ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DIFERENÇAS FINITAS EDP

Ardson dos S. Vianna Jr.
Departamento de Eng. Química
Escola Politécnica - USP
ardson@usp.br

Sumário

1. Introdução
2. Fórmulas de diferenças finitas
3. Aplicação a EDP elíptica
4. Aplicação a EDP parabólica
5. Conclusão

1. EDP - Método

- Gerar a malha: pontos onde se resgata a solução
- Substituir os operadores diferenciais por operadores diferença
- Construir o sistema de equações
- Resolver o sistema
- Representar a solução

1. EDP – avaliação preliminar

- Problema – equação da difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$1C.C.\, u(0,t) = 0$$

$$2C.C. \quad u(L,t) = 0$$

$$C.I.\, u(x,0) = 50sen(\frac{\pi\ x}{L^2})$$

1. EDP – avaliação preliminar

- Problema – equação da difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$1\,C.C.\; u(0,t) = 0$$

$$2\,C.C.\quad u(L,t) = 0$$

$$C.I.\; u(x,0) = 50sen(\frac{\pi\, x}{L^2})$$

EDO-PVI

1. EDP – avaliação preliminar

- Problema – equação da difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$1C.C.\ u(0,t) = 0$$

$$2C.C.\quad u(L,t) = 0$$

$$C.I.\ u(x,0) = 50sen(\frac{\pi\ x}{L^2})$$

EDO-PCC

1. EDP – avaliação preliminar

- Compor a solução

EDO - PVI	EDO-PCC	EDP
dif. fin	dif fin	dif fin
RK	dif fin	MOL
RK	MWR	Ele Fin
vol fin	vol fin	Vol fin

2. Fórmulas

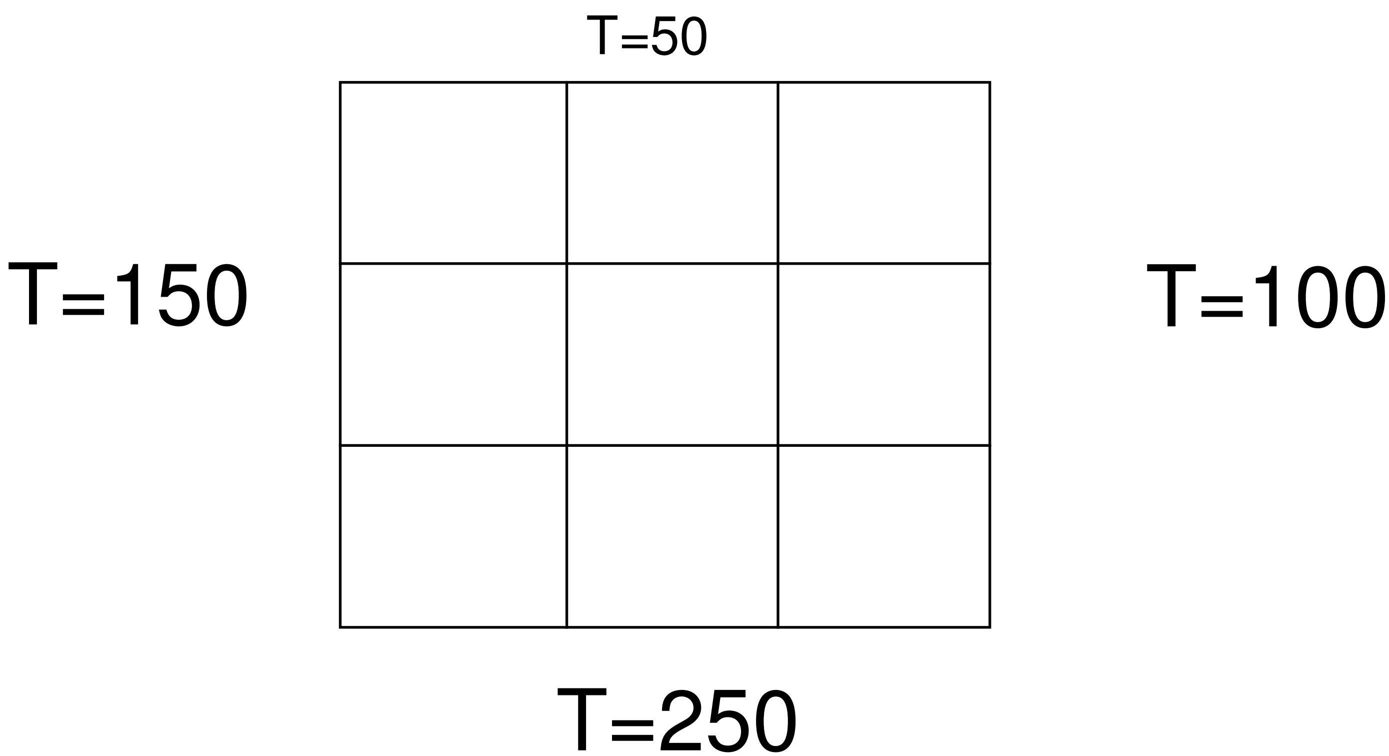
$$u_i = u_{i-1} + h.u\acute{}_i \qquad u_i = u_{i-1} + h.u\acute{}_i$$

