OBJETIVO: ENUNCIAR E ENTENDER TEO. POINCARÉ-BENDINXSON

ONTEM: TEO. BENDINXSON $y' = f(y(t))$. SE TEM ÓRBITA PERIÓDICA E

$f: E \to \mathbb{R}^2$, f C^1, E SIMPLESMENTE CONEXO (SEM BURACO), ENTÃO

i) $\nabla \cdot f = 0$ EM UM ABERTO DE E — $\exists$ ÓRBITA PERIÓDICA $\not\Leftarrow$ $\Downarrow$

ii) $\nabla \cdot f$ MUDA DE SINAL — CERTAS CONDIÇÕES SÃO SATISFEITAS

CUIDADO: $y' = Ay$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f(y_1, y_2) = (y_2, 0) \Rightarrow \nabla \cdot f = 0$. MAS

NÃO EXISTE ÓRBITA PERIÓDICA.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 1) SEJA $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ — $\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) + \frac{\partial}{\partial y}(cx + dy) = a + d$

$\nabla \cdot f(x,y) = a + d$ NÃO MUDA DE SINAL. (ii) NÃO VALE).

LOGO SE $a + d \neq 0 \Rightarrow \nabla \cdot f$ NÃO É IGUAL A ZERO EM NENHUM ABERTO (i) NÃO VALE)

$\Rightarrow$ SE $a + d \neq 0$ ($Tr(A) \neq 0$), ENTÃO $\nexists$ ÓRBITA PERIÓDICA.

EXEMPLO 2) $(x', y') = (-x + y^3, 2y + x^3)$

$f(x,y) = (-x + y^3, 2y + x^3) \Rightarrow \nabla \cdot f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x + y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2y + x^3)$

$= -1 + 2 = 1 \neq 0$

NÃO MUDA SINAL
SEMPRE $\neq 0$ $\Big\} \Rightarrow \nexists$ ÓRBITA PERIÓDICA.

Teorema de Poincaré-Bendixson

Vamos precisar entender conjuntos ω-limite e α-limite.

Definição: Seja $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Consideremos o problema $y'(t) = f(y(t))$. Seja $y_0 \in E$. (ponto qualquer)

1) Se o intervalo máximo de solução de $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = y_0$ contiver $[0, \infty[$ (a solução está bem definida $\forall\, t \geq 0$), então definimos

$$L_\omega(y_0) = \left\{ \bar{y} \in E;\ \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ e } y(t_n) \to \bar{y} \right\}$$
$$= \left\{ \bar{y} \in E;\ \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n) = \bar{y} \right\}.$$

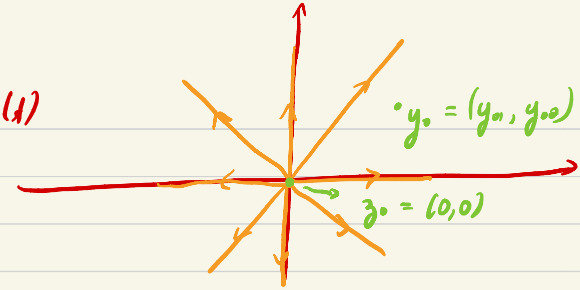
$L_\omega(y_0)$ é chamado de conjunto ω-limite de y_0.

2) Se a solução de $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = y_0$ estiver bem definida em $]-\infty, 0]$, então

$$L_\alpha(y_0) = \left\{ \bar{y} \in E,\ \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \phi(y_0, t_n) = \bar{y} \right\}$$

$L_\alpha(y_0)$ é chamado de conjunto α-limite de y_0.

EXEMPLOS: 1) $y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A} y(t)$



$$\phi_t(y_0) = e^{tA} y_0 = (e^t y_{01}, e^t y_{02}).$$

SE t_n É SEQUÊNCIA TAL QUE $t_n \to \infty$ $\quad \phi_{t_n}(y_0) \to \infty$

SE t_n É SEQUÊNCIA TAL QUE $t_n \to -\infty$ $\quad \phi_{t_n}(y_0) \to 0$

$$L_\omega(y_0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2;\ \exists\ t_n \to \infty,\ \underbrace{\phi_{t_n}(y_0) \to \bar{y}}_{\text{NESTE EXEMPLO, NUNCA CONVERGE}}\} = \emptyset.$$

