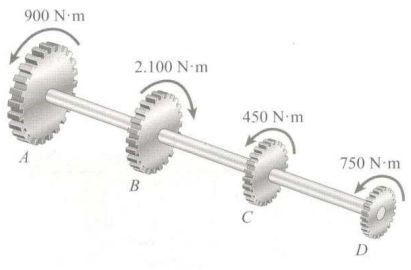
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica
PME-3210 MECÂNICA DOS SÓLIDOS I Profs.: Clóvis A. Martins e R. Ramos Jr.
1ª Prova – 29/03/2016 – Duração: 100 minutos

1ª Questão (3,0 pontos):



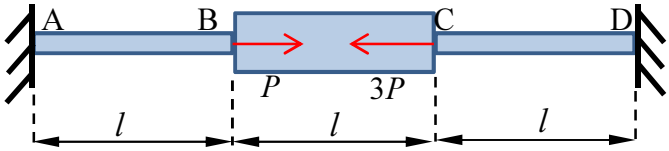
Quatro engrenagens infinitamente rígidas estão presas a um eixo cilíndrico maciço e transmitem os torques ilustrados na figura. As engrenagens estão igualmente espaçadas e a distância entre cada par de engrenagens é $2m$. O módulo de elasticidade para cisalhamento do material do eixo é $G = 70\ GPa$ e a tensão de cisalhamento máxima admissível é $100MPa$. Pedem-se:

a) O diagrama de momentos de torção ao longo do eixo (1,0 pto);
b) O diâmetro mínimo que deve ter esse eixo (***Obs: adotar*** $\boldsymbol{\pi = 3}$) (1,0 pto);
c) O ângulo de giro da engrenagem D em relação à engrenagem A se o momento polar do eixo for $I_P = 3{,}0.10^{-7}m^4$ (1,0 pto).

2ª Questão (3,0 pontos):

A barra ABCD indicada abaixo é formada por três segmentos prismáticos denominados AB, BC e CD. Os três segmentos possuem o mesmo comprimento (l), porém a área da seção transversal do segmento intermediário (BC) é o dobro da área da seção transversal dos segmentos da extremidade (i.é, $A_1 = A_3 = A$ e $A_2 = 2A$). Considerando que o material tenha módulo de elasticidade E e que sobre as seções B e C sejam aplicados esforços axiais centrados de magnitudes P e $3P$, como indicado na figura, pedem-se:

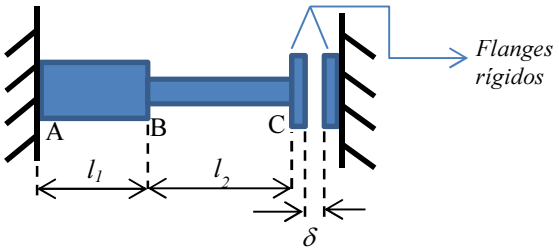
a) O diagrama de corpo livre da barra, com as reações nos engastes A e D indicadas (com magnitudes e sentidos de atuação corretos) (1,5 pto);
b) O diagrama de forças normais e as maiores tensões normais em tração e compressão (1,5 pto).

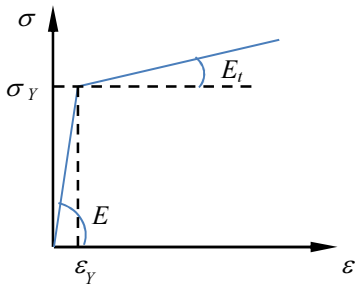


3ª Questão (4,0 pontos):

O sistema estrutural indicado abaixo é formado por dois tubos (AB e BC) com seções transversais circulares e áreas $A_1 = 2000\ \text{mm}^2$ e $A_2 = 1000\ \text{mm}^2$ e comprimentos $l_1 = 2{,}0$ m e $l_2 = 3{,}0$ m, respectivamente. Considerando que a extremidade C deva ser conectada a um equipamento de grande rigidez através de flanges rígidos (indeformáveis) que se encontram a uma distância δ, e admitindo que o material dos tubos possui um comportamento bilinear sendo: $E = 200$ GPa, $E_t = 10$ GPa e $\sigma_Y = 200$ MPa, pede-se:

a) Determinar a lei que relaciona a força axial nos tubos (após a montagem) com o deslocamento δ a ser vencido, admitindo que o material dos tubos permaneça no regime elástico linear (*não utilize valores numéricos neste item*) (1,0 pto);
b) Determinar o valor numérico do deslocamento máximo que pode ser vencido (δ_1) utilizando a lei anteriormente obtida (1,0 pto);
c) Determinar a nova lei que relaciona a força axial nos tubos (após a montagem) com o deslocamento total a ser vencido (δ), para o caso em que $\delta \geq \delta_1$ e o material do tubo menos solicitado permanece no regime elástico linear (*não utilize valores numéricos neste item*) (2,0 ptos).

