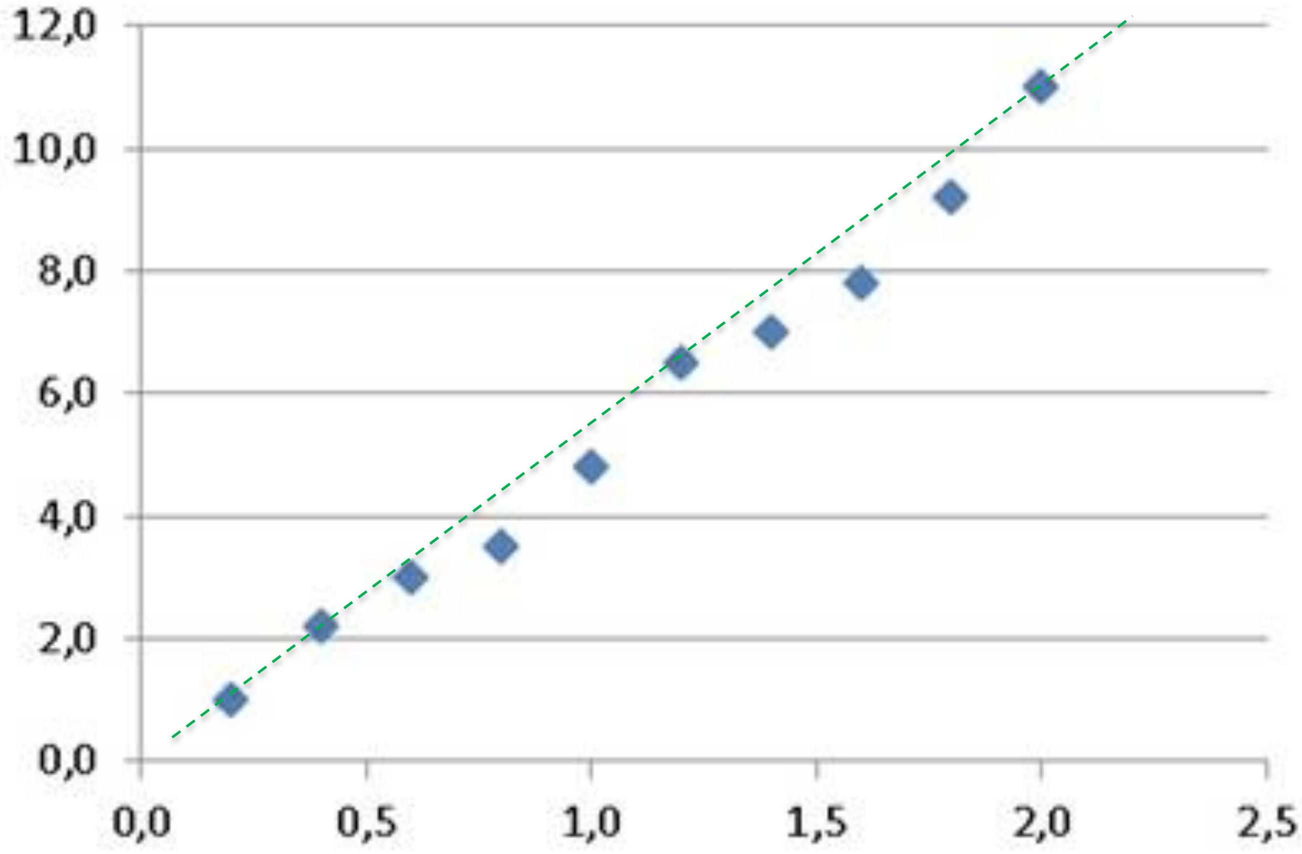
Se unimos os pontos dos dados, observa-se:



O conjunto de segmentos de reta, podem ser ajustados com uma reta, pois os “picos” podem ser medições com erro.