$y_0 \neq (0,0)$

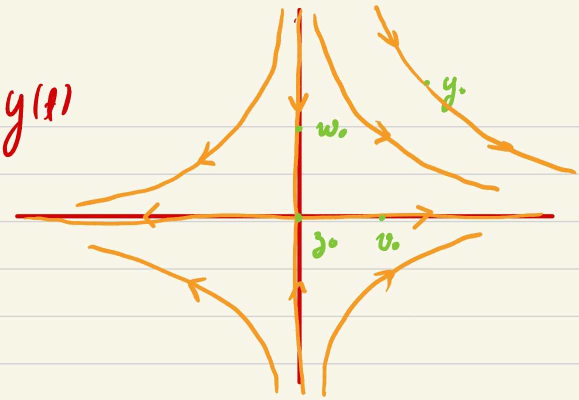
$$L_\alpha(y_0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2,\ \exists\ t_n \to -\infty,\ \underbrace{\phi_{t_n}(y_0) \to \bar{y}}_{\text{NESTE EXEMPLO, SEMPRE CONVERGE PARA ZERO}}\} = \{0\}$$

$$L_\omega(z_0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2;\ \exists\ t_n \to \infty,\ \phi_{t_n}(z_0) \to \bar{y}\} = \{z_0\} = \{(0,0)\}.$$

↳ NESTE EXEMPLO, $\phi_{t_n}(z_0) = z_0,\ \forall t_n$. $\quad z_0 = (0,0)$.

$$L_\alpha(z_0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2;\ \exists\ t_n \to -\infty,\ \phi_{t_n}(z_0) \to \bar{y}\} = \{z_0\}$$

EXEMPLO 2 $\quad y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y(t)$



$\underline{y_0}$ $\quad \|\phi_t(y_0)\| \to \infty$, $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$. Logo $t_n \to \infty$ ou $t_n \to -\infty$
$\nexists \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y_0)$.

$L_\omega(y_0) = L_\alpha(y_0) = \phi$.

$\underline{z_0}$ $\quad \phi_t(z_0) = z_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo se $t_n \to \infty$ ou $t_n \to -\infty$, então $\phi_{t_n}(z_0) = z_0$

$L_\omega(z_0) = L_\alpha(z_0) = \{z_0\}$.

$\underline{v_0}$ $\quad \|\phi_t(v_0)\| \to \infty$, $t \to \infty$ e $\phi_t(v_0) \to 0$, $t \to -\infty$.

Logo se $t_n \to \infty \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(v_0)$, se $t_n \to -\infty$, $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(v_0) = 0$

$L_\omega(v_0) = \phi$, $L_\alpha(v_0) = \{z_0\} = \{(0,0)\}$.

$\underline{w_0}$ $\quad \|\phi_t(w_0)\| \to \infty$, $t \to -\infty$, e $\phi_t(w_0) \to 0$, $t \to +\infty$

Se $t_n \to -\infty$, $\nexists \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(w_0)$. Se $t_n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(w_0) = \{(0,0)\}$

$L_\omega(w_0) = \{(0,0)\}$, $L_\alpha(w_0) = \phi$.

Exemplo 3

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t)$$

$L_\omega(z_0) = L_\alpha(z_0) = \{(0,0)\}$. , pois $\phi_t(z_0) = z_0$.

Vamos agora calcular $L_\omega(y_0)$.

Antes de + nada, se $y_0 = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, então $\boxed{\phi_t(y_0) = (R\cos(t+\theta), R\sin(t+\theta))}$.

Se $\bar{y} \in L_\omega(y_0)$, então $\exists\, t_n \to \infty$ t.q. $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(R\cos(t_n+\theta), R\sin(t_n+\theta))}_{\phi_{t_n}(y_0)}$.

Como $\|\phi_{t_n}(y_0)\| = R \Rightarrow \|\bar{y}\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y_0)\| \overset{\text{norma é função contínua}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\|\phi_{t_n}(y_0)\|}_{= R} = R$.

Conclusão: $\boxed{L_\omega(y_0) \subset \partial B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| = R\}}$.

Seja $\bar{y} \in \partial B(0,R)$. Logo $\bar{y} = (R\cos(\psi), R\sin(\psi))$, $\psi \in [0, 2\pi]$.

