PROPRIEDADES DE CONJUNTOS ω E α LIMITES
TEOREMA DE POINCARÉ - BENDIXSON

$f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1 E $y_0 \in E$

$$L_\omega(y_0) = \{\bar{y} \in E;\ \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n) = \bar{y}\}$$

$$L_\alpha(y_0) = \{\bar{y} \in E;\ \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n) = \bar{y}\}.$$

PROPRIEDADES DE L_α E L_ω.

SÓ PARA FACILITAR.

VAMOS SUPOR QUE AS SOLUÇÕES ESTEJAM BEM DEFINIDAS $\forall t \in \mathbb{R}$, OU SEJA O FLUXO $\phi: E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\quad \Omega = E \times \mathbb{R}$

↳ DOMÍNIO DO FLUXO.

P1) SE $y_0 \in E$ FOR UMA SINGULARIDADE, ENTÃO $L_\omega(y_0) = L_\alpha(y_0) = \{y_0\}$

$f(y_0) = 0$.

DEMO: SE $f(y_0) = 0$, ENTÃO $\phi(y_0, t) = y_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

LOGO $\lim_{n\to\infty} \phi(y_0, n) = y_0$ (ESCOLHEMOS $t_n = n \to \infty$) $\Rightarrow \boxed{\{y_0\} \subset L_\omega(y_0)}$

SE $\bar{y} \in L_\omega(y_0)$, ENTÃO $\exists\ t_n \to \infty$ T.Q. $\lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n) = \bar{y}$. MAS $\phi(y_0, t_n) = y_0$, $\forall n$. LOGO $\bar{y} = y_0 \Rightarrow \boxed{L_\omega(y_0) \subset \{y_0\}}$

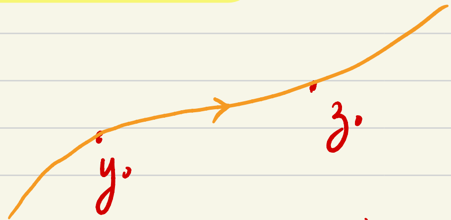
CONCLUSÃO $L_\omega(y_0) = \{y_0\}$.

DE MANEIRA ANÁLOGO, TEMOS $L_\alpha(y_0) = \{y_0\}$ $\blacksquare$

P2) Se $z_0 \in E$ está na órbita de y_0 ($\exists\, t_0$ t.q. $\phi(y_0,t_0)=z_0$).

Neste caso $L_\omega(y_0) = L_\omega(z_0)$ e $L_\alpha(y_0) = L_\alpha(z_0)$.

Demo: $L_\omega(z_0) \subset L_\omega(y_0)$



Seja $\boxed{\bar{z} \in L_\omega(z_0)}$. Logo $\exists\, t_n \to \infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(\underbrace{z_0}_{\phi(y_0,t_0)}, t_n) = \bar{z}$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(\phi(y_0,t_0), t_n) = \bar{z}$

Sabemos que $\phi_t(\phi_s(y_0)) = \phi_{t+s}(y_0)$. Logo $\phi(\phi(y_0,t_0),t_n) = \phi(y_0, t_0+t_n)$

Portanto $\bar{z} = \lim\limits_{n\to\infty} \phi(y_0, \underbrace{t_0 + t_n}_{\lim\limits_{n\to\infty}(t_0+t_n)=\infty})$. Logo $\boxed{\bar{z} \in L_\omega(y_0)}$

$\Rightarrow L_\omega(z_0) \subset L_\omega(y_0)$

$L_\omega(y_0) \subset L_\omega(z_0)$

Sabemos que $\phi(y_0, t_0) = z_0$.

Logo $\underbrace{\phi(\phi(y_0,t_0), -t_0)}_{} = \phi(z_0, -t_0)$

$= \phi(y_0, t_0 - t_0) = \phi(y_0, 0) = y_0$ $\Bigg\}$ $y_0 = \phi(z_0, -t_0)$.

Assim y_0 está na órbita de z_0 $\Rightarrow L_\omega(y_0) \subset L_\omega(z_0)$

Para os conjuntos α-limite, temos o análogo

Recordação: $\phi_t(\phi_s(y_0)) = \phi_{t+s}(y_0)$

Demo: $y(t) = \phi_t(\phi_s(y_0))$, então $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = \phi_s(y_0) \end{cases}$

$z(t) = \phi_{t+s}(y_0)$, então $\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = \phi_{0+s}(y_0) = \phi_s(y_0) \end{cases}$

$\Rightarrow y(t) = z(t)$ $\boxed{B}$

P3) O conjunto $L_\omega(y_0)$ e $L_0(y_0)$ são fechados.

