SEGUNDA PROVA - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS - MAP 5705

A prova é **individual** (Atenção: Provas com resoluções iguais de questões (com cópias) serão desconsideradas). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração. Deixe claro quais os resultados estão sendo utilizados, justificando adequadamente as respostas.

Data de entrega: Até segunda-feira, dia 22 de fevereiro, às 14:00 horas.

Boa Prova!

Exercício 1. Considere o seguinte problema $(x', y') = f(x, y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dado por

$$f(x, y) = \left(-x - x^3, -y(y+1)(2y-4) + 5x^2\right).$$

a) Determine as singularidades de f.

b) Calcule $Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, em que $f_1(x, y) = -x - x^3$ e $f_2(x, y) = -y(y+1)(2y-4) + 5x^2$.

c) As singularidades encontradas no item a) são estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis?

d) Esboce qualitativamente o que se espera do retrato de fase na vizinhanças das singularidades usando Grobman-Hartman.

Exercício 2. Considere o seguinte problema abaixo:

$$\begin{cases} x' &= -3x^3 + y^4 \\ y' &= -y^3 + x^4 \\ z' &= -z \end{cases}.$$

a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (-3x^3 + y^4, -y^3 + x^4, -z)$. Calcule $Df(0, 0, 0)$ e seus autovalores. É possível saber se a singularidade $(0, 0, 0)$ é estável ou instável sabendo os autovalores neste caso?

b) Usando seus conhecimentos sobre funções de Lyapunov, determine se o ponto $(0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável, instável ou assintoticamente estável. Dica: Considere a função $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Exercício 3. a) Sejam dois campos vetoriais $f_1 : U \to \mathbb{R}^n$ e $f_2 : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, em que U e V são abertos de $\mathbb{R}^n$. Seja $g : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Se g é uma conjugação C^1 de f_1 e f_2, mostre que g leva soluções periódicas de $y' = f_1(y)$ em soluções periódicas de $y' = f_2(y)$.

b) Considere os campos $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por $f_1(x, y) = (x, -y)$ e $f_2(x, y) = (x, -y + x^4)$. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = (x, y + \frac{x^4}{5})$ é uma conjugação de classe C^∞ entre f_1 e f_2.

c) Existe alguma solução periódica do problema abaixo?

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y + x^4 \end{cases}.$$

Exercício 4. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} x' &= -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right)\left(4 - x^2 - y^2\right) \\ y' &= x + y\left(1 - x^2 - y^2\right)\left(4 - x^2 - y^2\right) \end{cases}.$$

a) Faça a mudança de variável $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ e $y(t) = r(t)\text{sen}(\theta(t))$ e mostre que

$$\begin{cases} r' &= r\left(1 - r^2\right)\left(4 - r^2\right) \\ \theta' &= 1 \end{cases}.$$

Dica: Observe que $x' = r'\cos(\theta) - r\text{sen}(\theta)\theta'$ e $y' = r'\text{sen}(\theta) + r\cos(\theta)\theta'$.

b) Estudando o sinal de r' nos intervalos $0 < r < 1$, $1 < r < 2$ e $r > 2$, esboce o retrato de fase do problema acima.

c) Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$: $p = (\frac{1}{2}, 0)$, $q = (\frac{3}{2}, 0)$ e $r = (1, 0)$. Usando o retrato de fase do item b), é possível mostrar que as soluções "se aproximam de certos conjuntos" quando $t \to \pm\infty$. Encontre (justificando com poucas palavras) os conjuntos ω e α limites de p, q e r, isto é, $L_\alpha(p)$, $L_\omega(p)$, $L_\alpha(q)$, $L_\omega(q)$, $L_\alpha(r)$ e $L_\omega(r)$.