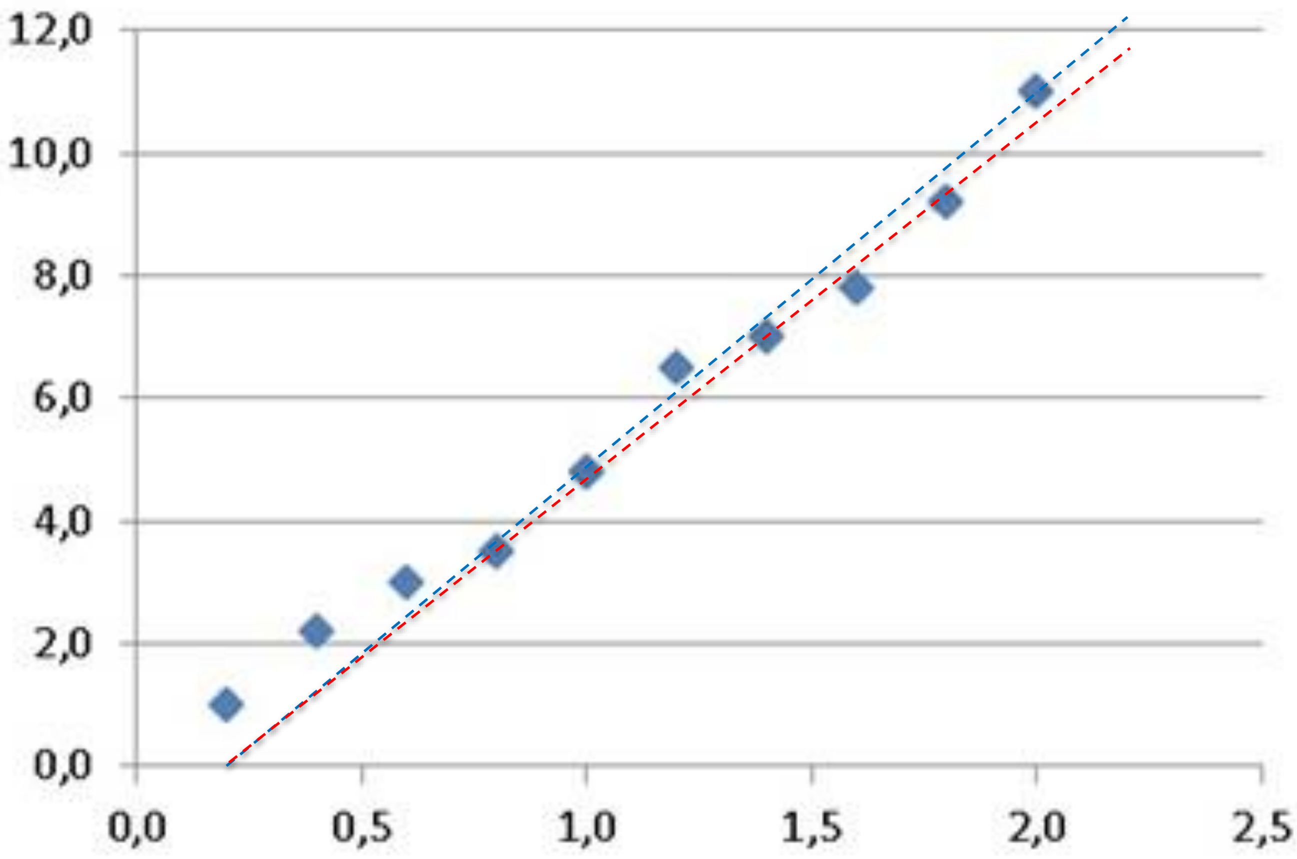
Existe uma formulação simples para a curva desenhada???