$$u\acute{}_i \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2.h}$$

$$u``_i \cong \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

3. EDP – Estudo de caso

- Difusão de calor em placa quadrada no estado estacionário



3. EDP - Estudo de caso

- Difusão de calor em placa quadrada no estado estacionário: equação elíptica

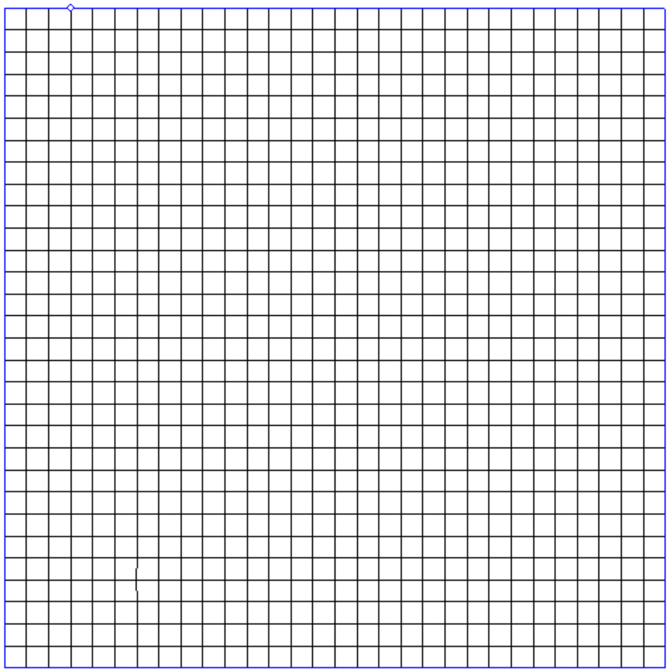
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

3. Est. caso – Método: malha

- Gerar a malha: pontos onde se resgata a solução
- $x_i = x_0 + i.h_1$ $\qquad$ $y_j = y_0 + j.h_2$

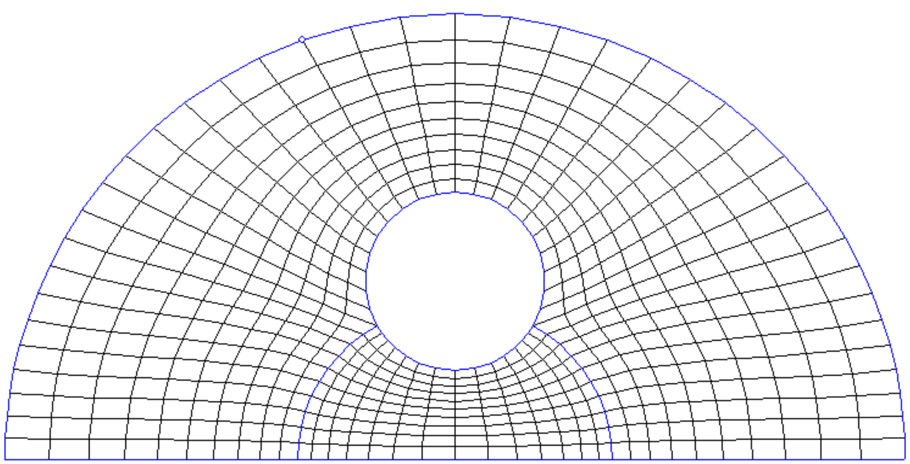
3. Est. caso – Método: malha

- Gerar a malha: pontos onde se resgata a solução $x_i=x_0+i.h_1$ $y_j=y_0+j.h_2$