Seja $t_n = \psi - \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Logo $t_n \to \infty$ e

$$\phi_{t_n}(y_0) = (R\cos(t_n+\theta), R\sin(t_n+\theta)) = (R\cos(\psi - \theta + 2\pi n + \theta), R\sin(\psi - \theta + 2\pi n + \theta))$$

$$= (R\cos(\psi + 2\pi n), R\sin(\psi + 2\pi n)) = (R\cos\psi, R\sin\psi) = \bar{y}$$

Logo $\bar{y} \in L_\omega(y_0)$

Conclusão: $\boxed{\partial B(0,R) \subset L_\omega(y_0)}$

Resultado final

$\boxed{L_\omega(y_0) = \partial B(0,R)}$

Da mesma forma $L_\alpha(y_0) = \partial B(0,R)$.

EXEMPLOS NÃO LINEARES

EXEMPLO 4

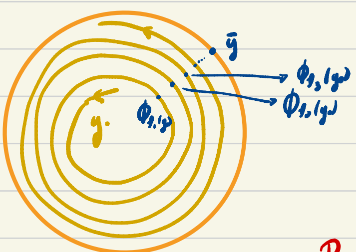
$$\begin{cases} x' = -y + x(1-x^2-y^2) \\ y' = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ll} r > 1 & r' < 0 \\ r = 1 & r' = 0 \\ r < 1 & r' > 0 \\ \theta = \theta_0 + t & \end{array}\right)$$

$\rightarrow \partial B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| = 1\}$

$\underline{z_0}$ $\quad L_\omega(z_0) = L_\alpha(z_0) = z_0$, z_0 É SINGULARIDADE

$\underline{y_0}$ $\quad \phi_t(y_0) \to (0,0)$ SE $t \to -\infty$ $\Rightarrow L_\alpha(y_0) = \{(0,0)\}$.



DADO $\bar{y} \in \partial B(0,1)$, PODEMOS ACHAR $t_n \to \infty$ T.Q

$\phi_{t_n}(y_0) \to \bar{y}$. $\Rightarrow \boxed{\partial B(0,1) \subset L_\omega(y_0)}$

POR OUTRO LADO, SE $t_n \to \infty$ E $\phi_{t_n}(y_0) \to \bar{y}$,

ENTÃO $\|\bar{y}\| = \lim_{n\to\infty} \|\phi_{t_n}(y_0)\| = 1 \Rightarrow \bar{y} \in \partial B(0,1)$

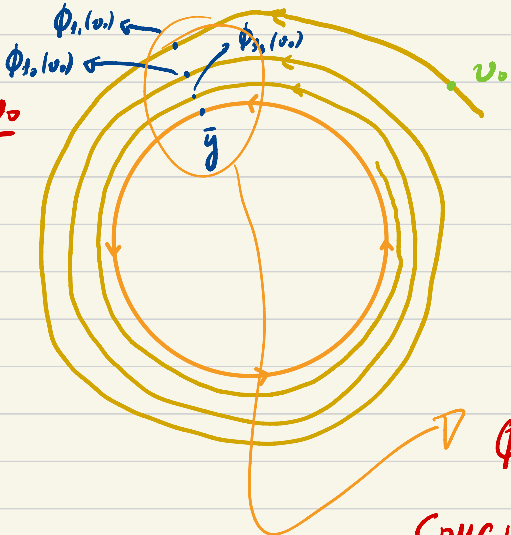
$\Rightarrow \boxed{L_\omega(y_0) \subset \partial B(0,1).}$

CONCLUSÃO $\quad L_\omega(y_0) = \partial B(0,1)$

w_0. A solução é $(\cos(t+\theta), \sin(t+\theta))$

Logo $L_\alpha(w_0) = L_\omega(w_0) = \partial B(0,1)$. (Mesmo argumento do exemplo 3)

v_0



Se $t_n \to \infty$, $\phi_{t_n}(v_0) \to \bar{y} \Rightarrow \|\bar{y}\| = \underbrace{\lim \|\phi_{t_n}(v_0)\|}_{=1}$

Logo $L_\omega(v_0) \subset \partial B(0,1)$

Se $\bar{y} \in \partial B(0,1)$, então $\exists\, t_n \to \infty$ t.q. $\phi_{t_n}(v_0) \to \bar{y}$. Logo $\partial B(0,1) \subset L_\omega(v_0)$.

Conclusão $L_\omega(v_0) = \partial B(0,1)$.