Pode ser que os dados correspondem a uma reta:



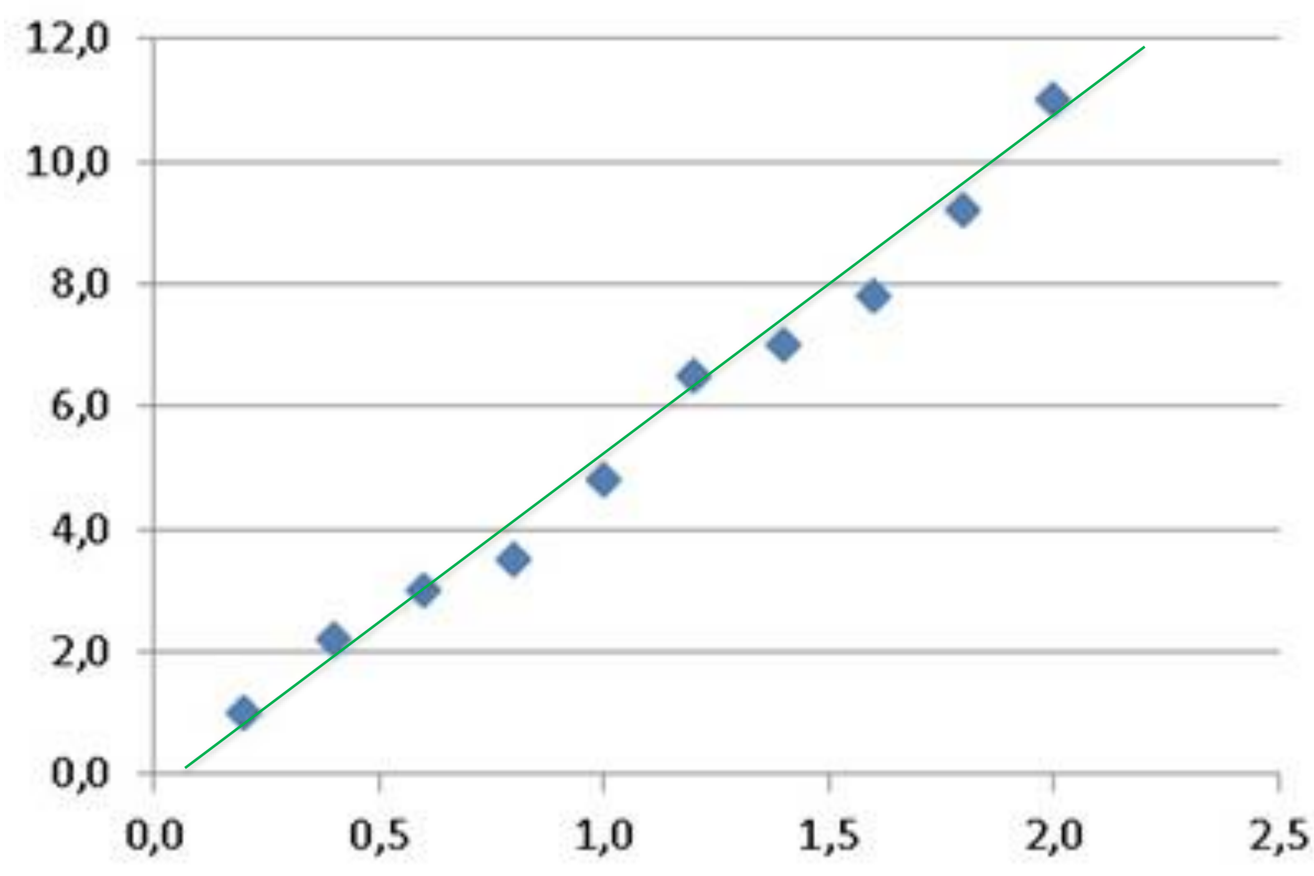
Tentando desenhar uma reta que una os dados, temos infinitas possibilidades. **Qual a mais aproximada????**

Pode ser que os dados correspondiam a uma reta:



Tentando desenhar uma reta que una os dados, temos infinitas possibilidades. **Qual a mais aproximada????**

A ideia é identificar a reta mais próxima de todos os pontos:



Não desconsiderar nenhum ponto. Melhor aproximação.

Utilizando matrizes pode-se aproximar uma reta???