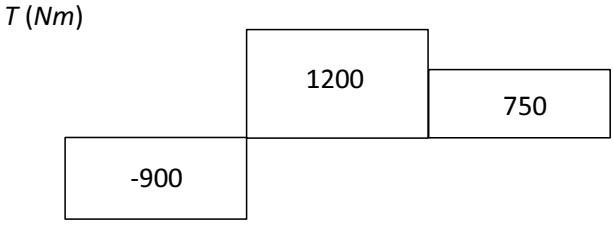




GABARITO

Solução: 1ª Questão

a)



b)

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} r}{I_P} = \frac{16 T_{max}}{\pi d^3} \leq \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16\, T_{max}}{\pi \tau_{adm}}}$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16.1200}{3.100.10^6}} = 0{,}040m$$

$$\Rightarrow d_{min} = 40mm$$

c)

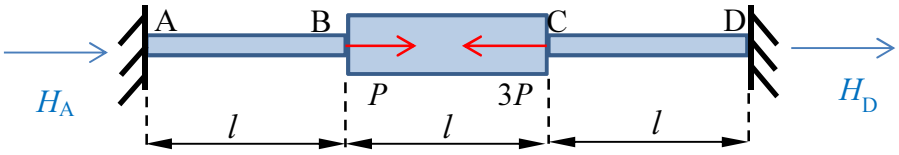
$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{(G I_P)_i} = \frac{L}{G I_P} \sum T_i$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2}{70.10^9.3{,}0.10^{-7}} (-900 + 1200 + 750)$$

$$\Rightarrow \phi = 0{,}1\, rd = 6°$$

Solução: 2ª Questão;

a) Designando por H_A e H_D as reações horizontais em A e D, respectivamente, teremos o seguinte diagrama de corpo livre (os sentidos das reações são arbitrados livremente: se os valores das reações resultarem positivos, significa que os sentidos arbitrados estão corretos; caso contrário, os sentidos corretos são opostos aos inicialmente arbitrados):



Do equilíbrio de forças na direção horizontal, temos:

$$H_A + P - 3P + H_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_A + H_D = 2P$$

Como temos duas incógnitas a serem determinadas e uma única equação de equilíbrio de forças, a estrutura é hiperestática com grau de hiperestaticidade $g = 1$. A equação adicional que nos permite resolver o problema é uma equação de compatibilidade de deslocamentos que é expressa na forma:

$$\delta_D = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i . L_i}{E_i A_i} = 0$$

Onde: N_i = esforço normal (interno) atuante no *i*-ésimo trecho;

L_i = comprimento do *i*-ésimo trecho;

$E_i A_i$ = rigidez axial da barra no *i*-ésimo trecho.

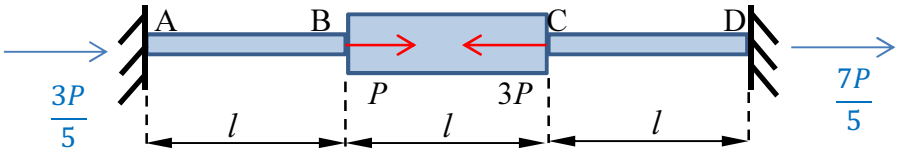
Colocando todas as forças normais internas em função de H_D e P, resulta:

$$\frac{H_D . l}{EA} + \frac{(H_D - 3P). l}{2EA} + \frac{(H_D - 2P). l}{EA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_D = \frac{7P}{5}$$

E, assim:

$$H_A = \frac{3P}{5}$$

Como os valores resultaram positivos, isto significa que os sentidos arbitrados estão corretos e o diagrama de corpo livre final fica:



