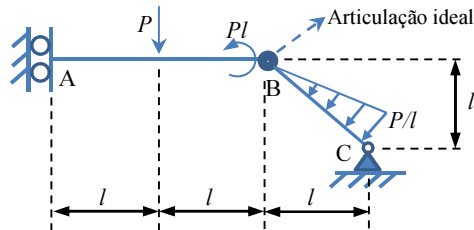


1ª Questão (4,0 pontos):

Para a estrutura indicada abaixo, formada pelas barras AB e BC, pede-se:

- Determinar todas as reações de apoio (indicar seu diagrama de corpo livre);
- Determinar a máxima força normal (em valor absoluto) na estrutura e sua localização;
- Determinar a máxima força cortante (em valor absoluto) na estrutura e sua localização;
- Determinar o máximo momento fletor (em valor absoluto) na estrutura e sua localização.

Dados: P, l .



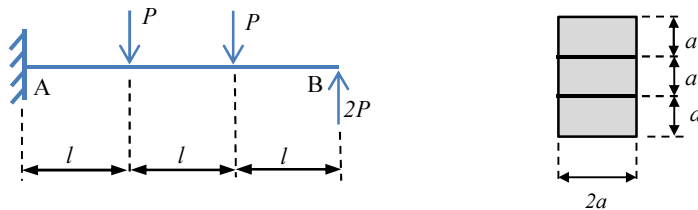
2ª Questão (3,0 pontos):

A viga AB, de comprimento total $3l$, está submetida ao carregamento indicado (admita que o peso próprio da viga possa ser desprezado nesta análise). Considerando que a viga possui seção transversal uniforme (indicada na figura à direita) formada por três tábuas de madeira (cada qual com dimensões $2a \times a$), coladas com uma resina de alta resistência, e sendo conhecidos os dados abaixo, pede-se determinar o maior valor de P para que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas.

Dados: Tensão admissível à tração (ou compressão) na madeira em virtude da flexão: 12 MPa

Tensão admissível ao cisalhamento para a resina: 0,4 MPa

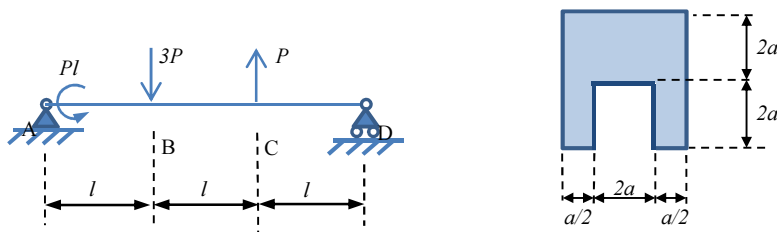
Dados geométricos: $l = 1,2\text{m}$, $a = 100\text{ mm}$



3ª Questão (3,0 pontos):

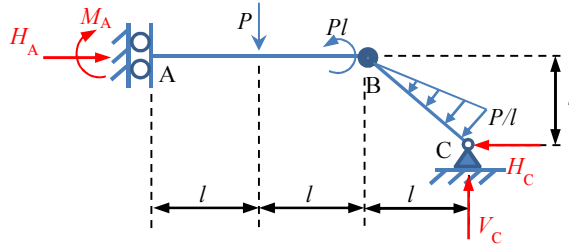
A viga ABCD, de comprimento total $3l$, está submetida ao carregamento indicado. A viga possui seção transversal uniforme (indicada na figura à direita) e seu peso próprio pode ser desprezado nesta análise. Pede-se determinar a máxima tensão normal de tração na viga e em qual ponto ela ocorre.

Dados: $P = 5,2\text{ kN}$, $l = 2,0\text{ m}$, $a = 100\text{ mm}$.



GABARITO**Solução: 1ª Questão**

O diagrama de corpo livre da estrutura submetida ao carregamento indicado fica:



Temos um total de quatro incógnitas (quatro reações de apoio) e quatro equações de equilíbrio.