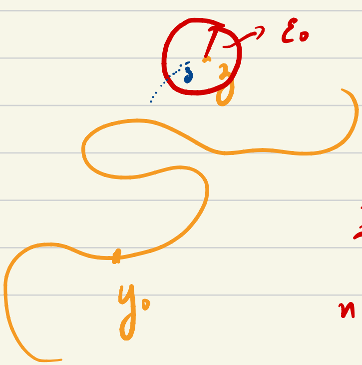
Demo: Suponha que $z \notin L_\omega(y_0)$. Logo $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ e $\tilde{t} > 0$ t.q.

$\phi(y_0, t) \notin B(z, \varepsilon_0) = \{x \in E;\ \|x - z\| < \varepsilon_0\}$, $\forall\ t > \tilde{t}$

Se $\nexists$ esse ε_0, então $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \tilde{t} > 0$, $\exists\ t > \tilde{t}$ t.q. $\phi(y_0, t) \in B(z, \varepsilon)$

Logo poderíamos escolher $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ e $\tilde{t}_n = n$ e assim poderíamos ver que $\exists\ t_n > n$ $(t_n \to \infty)$ t.q. $\phi(y_0, t_n) \in B(z, \frac{1}{n})$

$\Rightarrow z = \lim_{n \to \infty} \phi(y_0, t_n) \Rightarrow z \in L_\omega(y_0)$



Com isto, vemos que $B(z, \varepsilon_0) \cap L_\omega(y_0) = \phi$

Pois se $\exists\ \bar{z} \in B(z, \varepsilon_0) \cap L_\omega(y_0)$, então $\exists\ t_n \to \infty$ t.q. $\phi(y_0, t_n) \to \bar{z}$. Logo para n grande, teríamos $t_n > \tilde{t}$ e $\phi(y_0, t_n) \in B(z, \varepsilon_0)$.

Absurdo.

CONCLUSÃO: DADO $z \notin L_\omega(y_0)$, $\exists\, B(z, \varepsilon_0) \cap L_\omega(y_0) = \emptyset$.

ASSIM, $(L_\omega(y_0))^c$ É ABERTO $\Rightarrow$ $L_\omega(y_0)$ É FECHADO $\blacksquare$

(O ARGUMENTO PARA L_α É O MESMO)

P4) SEJA $C \subset E$ FECHADO E POSITIVAMENTE INVARIANTE. LOGO

SE $y_0 \in C$, ENTÃO $L_\omega(y_0) \subset C$. (IMPORTANTE PARA APLICAÇÃO).

OBS: 1) DIZEMOS QUE C É POSITIVAMENTE INVARIANTE SE

$$\boxed{x \in C, \text{ ENTÃO } \phi_t(x) \in C, \ \forall t \geq 0}$$

DIZEMOS QUE C É NEGATIVAMENTE INVARIANTE SE

$$\boxed{x \in C, \text{ ENTÃO } \phi_t(x) \in C, \ \forall t \leq 0}$$

OBS: 2) P4 VALE PARA α-LIMITES TROCANDO POSITIVAMENTE POR NEGATIVAMENTE INVARIANTE

DEMO: SEJA $\bar{y} \in L_\omega(y_0)$. LOGO $\exists\, t_n \to \infty$ T.Q. $\phi(y_0, t_n) \to \bar{y}$.

COMO $\phi(y_0, t_n) \in C$ E C É FECHADO, CONCLUÍMOS QUE $\bar{y} \in C$.

P5) SE y_0 PERTENCE A UMA ÓRBITA PERIÓDICA (y_0 É PONTO PERIÓDICO), ENTÃO $L_\omega(y_0)$ É A PRÓPRIA ÓRBITA PERIÓDICA. (O MESMO PARA $L_\alpha(y_0)$).

DEMO: SEJA $\mathcal{O}(y_0)$ A ÓRBITA PERIÓDICA QUE PASSA POR y_0.