Exercício 5. Considere o problema linear abaixo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

em que $a \in \mathbb{R}$.

a) Para cada um dos intervalos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$, verifique se a singularidade $(0,0,0)$ é uma singularidade isolada. Para cada um dos casos ($a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$) diga se ela é estável, assintoticamente estável ou instável. Dica: Calcule os autovalores da matriz. Cuidado com o caso $a = 0$.

b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & ax + x^3 \\ y' & = & -2y + z + x^2\text{sen}(y) \\ z' & = & -y - 2z + y^3 e^z \end{array} .$$

Para cada um dos intervalos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$, verifique se singularidade $(0,0,0)$ é estável, assintoticamente estável ou instável.

Dica: Novamente cuidado com o caso $a = 0$! O que acontece com as soluções de $x' = x^3$ quando $t \to \infty$?

Exercício 6. Uma partícula está sob a ação de uma força $F(x) = -\text{sen}(x)$. Supondo que sua massa seja igual a 1, a segunda lei de Newton se torna:

$$x'' = -\text{sen}(x).$$

a) Defina $y_1 = x$ e $y_2 = x'$ e transforme o problema acima em um sistema equivalente de primeira ordem.

b) Ache uma integral primeira para o sistema acima.

c) O ponto $(y_1, y_2) = (0,0)$ é uma singularidade isolada? É uma singularidade estável, assintoticamente estável ou instável?

Suponha agora que exista uma força de resistência do ar. Assim a equação se torna

$$x'' = -\text{sen}(x) - x'.$$

d) Novamente defina $y_1 = x$ e $y_2 = x'$ e transforme o problema acima em um sistema equivalente de primeira ordem. O ponto $(0,0)$ é estável, assintoticamente estável ou instável?

e) Existe uma integral primeira para esse novo problema?

Formulário. (Nem tudo é necessário)

Definição 7. Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Dizemos que $y : \mathbb{R} \to E$ é uma solução periódica de $y' = f(y)$ se y não for constante e se existir $T > 0$ tal que $y(T) = y(0)$.

Definição 8. Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Uma função $V : E \to \mathbb{R}$ é chamada de integral primeira da equação $y' = f(y)$ se for uma função diferenciável tal que:
1) V não é constante em nenhum conjunto aberto de E.
2) Se $y : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de $y' = f(y)$, então a função $t \in I \mapsto V(y(t))$ é constante.

Para um função de classe $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, denotamos por $Df(x)$, $x \in E$, a matriz $n \times n$ dada por $Df(x)_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$.

Definição 9. Sejam $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^r, $r \geq 1$. Dizemos que o fluxo de f_1, denotado por ϕ_1, e o fluxo de f_2, denotado por ϕ_2, são topologicamente (C^k, $k \geq 1$, diferenciavelmente) conjugados se existe um homeomorfismo (C^k difeomorfismo) $g : E_1 \to E_2$ tal que
$$g\left(\phi_1(t, x)\right) = \phi_2\left(t, g\left(x\right)\right)$$
para todo (t, x) para os quais o fluxo ϕ_1 está bem definido. Se g for um difeomorfismo, a condição acima equivale a
$$Dg(y) f_1(y) = f_2(g(y)), \ \ \forall y \in E_1.$$

Teorema 10. *(Grobman-Hartman) Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 definido num aberto E. Seja y_0 um ponto de singularidade hiperbólico (Os autovalores de $Df(y_0)$ têm parte real diferente de zero). Logo f em y_0 é localmente topologicamente conjugado a $Df(y_0)$ em 0.*

Definição 11. Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1. Dizemos que f é um campo gradiente, se existir $U : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $f = -\nabla U$.