Como $\|\phi_t(v_0)\| \to \infty$, $t \to -\infty$, então $\underline{L_\alpha(v_0) = \emptyset}$.

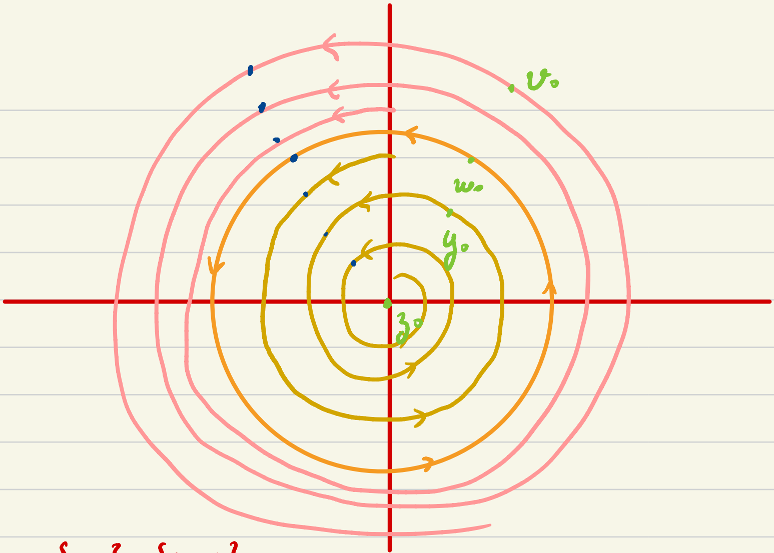
OBS: Na verdade $L_\alpha(v_0)$ sequer está bem definido, pois as soluções não estão definidas $\forall\, t < 0$.

EXEMPLO 5

$$\begin{cases} r' = -r(1-r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

$r < 1 \quad r' < 0$

$r > 1 \quad r' > 0$



$\underline{z_0}$ $\quad L_\omega(z_0) = L_\alpha(z_0) = \{z_0\} = \{(0,0)\}$

$\underline{y_0}$ $\quad L_\omega(y_0) = \{(0,0)\}$, $\quad \phi_t(y_0) \to (0,0)$, $t \to +\infty$

$\quad L_\alpha(y_0) = \partial B(0,1)$.

$\underline{w_0}$ $\quad L_\omega(w_0) = L_\alpha(w_0) = \partial B(0,1)$

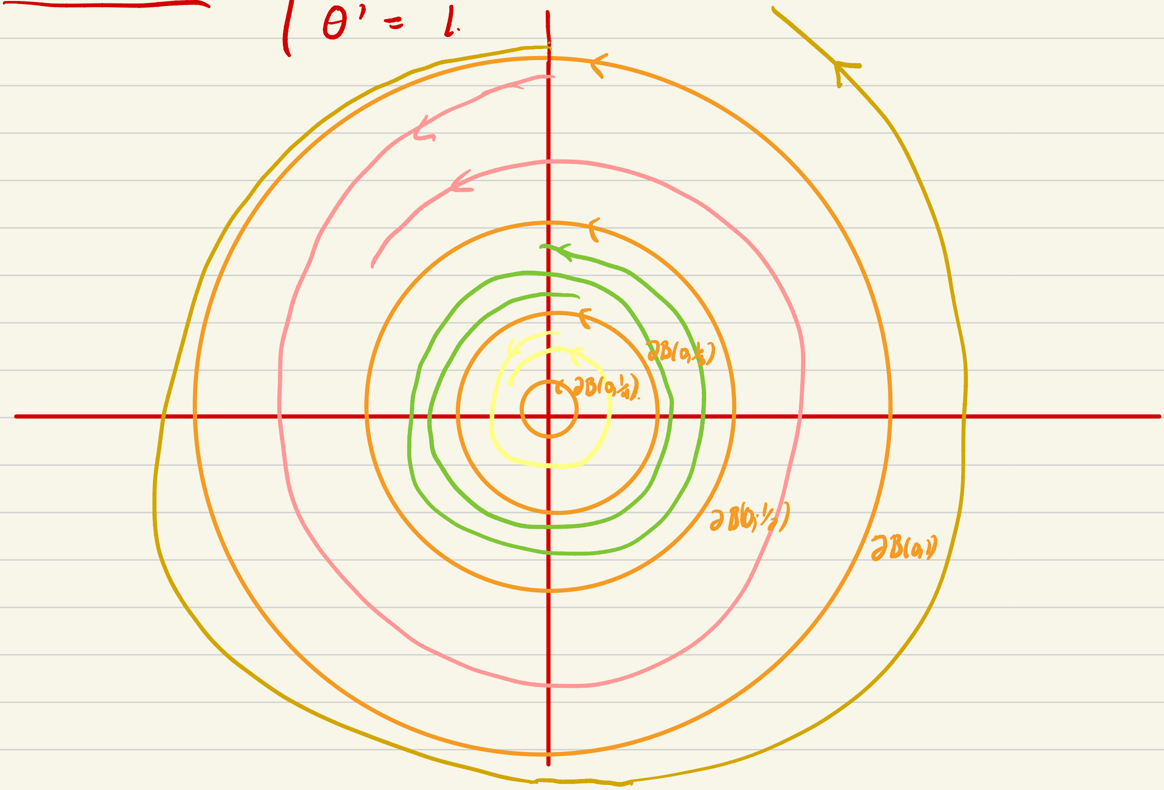
$\underline{v_0}$ $\quad L_\alpha(v_0) = \partial B(0,1)$