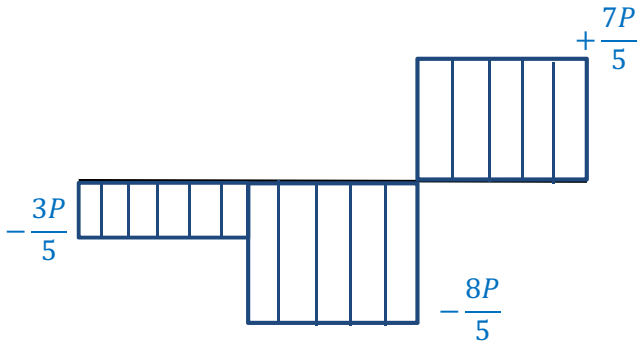
b) Os esforços normais (internos) ficam sendo dados por:

No trecho AB: $N_1 = H_D - 2P = -H_A = -\frac{3P}{5}$

No trecho BC: $N_2 = H_D - 3P = \frac{7P}{5} - 3P = -\frac{8P}{5}$

No trecho CD: $N_3 = H_D = \frac{7P}{5}$

Assim, o diagrama de forças normais fica dado por:



As tensões normais na barra serão:

No trecho AB: $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{3P}{5A}$ (tensão de compressão)

No trecho BC: $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{8P}{5(2A)} = -\frac{4P}{5A}$ (tensão de compressão)

No trecho CD: $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{7P}{5A}$ (tensão de tração)

Logo, a maior tensão normal de tração é $\sigma_3 = \frac{7P}{5A}$ (atuante no trecho #3, barra CD) e a maior tensão normal de compressão é $\sigma_2 = -\frac{4P}{5A}$ (atuante no trecho central #2, barra BC).

Solução: 3ª Questão;

a) Após a montagem, o deslocamento total a ser vencido deve ser a soma dos alongamentos dos dois tubos, ou seja:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

Porém, se os dois tubos estiverem no regime elástico-linear, valem as relações:

$$\delta_1 = \frac{F.l_1}{EA_1} \quad e \quad \delta_2 = \frac{F.l_2}{EA_2}$$

onde *F* é a força axial aplicada ao conjunto. Logo:

$$\delta = \frac{F.l_1}{EA_1} + \frac{F.l_2}{EA_2}$$

Ou, de forma equivalente:

$$F = \left(\frac{EA_1A_2}{l_1A_2 + l_2A_1}\right)\delta$$

b) Para que a lei obtida possa ser utilizada, a máxima tensão normal deve ser, no limite, igual à tensão de escoamento do material. E, como a máxima tensão normal irá ocorrer no trecho de menor área seccional (trecho BC), teremos:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \sigma_Y \quad \Leftrightarrow \quad F_{máx} = \sigma_Y A_2$$

Então o deslocamento máximo que pode ser vencido (de tal forma que o material permaneça no regime elástico-linear), é:

$$\delta = \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right)\frac{\sigma_Y A_2}{E} = \left(\frac{A_2}{A_1}l_1 + l_2\right)\frac{\sigma_Y}{E}$$

Utilizando os valores numéricos dados, virá:

$$\delta = \left(\frac{1}{2}.2000 + 3000\right)\frac{200.10^6}{200.10^9}mm = 4\,mm$$

c) Se a distância a ser vencida for superior a 4 mm, e considerarmos que apenas o trecho BC saiu do regime elástico-linear, a equação de compatibilidade de deslocamentos fica:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

Onde:

$\delta_1 = \frac{F.l_1}{EA_1}$ (pois, por hipótese, o trecho AB continua no regime elástico-linear)

Para o trecho BC, a relação tensão-deformação passa a ser:

$$(\sigma_2 - \sigma_Y) = E_t.(\varepsilon_2 - \varepsilon_Y)$$

E, lembrando ainda que:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{l_2} \quad e \quad \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E}$$

Virá:

$$\frac{F}{A_2} = \sigma_Y + E_t.\left(\frac{\delta_2}{l_2} - \frac{\sigma_Y}{E}\right)$$

Isolando o alongamento δ_2 da equação acima, teremos:

$$\delta_2 = \frac{l_2}{E_t}.\left[\frac{F}{A_2} - \sigma_Y\left(1 - \frac{E_t}{E}\right)\right]$$

Substituindo, finalmente, os valores de δ_1 e de δ_2 na equação de compatibilidade,virá a relação procurada:

$$\delta = \frac{F.l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{E_t}.\left[\frac{F}{A_2} - \sigma_Y\left(1 - \frac{E_t}{E}\right)\right]$$

Deve-se observar, ainda, que a relação acima só é válida enquanto tivermos:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \leq \sigma_Y \quad \Leftrightarrow \quad F \leq \sigma_Y.A_1$$