Definição 12. Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto E.
1) Dizemos que y_0 é uma singularidade de f se $f(y_0) = 0$.
2) Dizemos que y_0 é uma singularidade isolada de f se $f(y_0) = 0$ e se existe uma vizinhança aberta W de y_0 tal que $f(y) \neq 0$ se $y \in W \setminus \{y_0\}$.
3) Dizemos que y_0 é uma singularidade (ou ponto de equilíbrio) estável se $f(y_0) = 0$ e se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in E$ e $\|y - y_0\| < \delta$, então o fluxo $\phi(t, y)$ está bem definido para todo $t \geq 0$ e $\|\phi(t, y) - y_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.
4) Dizemos que y_0 é uma singularidade (ou ponto de equilíbrio) assintoticamente estável se $f(y_0) = 0$ e se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in E$ e $\|y - y_0\| < \delta$, então o fluxo $\phi(t, y)$ está bem definido para todo $t \geq 0$, $\|\phi(t, y) - y_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t\to\infty} \phi(t, y) = y_0$.

Teorema 13. *(Critérios de estabilidade) Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 definido num aberto E.*
1) Seja $y_0 \in E$ uma singularidade. Se $Df(y_0)$ tiver um autovalor com parte real positiva, então y_0 é um ponto de equilíbrio instável.
2) (Lyapunov-Perron) Seja y_0 um ponto de singularidade. Se todos os autovalores de $Df(y_0)$ tiverem parte real < 0, então y_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
3) Se existe uma integral primeira $V : E \to \mathbb{R}$ para o sistema $y' = f(y)$, então não existe ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Definição 14. (Função de Lyapunov) Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $y_0 \in E$ uma singularidade. Seja $W \subset E$ uma vizinhança aberta de y_0 e $V : W \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
1) Dizemos que V é um função de Lyapunov para f em y_0 se $V(y_0) = 0$, $V(y) > 0$ para todo $y \in W \setminus \{y_0\}$ e $t \in I \mapsto V \circ y(t)$ é uma função não crescente para qualquer solução $y : I \to \mathbb{R}^n$ de $y' = f(y)$ tal que $y(t) \in W$ para cada $t \in I$.
2) Dizemos que V é um função de Lyapunov estrita para f em y_0 se $V(y_0) = 0$, $V(y) > 0$ para todo $y \in W \setminus \{y_0\}$ e se $V : W \setminus \{y_0\} \to \mathbb{R}$ for de classe C^1 e tal que $t \in I \mapsto \frac{d}{dt}\left(V \circ y\right)(t) < 0$ para qualquer solução $y : I \to \mathbb{R}^n$ de $y' = f(y)$ tal que $y(t) \in W \setminus \{y_0\}$ para cada $t \in I$.

Observação 15. Se $V : W \to \mathbb{R}$ for diferenciável, então
i) $t \in I \mapsto V \circ y(t)$ é uma função não crescente equivale a $\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leq 0$ para todo $y \in W$.
ii) $t \in I \mapsto \frac{d}{dt}\left(V \circ y\right)(t) < 0$ equivale a $\langle \nabla V(y), f(y) \rangle < 0$ para todo $y \in W \setminus \{y_0\}$.

Teorema 16. *(Teorema de Lyapunov) Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $y_0 \in E$ uma singularidade. Então:*
1) Se existe uma função de Lyapunov para f em y_0, então y_0 é um ponto de equilíbrio estável.
2) Se existe uma função de Lyapunov estrita para f em y_0, então y_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Abaixo assumiremos que todas as soluções de $y' = f(y)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 17. Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Os conjuntos ω e α-limites são definidos como
$$L_\omega(x) = \left\{y \in E; \exists t_n \to \infty \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} \phi(t_n, x) = y\right\},$$
$$L_\alpha(x) = \left\{y \in E; \exists t_n \to -\infty \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} \phi(t_n, x) = y\right\}.$$

Teorema 18. *(Teorema de Poincaré-Bendixson) Seja $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1. Os únicos conjuntos ω-limites compactos, não vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas do campo.*

Teorema 19. *(Teorema de Bendixson). Seja $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 definido no aberto simplesmente conexo E de $\mathbb{R}^2$. Se existe uma solução periódica de $y' = f(y)$, então ou $div(f)$ se anula em um aberto ou $div(f)$ troca de sinal.*