$L_\omega(y_0) \subset \mathcal{O}(y_0)$

IMAGEM DE UM COMPACTO É COMPACTO

$\mathcal{O}(y_0)$ É FECHADA (SE $T>0$ É O PERÍODO, ENTÃO $\mathcal{O}(y_0) = \underbrace{\phi([0,T] \times \{y_0\})}$)

$\mathcal{O}(y_0)$ É INVARIANTE (SE $y \in \mathcal{O}(y_0)$, ENTÃO $y = \phi_s(y_0)$. LOGO $\phi_t(y) = \phi_{t+s}(y_0) \in \mathcal{O}(y_0)$)

↳ PARA ALGUM $s \in \mathbb{R}$.

PELA P4, TEMOS QUE $L_\omega(y_0) \subset \mathcal{O}(y_0)$.

$\mathcal{O}(y_0) \subset L_\omega(y_0)$

SE $z \in \mathcal{O}(y_0)$, ENTÃO $z = \phi(y_0, t_0)$. SE $T>0$ É O PERÍODO DA ÓRBITA, DEFINIMOS $t_n = t_0 + nT$. LOGO $t_n \to \infty$ E

$$\phi(y_0, t_n) = \phi(y_0, t_0 + nT) = \phi(y_0, t_0) = z.$$

$\Rightarrow z \in L_\omega(y_0)$ $\blacksquare$

P6) $L_\omega(y_0)$ É POSITIVAMENTE INVARIANTE

DEMO: QUEREMOS MOSTRAR QUE SE $z \in L_\omega(y_0)$, ENTÃO $\phi(z,t) \in L_\omega(y_0), \forall t \geq 0$

SE $z \in L_\omega(y_0)$, ENTÃO $\exists\, t_n \to \infty$ T.Q $\phi(y_0, t_n) \to z$.

LOGO $\underbrace{\phi_t\left(\lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n)\right)}_{\lim_{n\to\infty} \phi(y_0,\, t+t_n)} = \phi_t(z).$

$\boxed{\text{COMO } t+t_n \to \infty \text{ E } \phi(y_0, t+t_n) \to \phi_t(z)}$

$\Downarrow$

$\phi_t(z) \in L_\omega(y_0)$. $\blacksquare$

P7) $z \in L_\omega(y_0) \Rightarrow L_\omega(z) \subset L_\omega(y_0)$

DEMO: $L_\omega(y_0)$ É FECHADO (P3)

$L_\omega(y_0)$ É INVARIANTE (P6)

LOGO USANDO P4) PARA z E $C = L_\omega(y_0)$, CONCLUÍMOS QUE $L_\omega(z) \subset L_\omega(y_0)$. $\boxtimes$

P8) SE $\{\phi(y_0, t), t \geq 0\}$ ESTÁ CONTIDO NUM COMPACTO DE E, ENTÃO $L_\omega(y_0)$ É COMPACTO NÃO VAZIO (IMPORTANTE PARA APLICAÇÕES).

DEMO: SEJA $t_n = n$. LOGO $\phi_{t_n}(y_0)$ ESTÁ NUM COMPACTO. ASSIM $\exists$ SUBSEQUÊNCIA t_{n_j} T.Q. $\bar{y} = \lim_{j \to \infty} \phi_{t_{n_j}}(y_0)$. PORTANTO $\bar{y} \in L_\omega(y_0)$

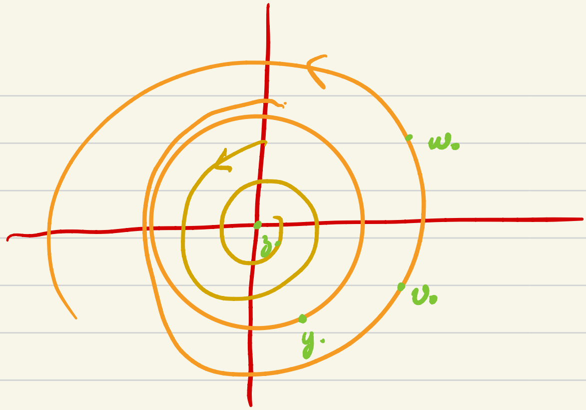
$\Rightarrow L_\omega(y_0) \neq \emptyset$.

COMO $L_\omega(y_0)$ É FECHADO POR (P3) E ESTÁ NUM COMPACTO, ENTÃO $L_\omega(y_0)$ É COMPACTO $\boxtimes$

P9) SE $L_\omega(y_0)$ É COMPACTO E $\{\phi(y_0, t), t \geq 0\}$ ESTÁ NUM COMPACTO DE E, ENTÃO $L_\omega(y_0)$ É CONEXO.