Denominando, por ora, $q_o = P/l$ e $a = l\sqrt{2}$, teremos:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Leftrightarrow H_A = H_C + \left(\frac{q_o a}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sum F_y = 0 &\Leftrightarrow V_C = P + \left(\frac{q_o a}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sum M_{esq,B} = 0 &\Leftrightarrow M_A = 2Pl \\ \sum M_{dir,B} = 0 &\Leftrightarrow V_C l - H_C l = \left(\frac{q_o a}{2}\right) \frac{2a}{3}\end{aligned}$$

Expressando os resultados em função de P e l , e resolvendo, virá:

$$\begin{aligned}H_A &= \frac{4}{3}P \\ M_A &= 2Pl \\ V_C &= \frac{3}{2}P \\ H_C &= \frac{5}{6}P\end{aligned}$$

Os sinais positivos indicam que todos os sentidos arbitrados inicialmente na figura estão corretos.

b) A força normal na barra AB será:

$$N_{AB} = -H_A = -\frac{4}{3}P \quad (\text{compressão na barra})$$

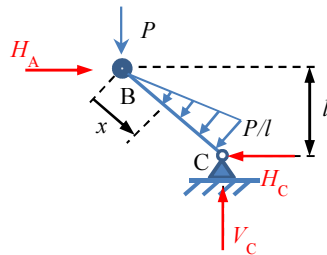
E a força normal na barra BC será:

$$N_{BC} = -(V_C + H_C) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{6}P \quad (\text{compressão na barra})$$

Logo, a maior força normal (em valor absoluto) ocorrerá na barra BC e seu módulo será:

$$|N_{m\acute{a}x}| = |N_{BC}| = \frac{7\sqrt{2}}{6}P$$

A força cortante no trecho inicial da barra AB (para $0 \leq x < l$) é nula em virtude do alívio de cortante usado no apoio A, e no trecho final da barra AB (para $l < x \leq 2l$) a força cortante é dada por: $V(x) = -P$. Já no trecho BC, teremos (veja diagrama abaixo, com x medido a partir de B, em direção a C):



$$V(x) = (H_A - P) \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{q_0 x}{a} \right) \cdot \frac{x}{2}$$

Ou seja:

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6} P - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 P$$

onde: $0 < x \leq l\sqrt{2}$. Logo, os valores extremos no trecho BC valem:

Em B ($x = 0$): $V(0) = \frac{\sqrt{2}}{6} P$

Em C ($x = a = l\sqrt{2}$): $V(a) = -\frac{\sqrt{2}}{3} P$

E, em particular, o ponto onde a força cortante se anula é tal que:

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6} P - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 P = 0 \Leftrightarrow x_{cr} = \frac{\sqrt{6}}{3} l$$

Do exposto, seque que a maior força cortante (em valor absoluto) ocorrerá no trecho final da barra AB (para $l < x \leq 2l$) e seu módulo será:

$$|V_{m\acute{a}x}| = P$$

O momento fletor no trecho inicial da barra AB (para $0 \leq x < l$) é constante e dado por:

$$M(x) = 2Pl$$

E, no trecho final da barra AB (para $l \leq x < 2l$), o momento fletor será dado por:

$$M(x) = 2Pl - P(x - l) = 3Pl - Px$$

Já no trecho BC, o momento fletor será dado por:

$$M(x) = \int_0^x V(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{6} Px - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{x}{l} \right)^3 Pl$$

onde: $0 < x \leq l\sqrt{2}$ (note que os momentos fletores são de fato nulos nas extremidades, ou seja, tanto para $x = 0$ quanto para $x = l\sqrt{2}$).