Ajustando os dados com uma reta

- Observamos os dados.
- A tensão será ajustada com uma reta.
- Determinando as variáveis (independente e dependente) expressamos a equação de uma reta na forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{Intensidade} \\ y &= \text{Tensão} \end{aligned}\right\} \quad y = ax + b$$

Ajustando os dados com uma reta

- Observamos os dados.
- A tensão será ajustada com uma reta.
- Determinando as variáveis (independente e dependente) expressamos a equação de uma reta na forma:

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{Intensidade} \\ y = \text{Tensão} \end{array}\right\} \quad y = ax + b$$

- Os coeficientes a e b são desconhecidos

Ajustando os dados com uma reta

Supondo que temos a equação de uma reta

$$y = ax + b$$

Observar que conhecemos alguns valores da variável independente (intensidade) e da variável dependente (tensão). Substituindo esses dados conhecidos, podemos escrever:

$$y_i = ax_i + b$$

Temos um número finito de dados relacionados:

i = Item	x_i = Intensidade	y_i = Tensão
1	0.2	1.0
2	0.4	2.2
3	0.6	3.0
4	0.8	3.5
5	1.0	4.8
6	1.2	6.5
7	1.4	7.0
8	1.6	7.8
9	1.8	9.2
10	2.0	11.0

$i = \text{Item}$	$x_i = \text{Intensidade}$	$y_i = \text{Tensão}$
1	0.2	1.0
2	0.4	2.2
3	0.6	3.0
4	0.8	3.5
5	1.0	4.8
6	1.2	6.5
7	1.4	7.0
8	1.6	7.8
9	1.8	9.2
10	2.0	11.0

$$y_i = a x_i + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.0 = a(0.2) + b \\ 2.2 = a(0.4) + b \\ 3.0 = a(0.6) + b \\ \vdots \\ 11.0 = a(2.0) + b \end{cases}$$

Observar: É um sistema com incógnitas a e b.

O sistema matricial é

$$y_i = a x_i + b$$

$$\begin{cases} a(0.2)+b=1.0 \\ a(0.4)+b=2.2 \\ a(0.6)+b=3.0 \\ a(0.8)+b=3.5 \\ a(1.0)+b=4.8 \\ a(1.2)+b=6.5 \\ a(1.4)+b=7.0 \\ a(1.6)+b=7.8 \\ a(1.8)+b=9.2 \\ a(2.0)+b=11.0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.6 & 1 \\ 1.8 & 1 \\ 2.0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.8 \\ 6.5 \\ 7.0 \\ 7.8 \\ 9.2 \\ 11.0 \end{bmatrix}$$

O sistema matricial é

$$y_i = a x_i + b$$

$$\begin{cases} a(0.2)+b=1.0 \\ a(0.4)+b=2.2 \\ a(0.6)+b=3.0 \\ a(0.8)+b=3.5 \\ a(1.0)+b=4.8 \\ a(1.2)+b=6.5 \\ a(1.4)+b=7.0 \\ a(1.6)+b=7.8 \\ a(1.8)+b=9.2 \\ a(2.0)+b=11.0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.6 & 1 \\ 1.8 & 1 \\ 2.0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.8 \\ 6.5 \\ 7.0 \\ 7.8 \\ 9.2 \\ 11.0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{10\times 2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = B_{10\times 1}$$

O sistema matricial tem solução???

$$A_{10\times 2}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = B_{10\times 1}$$

Observar:
O sistema tem duas incógnitas.
O sistema não tem solução.

Pergunta: Podemos reduzir o sistema para um sistema de duas incógnitas e duas equações.