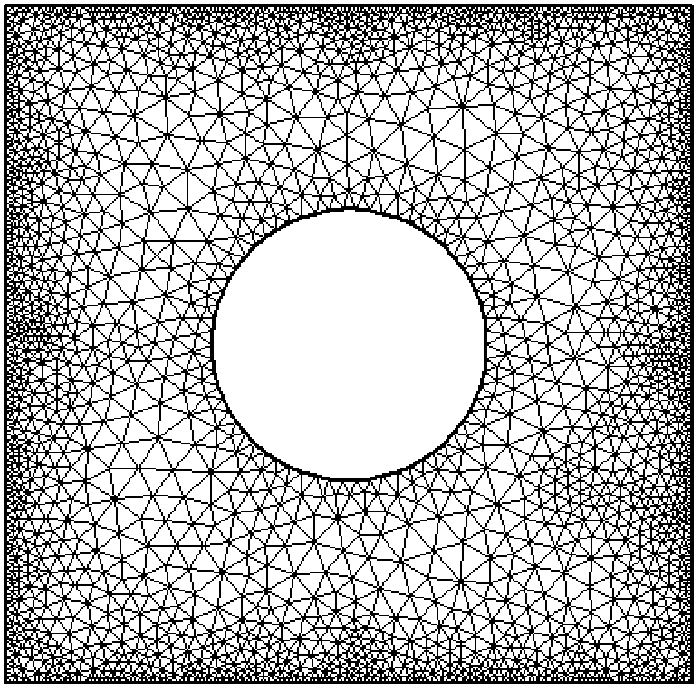
3. Est. caso – Método: malha

- Malha estruturada



3. Est. caso – Método: malha

- Malha não estruturada



3. EC – Método: redução do operador diferencial

- Substituir os operadores diferenciais por operadores diferença

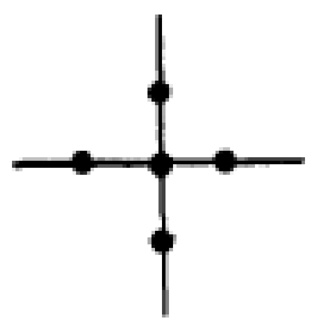
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$$

3. redução do operador diferencial

- Estêncil

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$$

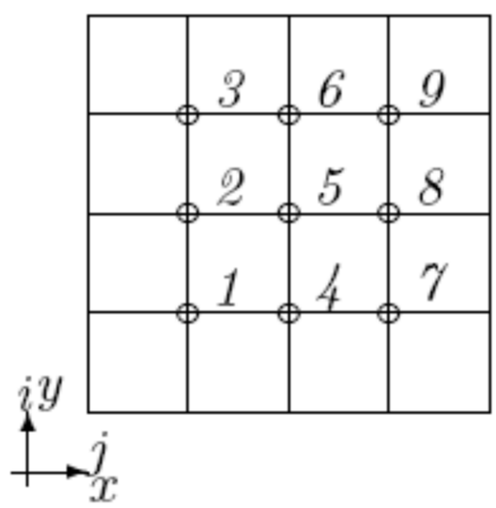


3. EC – Método: sistema de equações

- Construir o sistema de equações

T=50

T=150



T=100

T=250

3. EC – Método: sistema de equações

- Resolvendo o sistema – matrizes esparsas

1 : (-150 + 2u1 - u4) + (-250 + 2u1 - u2) = 0
2 : (-150 + 2u2 - u5) + (u1 + 2u2 - u3) = 0
3 : (150 + 2u3 - u6) + (u2 + 2u3 - 50) = 0
4 : (u1 + 2u4 - u7) + (-250 + 2u4 - u5) = 0
5 : (u2 + 2u5 - u8) + (u4 + 2u5 - u6) = 0
6 : (u3 + 2u6 - u9) + (u5 + 2u6 - 50) = 0
7 : (u4 + 2u7 - 100) + (-250 + 2u7 - u8) = 0
8 : (u5 + 2u8 - 100) + (u7 + 2u8 - u9) = 0
9 : (u6 + 2u9 - 100) + (u8 + 2u9 - 50) = 0