DEMO: VER DOERING/LOPES. $\boxtimes$

EXEMPLO: $r' = -r(1-r^2)$
$\theta' = 1$



$r > 0 \quad r' > 0$
$r < 0 \quad r' < 0$
$r = 0 \quad r' = 0$
$\theta = \theta_0 + t$

$L_\omega(z_0) = \{z_0\}$ $\boxed{P1}$

$L_\omega(y_0) = \partial B(0,1)$ $\boxed{P5}$

$L_\alpha(v_0) = L_\alpha(w_0)$ $\boxed{P2}$

ω-LIMITES $\{z_0\}$ OU $\partial B(0,1)$ SÃO FECHADOS $\boxed{P3}$

CONJUNTO POSITIVAMENTE INVARIANTE É, EXEMPLO, $\overline{B(0,1)}$.

OS CONJUNTOS $L_\omega(y_0) \subset \overline{B(0,1)}$, SE $y_0 \in \overline{B(0,1)}$ $\boxed{P4.}$

$\{z_0\}$, $\partial B(0,1)$ SÃO POSITIVAMENTE INVARIANTES $\boxed{P6.}$

SE $y_0 \in \overline{B(0,1)}$, ENTÃO $\{\phi(y_0,t), t \geq 0\} \subset \overline{B(0,1)}$.

LOGO $L_\omega(y_0)$ É COMPACTO E CONEXO. DE FATO, ELE É $\partial B(0,1)$ OU $\{z_0\}$.

$\boxed{P8 \text{ E } P9}$

Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1. Seja $y_0 \in \mathbb{R}^2$.
Se $\{\phi(y_0, t), t \geq 0\}$ é limitado e $L_\omega(y_0)$ não contém pontos singulares, então $L_\omega(y_0)$ é órbita periódica.

Observações: Se $\{\phi(y_0, t), t \geq 0\}$ é limitado, então
$\{\phi(y_0, t), t \geq 0\} \subset \overline{B(0,R)} = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| \leq R\}$.

Logo por P8) sabemos que $L_\omega(y_0)$ é não vazio.

Teorema diz: Ou $L_\omega(y_0)$ tem singularidade
Ou $L_\omega(y_0)$ é uma órbita periódica

Exemplo: $r' = -r(1-r^2)$, $\theta' = 1$; $r' = r(1-r^2)$, $\theta' = 1$

$L_\omega(y_0) = \{y_0\}$

$L_\omega(y_0) = \partial B(0,1)$.

EXEMPLO: $y' = y(1-y)$

$L_\omega(y_0) = \{1\}$
$L_\alpha(y_0) = \{0\}$ SÃO SINGULARIDADES.

APLICAÇÃO: (IMPORTANTE)

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)\left(x(t)^2 + y(t)^2 - 3x(t) - 1\right) - y(t) \\ y'(t) = -y(t)\left(x(t)^2 + y(t)^2 - 3x(t) - 1\right) + x(t) \end{cases}$$

RASCUNHO

$$\begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r,\theta) \\ g(r,\theta) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{INVERTE}}\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

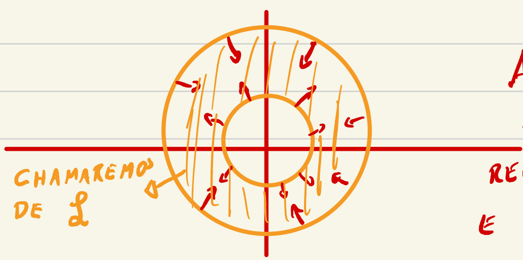
$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - 3r\cos\theta - 1) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

$r > 0$ $\qquad r^2 - 3r\cos\theta - 1 = r^2\Big(\underbrace{1 - \frac{3\cos\theta}{r} - \frac{1}{r^2}}_{>0}\Big). > 0$

PARA r GRANDE $r' < 0$

PARA r PEQUENO $r^2 - 3r\cos\theta - 1 < 0 \Rightarrow r' > 0$



A ÓRBITA QUE ENTRA NA REGIÃO LARANJA $\mathcal{L}$ FICA LÁ. LOGO ESTA REGIÃO É POSITIVAMENTE INVARIANTE E FECHADA.

Se $y_0 \in \mathcal{L}$, então $L_\omega(y_0) \in \mathcal{L}$.

Como $\nexists$ singularidade nesta região, concluímos que

$L_\omega(y_0)$ é órbita periódica.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Podemos usar Poincaré-Bendixson para provar existência de órbitas periódicas}}$