O produto com a transposta

- Lembrar: o produto de uma matriz com a sua transposta resulta em uma matriz quadrada

$$A^t_{2\times 10}\ A_{10\times 2} = P_{2\times 2}$$

$$A_{10\times 2}\ A^t_{2\times 10} = P_{10\times 10}$$

- O primeiro caso permite reduzir a um sistema de duas equações com duas incógnitas, assim:

Sistema projetado a dimensão 2

$$A_{10\times 2}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = B_{10\times 1}$$

$$A^t_{2\times 10}\ A_{10\times 2}\ X = A^t_{2\times 10}\ B_{10\times 1}$$

$$\left(A^t A\right)_{2\times 2}\ X = \left(A^t B\right)_{2\times 1}$$

Sistema projetado a dimensão 2

$$A^t_{2\times 10}\ A_{10\times 2}\ X = A^t_{2\times 10}\ B_{10\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & \dots & 1.8 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.6 & 1 \\ 1.8 & 1 \\ 2.0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & \dots & 1.8 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.8 \\ 6.5 \\ 7.0 \\ 7.8 \\ 9.2 \\ 11.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & \dots & 1.8 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.6 & 1 \\ 1.8 & 1 \\ 2.0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & \dots & 1.8 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.8 \\ 6.5 \\ 7.0 \\ 7.8 \\ 9.2 \\ 11.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (0.2)^2 + \dots + (2.0)^2 & 0.2(1) + \dots + 2(1) \\ 1(0.2) + \dots + 1(2.0) & 1(1) + \dots + 1(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.2)(1.0) + \dots + (2)(11.0) \\ 1(1.0) + \dots + 1(11.0) \end{bmatrix}$$

Método dos mínimos quadrados

$$\begin{bmatrix} 15.4 & 11.0 \\ 11.0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79.12 \\ 56.0 \end{bmatrix}$$

Esse processo é chamado de Método dos Mínimos Quadrados.

Agora basta resolver o sistema obtido.

Resolvemos o sistema por Gauss Jordan

$$\text{A matrix estendida é}: \quad \begin{bmatrix} 15.4 & 11.0 & 79.12 \\ 11 & 10 & 56.0 \end{bmatrix} \approx$$

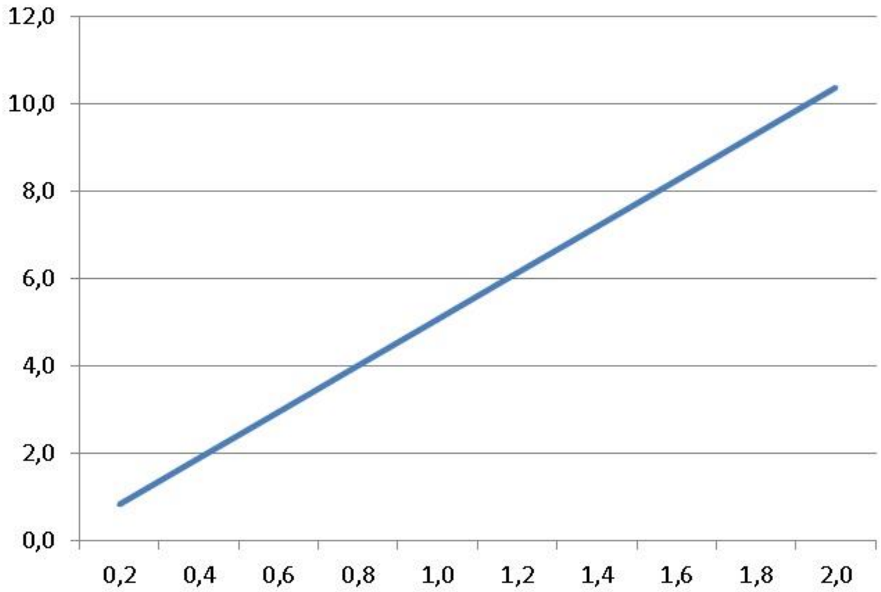
$$\begin{bmatrix} 15.4 & 11.0 & 79.12 \\ 1.1 & 1 & 5.6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 17.52 \\ 1.1 & 1 & 5.6 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{292}{55} \\ 1.1 & 1 & 5.6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{292}{55} \\ 0 & 1 & -\dfrac{6}{25} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{292}{55} x - \frac{6}{25}$$