O maior momento fletor neste trecho ocorrerá em $x = x_{cr} = \frac{\sqrt{6}}{3}l$ (onde a força cortante é nula) e vale:

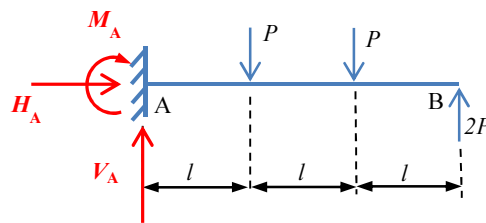
$$M(x_{cr}) = \left\{ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^3 \right\} Pl = \frac{2\sqrt{3}}{27} Pl$$

Do exposto, segue que o maior momento fletor (em valor absoluto) ocorrerá no trecho inicial da barra AB (para $0 \leq x < l$) e vale:

$$|M_{m\acute{a}x}| = 2Pl$$

Solução: 2ª Questão

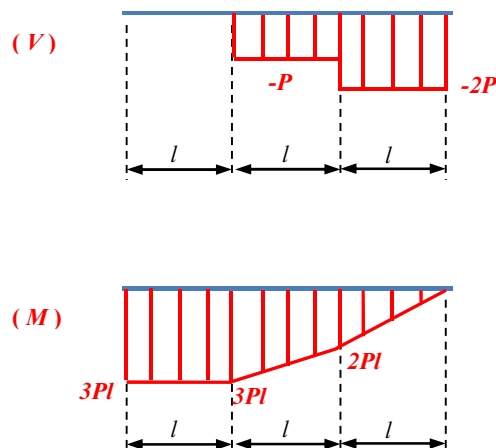
A figura abaixo ilustra o diagrama de corpo livre da viga:



Das equações de equilíbrio da estática resultam:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Leftrightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Leftrightarrow V_A = 0 \\ \sum M_{esq,B} &= 0 \Leftrightarrow M_A = 3Pl \end{aligned}$$

Os diagramas de força cortante e momento fletor ficam dados por:



Vemos, portanto, que a maior força cortante em valor absoluto é $|V_{m\acute{a}x}| = 2P$ (atuante no terço final da viga) e que o maior momento fletor em valor absoluto é $|M_{m\acute{a}x}| = 3Pl$ (no terço inicial da viga).

A máxima tensão normal devida a flexão ocorrerá nas seções correspondentes ao terço inicial da viga, e nos pontos mais afastados da linha neutra (situados a uma distância $|y_{m\acute{a}x}| = h/2 = 3a/2$). Assim:

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{I} \cdot |y_{m\acute{a}x}| = \frac{18Pl}{bh^2} = \frac{18Pl}{(2a)(3a)^2} = \frac{Pl}{a^3}$$

Devemos ter:

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{Pl}{a^3} \leq \sigma_{adm} \Leftrightarrow P_1 \leq \frac{\sigma_{adm} \cdot a^3}{l}$$

Numericamente:

$$P_1 \leq \frac{12 \cdot 10^6 \cdot (0,1)^3}{1,2} N \Leftrightarrow P_1 \leq 10kN$$

A tensão cisalhante na resina será a mesma nas duas interfaces indicadas (pois ambas terão o mesmo valor para o 1º momento de área). Assim, para a resina teremos:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = \frac{|V_{m\acute{a}x} \cdot Q|}{b \cdot I} = \frac{2P(2a^3)}{b \left(\frac{bh^3}{12} \right)} = \frac{48Pa^3}{b^2h^3} = \frac{48Pa^3}{(2a)^2(3a)^3} = \frac{4}{9} \frac{P}{a^2}$$

Devemos ter:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = \frac{4}{9} \frac{P}{a^2} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow P_2 \leq \frac{9\tau_{adm} \cdot a^2}{4}$$

Numericamente:

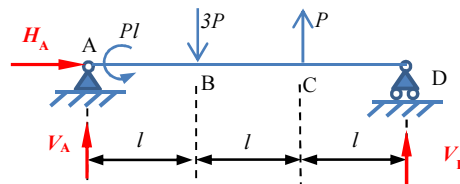
$$P_2 \leq \frac{9 \cdot 0,4 \cdot 10^6 \cdot (0,1)^2}{4} N \Leftrightarrow P_2 \leq 9kN$$

A carga não deve exceder o menor dentre os dois valores calculados. Logo:

$$P_{m\acute{a}x} = \min\{P_1, P_2\} = 9kN$$

Solução: 3ª Questão

A figura abaixo ilustra o diagrama de corpo livre da estrutura com as reações de apoio devidamente indicadas:



Das equações de equilíbrio da estática resultam:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

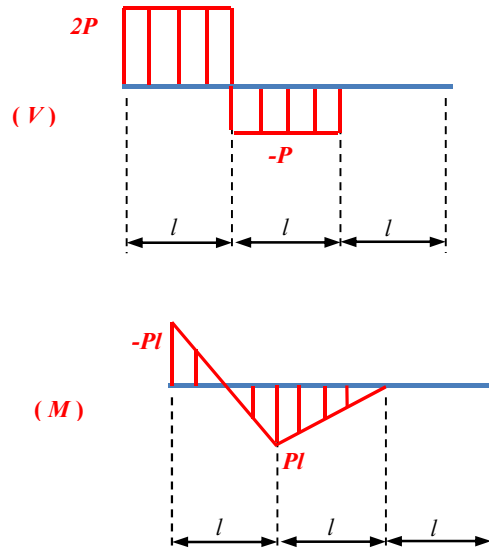
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_D = 2P$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow V_D(3l) + 2Pl - 3Pl + Pl = 0 \Leftrightarrow V_D = 0$$

Logo:

$$H_A = 0, \quad V_A = 2P, \quad V_D = 0$$

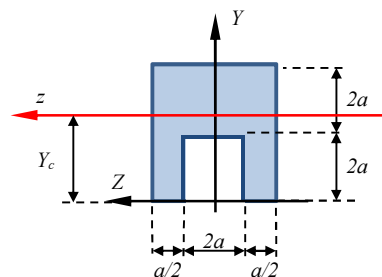
Os diagramas de força cortante e de momento fletor ficam dados por:



Vemos, portanto, que a maior força cortante em valor absoluto é $|V_{m\acute{a}x}| = 2P$ (atuante no trecho correspondente ao terço inicial da viga) e o maior momento fletor em valor absoluto é $|M_{m\acute{a}x}| = Pl$ (nas seções A e B). Assim, as maiores tensões devidas a flexão ocorrerão nas seções A e B e para calculá-las é preciso determinar a posição do centroide e a inércia da seção em relação ao eixo que passa pelo centroide:

- Posição do centroide da seção transversal:

Considerando inicialmente os eixos não-centroidais YZ indicados na figura abaixo, onde o eixo Y é o eixo de simetria da seção transversal, teremos:



$$Z_c = 0 \text{ (pela simetria)}$$

$$Y_c = \frac{(4a \cdot 3a) \cdot 2a - (2a \cdot 2a) \cdot a}{12a^2 - 4a^2} = \frac{5}{2}a$$

- Inércia da seção transversal em relação ao eixo não-centroidal Z :

$$I_Z = \frac{(3a) \cdot (4a)^3}{3} - \frac{(2a) \cdot (2a)^3}{3} = \frac{176}{3}a^4$$

- Inércia da seção transversal em relação ao eixo centroidal z:

Utilizando a fórmula de mudança de eixos virá:

$$I_z = I_Z - A(Y_c)^2 = \frac{176}{3}a^4 - (8a^2) \cdot \left(\frac{5a}{2}\right)^2 = \frac{26}{3}a^4$$

- Cálculo da máxima tensão normal de tração:

Da análise das seções em que há o maior momento fletor (seções A e B), concluímos que a maior tensão normal de tração irá ocorrer na face inferior da seção B (pois nesta seção teremos tensões de tração na face inferior da viga e de compressão na face superior da viga, e os pontos da face inferior estão a uma maior distância da linha neutra). A magnitude destas tensões será:

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = -\frac{M}{I} \cdot y = -\frac{(Pl)}{\frac{26}{3}a^4} \cdot \left(-\frac{5a}{2}\right)$$

Ou seja:

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{15 Pl}{52 a^3}$$

Numericamente:

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{15 (5,2 \cdot 10^3) \cdot 2}{52 (0,1)^3} = 3,0 \text{ MPa}$$