$\quad L_\omega(v_0) = \emptyset$ $\quad , \|\phi_t(v_0)\| \to \infty$, $t \to \beta$.

EXEMPLO 6

$$\begin{cases} r' = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{r} = n\pi \Leftrightarrow r = \frac{1}{n}$$



y_0

$\|y_0\| > 1.$ $\qquad L_\omega(y_0) = \emptyset$

$\qquad L_\alpha(y_0) = \partial B(0,1)$

$\|y_0\| = 1$ $\qquad L_\omega(y_0) = L_\alpha(y_0) = \partial B(0,1).$

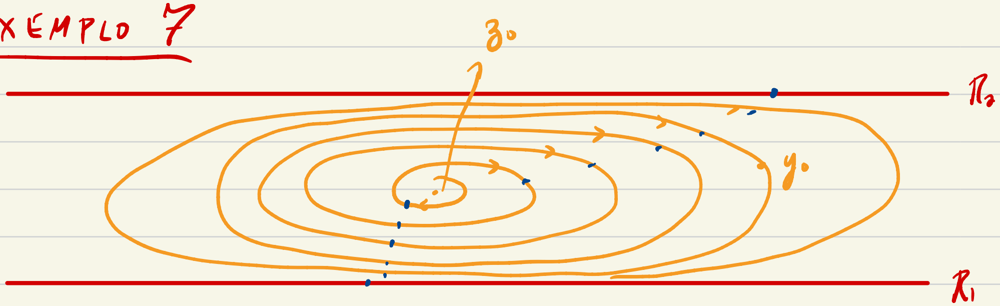
$\frac{1}{2} < \|y_0\| < 1$ $\qquad L_\omega(y_0) = \partial B(0,\frac{1}{2})$

$\qquad L_\alpha(y_0) = \partial B(0,1)$

$\|y_0\| = \frac{1}{2}$ $\qquad L_\omega(y_0) = L_\alpha(y_0) = \partial B(0,\frac{1}{2})$

$\frac{1}{3} < \|y_0\| < \frac{1}{2}$ $\qquad L_\omega(y_0) = \partial B(0,\frac{1}{3})$, $L_\alpha(y_0) = \partial B(0,\frac{1}{3})$

EXEMPLO 7



O CONJUNTO $L_\alpha(y_0) = \{z_0\}$

$L_\omega(z_0) = R_1 \cup R_2$, R_1 E R_2 SÃO AS RETAS EM VERMELHO DA FIGURA.

SE A SOLUÇÃO NÃO FOR LIMITADA, OS CONJUNTOS L_ω OU L_α PODEM SER DESCONEXOS E ILIMITADOS.

PARA FINALIZAR

TEOREMA POINCARÉ BENDIXSON

SEJA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DE CLASSE C^1. E $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$.

SE $y(t)$ ESTÁ BEM DEFINIDA PARA TODO $t \geq 0$, $\{y(t), t \geq 0\}$ É LIMITADO E $L_\omega(y_0)$ NÃO TEM PONTOS CRÍTICOS, ENTÃO L_ω É UMA ÓRBITA PERIÓDICA.