3. EC – Método: sistema de equações

- Resolvendo o sistema – matrizes esparsas

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \\ 200 \\ 250 \\ 0 \\ 50 \\ 350 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

3. EC – Método: resolvendo o sistema de equações

- Resolvendo o sistema – matrizes esparsas

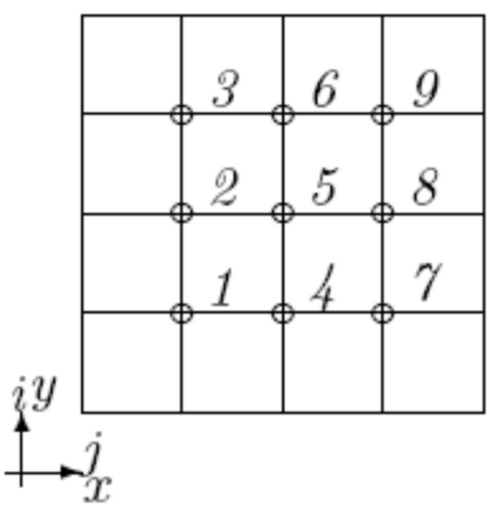
$$u = \begin{pmatrix} 189.187 \\ 159.177 \\ 127.15 \\ 197.57 \\ 170.372 \\ 149.424 \\ 180.722 \\ 175.316 \\ 250.172 \end{pmatrix}$$

3. EC – Método: solução

- Resolvendo o sistema – matrizes esparsas

T=50

T=150



T=100

182.1429
145.0893
110.7143
183.4821
137.5000
97.7679
164.2857
123.6607
92.8571

T=250

4. Características das EDPs

- O sistema de equações depende do tipo de EDP!

- Solução mais simples para EDP parabólica

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

4. EDP parabólica

- Gerar a malha: $u(x_i,t_j) = u_{i,j}$
- Reduzir os operadores diferenciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i.j}}{h_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_2^2} \cong \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_2^2}$$

4. EDP parabólica

- Reduzir os operadores diferenciais

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_1} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_2^2}$$

- Posso isolar $u_{i,j+1}$ – forma explícita

$$u_i^{j+1} = u_i^j + h_1 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_2^2}$$

4. EDP parabólica

- Critério de estabilidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- forma explícita

$$s = \frac{D.\Delta t}{\Delta x^2} \leq 2$$

4. EDP parabólica

- Forma implícita

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h_1} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_2^2}$$

- Gera um sistema tridiagonal

$$\frac{u_i^j}{h_1} + \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_2^2} = \frac{u_i^{j-1}}{h_1}$$

$$\frac{u_{i-1}^j}{h_2^2} + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{-2}{h_2^2}\right)u_i^j + \frac{u_{i+1}^j}{h_2^2} = \frac{u_i^{j-1}}{h_1}$$

4. EDP parabólica

- Tanto a forma explícita como a forma implícita usam fórmulas de 1ª ordem. Ao usar fórmula centrada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i.j-1}}{2.h_1}$$

- Que pode ser visto como uma fórmula *forward* de passo $2.h_1$

4. EDP parabólica

- Crank-Nicolson

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+1/2} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+1/2}$$

- Usar um ponto intermediário j+1/2
- Fórmula centrada no tempo $o(h^2)$
- Média no espaço

4. EDP parabólica

- Crank-Nicolson
-

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{2h_1/2}=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h_2^2}+\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h_2^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2.h_1^2}u_{i+1}^{j+1}+\left(\frac{1}{h_1}+\frac{\alpha}{h_1^2}\right)u_i^{j+1}-\frac{\alpha}{2.h_1^2}u_{i-1}^{j+1}=\frac{\alpha}{2.h_1^2}u_{i+1}^j+\left(\frac{1}{h_1}-\frac{\alpha}{h_1^2}\right)u_i^j+\frac{\alpha}{2.h_1^2}u_{i-1}^j$$

5. Conclusão

- Cada EDP apresenta uma característica
- Estabilidade
- relação entre discretizaçoes

Bibliografia

- M.E. Davis, Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers, John Wiley & Sons, (1984).
- O.T Hanna, O.C. Sandall,Computational methods in Chemical Engineering, Prentice Hall, (1995).