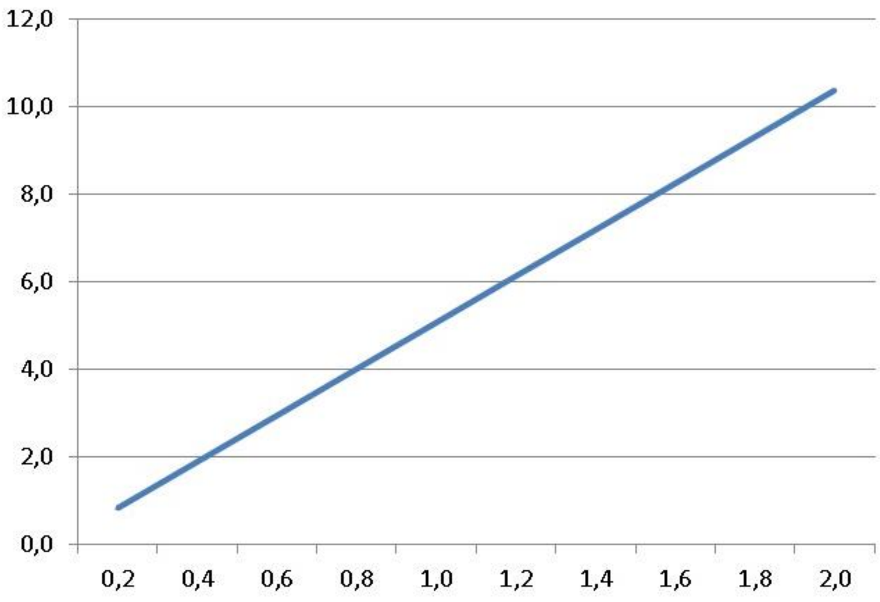
Os valores foram ajustados (reta)

Item	Intensidade	Tensão	Ajuste
1	0.2	1.0	0.8
2	0.4	2.2	1.9
3	0.6	3.0	2.9
4	0.8	3.5	4.0
5	1.0	4.8	5.1
6	1.2	6.5	6.1
7	1.4	7.0	7.2
8	1.6	7.8	8.3
9	1.8	9.2	9.3
10	2.0	11.0	10.4



$$y = \frac{292}{55}x - \frac{6}{25}$$

Podemos projetar outros valores



$$y = \frac{292}{55}x - \frac{6}{25}$$

Se precisar o valor da tensão para outro valor de intensidade:
Por exemplo:

$$I = 0.85 \Rightarrow$$
$$\mathrm{E} = \frac{292}{55}(0.85) - \frac{6}{25}$$
$$\mathrm{E} = 4.272727\ ...$$

Para $I = 3.0 \Rightarrow$

$$\mathrm{E} = 15.687272\ ...$$

Sistema geral projetado para dimensão 2:

Vejamos de forma geral. Temos um conjunto finito de valores de uma variável (independente) e os valores de uma outra (dependente)

i	x_i	y_i
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
4	x_4	y_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$

Sistema geral projetado a dimensão 2

$$A^t_{2\times n}\ A_{n\times 2}\ X = A^t_{2\times n}\ B_{n\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & 1 \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ & \\ \vdots & \vdots \\ & \\ x_{n-1} & 1 \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(x_1\right)^2 + \ldots + \left(x_n\right)^2 & x_1(1) + \ldots + x_n(1) \\ 1(x_1) + \ldots + 1(x_n) & 1(1) + \ldots + 1(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1)(y_1) + \ldots + (x_n)(y_n) \\ 1(y_1) + \ldots + 1(y_n) \end{bmatrix}$$

O sistema em dimensão 2

- Observe o sistema obtido

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

- Isso significa que podemos resolver completando a tabela inicial com os produtos necessários e seus somatórios.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	$x_2 y_2$
3	x_3	y_3	x_3^2	$x_3 y_3$
4	x_4	y_4	x_4^2	$x_4 y_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	x_n^2	$x_n y_n$
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Posso utilizar outros polinômios?

- Ajuste linear ou em Reta:

$$y = a\,x + b$$

- Ajuste Quadrático ou em parábola:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

- Ajuste Polinômico:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$