MAP 3122 - Métodos Numéricos e Aplicações (POLI)

Lista de Exercícios sobre EDOs

Exercício 1. *Transforme as equações diferenciais de ordem superior seguinte em sistemas de equações diferenciais de ordem 1. Escreve a forma matricial desses sistemas.*

1. $y^{(3)}(t) = y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - y(t) + 1$
   $y(0) = 2$, $y^{(0)}(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 1$.

2. $y^{(4)}(t) = y^{(2)}(t)e^t + y^{(3)}(t)$
   $y(0) = 2$, $y^{(1)}(0) = 1$, $y^{(2)}(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 4$.

Exercício 2. *Use o método de Euler com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$, onde $y(t)$ é solução da EDO*

$$y''(t) + ty'(t) + 2y(t) = 0, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = 2.$$

Depois, use o método de Euler modificado com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$. Observação: o método de Euler modificado é dado por

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right).$$

Exercício 3. *Considere a equação $x'(t) = x^2(t), x(0) = 1$, cuja solução é dada por $x(t) = 1/(1-t)$. Calcule a aproximação para $x(0.5)$ pelos métodos de Euler e Euler modificado com $h = 0.25$ e compare os erros obtidos em $t = 0.5$ com os dois métodos.*

Exercício 4. *Consideramos o (PVI) seguinte*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ para } t \in [a, b], \text{ com } \qquad y(a) = 1.$$

com $f(t, y) := \arctan(ty)$ e $[a, b] = [1, 3]$. Vamos aproximar y usando o método de Heun:

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h), \qquad w_0 = 1.$$

com

$$\phi(t_i, w_i, h) = c_1 f(t_i, w_i) + c_2 f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right)$$

onde $c_1 = 1/4$ e $c_1 = 3/4$.

- *Mostre que f satisfaz*
  $$\left|\frac{\partial f}{\partial w}(t, w)\right| \leq L, \text{ para todos } t \in [a, b] \text{ e } w \in \mathbb{R},$$
  e calcule L.

- *Mostre que a função $(t, w, h) \mapsto \phi(t, w, h)$ é Lipschitz na variavel w no conjunto*
  $$D = \{(t, w, h) \mid t \in [a, b], w \in \mathbb{R}, h \in [0, h_0]\},$$
  para $h_0 > 0$ dado.

- *Mostre que o método de Heun é convergente neste caso, usando um teorema do curso.*

Exercício 5. *Consideramos o (SPVI) seguinte:*

$$z''(t) - 2tz'(t) = 2te^{x(t)z(t)},$$
$$x''(t) - 2x(t)z(t)x'(t) = 3x(t)^2y(t)t^2,$$
$$y''(t) - e^{y(t)}y'(t) = 4x(t)t^2z(t),$$

com as condições iniciais $z(1) = x'(1) = y'(1) = 2$ *e* $z'(1) = x(1) = y(1) = 3$. *Transforme este (SPVI) em um sistema de primeira ordem, indicando tambem as condições iniciais do novo sistema.*

Exercício 6. *Consideramos o (PVI):*

$$y''(t) - \frac{2t}{(1-t^2)}y'(t) + \frac{6}{(1-t^2)}y(t) = 0, \quad t \in [-0.5, 0.5]$$

com as condições iniciais $y(-0.5) = -0.125$ *e* $y'(-0.5) = -1.5$.

- *Sabemos que a solução exata deste problema é da forma* $y(t) = \alpha t^2 + \beta$. *Calcule* α *e* β.
- *Transforme este (PVI) de segunda ordem em um (SPVI) de primeira ordem, indicando tambem as condições iniciais do (SPVI).*
- *Use um passo do método de Euler explícito com* $h = 0,1$ *para calcular o valores aproximados* y_1 *e* y_1' *de* $y(-0.4)$ *e* $y'(-0.4)$, *repectivamente. Calcular os erros nas aproximações de* $y(-0.4)$ *e* $y'(-0.4)$.

Exercício 7. *Considere um arco idealizado. Ignorando o efeito da gravidade e sabendo que a altura do arco é* $2\ell_0$ *e o deslocamento da seta é inicialmente de* l_0 *(em metros) em direção à esquerda, a equação de movimento da seta na direção* x *pode ser escrita da seguinte maneira:*

$$mx''(t) = -2k\left(l_0 - \sqrt{l_0^2 + (l_0 - x(t))^2}\right), \tag{1}$$

onde k *é a constante de retorno das cordas do arco e* m *é a massa da flecha. Usando a mudança de variável* $u = x/l_0$, *podemos reescrever a equação* (1) *na forma*

$$u''(t) = \frac{2k}{m}\left(\sqrt{2 - 2u(t) + u(t)^2} - 1\right). \tag{2}$$

- *Supondo que a flecha esta inicialmente em repouso no ponto* $x = 0$ *(isto é* $u(0) = 0$ *e* $u'(0) = 0$*), transformar a equação diferencial de segunda ordem* (2) *em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.*
- *Usando o método de Euler modificado e um passo de tempo* $h = 0.01$ *(em segundos), avaliar a posição e a velocidade da seta no tempo* $t = 0.01$ *s, com* $m = 0.1$ *kg,* $k = 250$ *N/m e* $l_0 = 0.5$ *m.*

Exercício 8. *Consideramos o (PVI) seguinte:*

$$y'(t) = -7y(t), \ t \in [0, 2],$$
$$y(0) = 5.$$

Consideramos uma discretização $t_i = ih$ *de* $[0, 2]$, $i = 0, \ldots, n$.

- *Encontre a solução analítica deste (PVI).*
- *Mostre que, para este (PVI), o método explícito de Euler é da forma*

  $$y_{i+1} = g(h)y_i,$$

  e encontre a expressão da função $g(h)$.
- *Usando* $h = 0.5$, *faça 2 iterações do método explícito de Euler e calcule os erros cometidos em* y_1 *e* y_2 *comparando os resultados com a solução analítica.*

Exercício 9. *Consideramos o (PVI) seguinte:*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [0, 1],$$
$$y(0) = 1.$$

com $f(t, y) = -te^{\frac{t^2}{2}}e^y$ *e uma discretização* $t_i = ih$ *de* $[0, 1]$, $i = 0, \ldots, n$.

- *Usando* $h = 0.1$, *faça uma iteração do método de Euler explícito.*
- *O método de Euler implícito é definido pela iteração seguinte:*

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}).$$

  Usando $h = 0.1$, *faça uma iteração do método de Euler implícito, usando o método de Newton para calcular* y_{i+1} *(Faça apenas duas iterações do método de Newton).*

Exercício 10. *Seja o fluxo* $\Psi(x)$ *solução da equação diferencial*

$$-\frac{d}{dx}\left[D(x)\frac{d}{dx}\Psi(x)\right] + e^{-x}\Psi(x) = 1.$$

Definimos a corrente $J(x)$ *por* $J(x) = -D(x)\frac{d}{dx}\Psi(x)$, *com* $D(x) = \frac{e^x}{3}$.

- *Supondo que as condições iniciais sejam dadas em* $x = 0$ *por* $\Psi(0) = 1$ *e* $J(0) = 0$, *transforme esta equação da ordem 2 em um sistema de equações da ordem 1, em que as incognitas são o fluxo e a corrente.*
- *Calcule uma aproximação de* $\Psi'(0,1)$ *usando o método de Euler modificado com* $h = 0,1$ *aplicado ao sistema obtido no item anterior.*