DICAS E RESPOSTAS DA LISTA DE EXERCÍCIOS 5 EDO II - MAP 0316

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDO2

Os exercícios a seguir foram selecionados dos livros dos autores Claus Doering-Artur Lopes e Jorge Sotomayor. (S.X.Y) indica exercício Y do capítulo X do livro do Sotomayor. (D.L.X.Y) indica exercício Y do capítulo X do livro dos autores Claus Doering e Artur Lopes.

Para a resolução de alguns dos exercícios podem ser usados tanto as funções de Liapunov como os critérios de estabilidade usando os autovalores de $Df(x)$.

Exercício 1 (S.5.10)

Considere uma partícula movendo-se sob a influência de uma função potencial $P : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2, em que $E \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto. Temos então a seguinte EDO:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\nabla P(x) \end{cases}.$$

Usando funções de Liapunov, prove o Teorema de Lagrange, segundo o qual uma singularidade $(x_0, 0)$ da EDO acima é estável se x_0 for um mínimo local estrito de P.

Resolução:

Seja $f(x, v) = (v, -\nabla P(x))$.

Suponha que x_0 é um mínimo local estrito de P. Logo existe uma vizinhança aberta W de x_0 tal que $P(x) > P(x_0)$ se $x \in W \setminus \{x_0\}$. Seja $V : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $V(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + P(x) - P(x_0)$. Logo $V(x, v) > 0$, se $(x, v) \neq (x_0, 0)$ e $V(x_0, 0) = 0$. Além disso,

$$\langle \nabla V(x, v), f(x, v)\rangle = \langle (\nabla P(x), v), (v, -\nabla P(x))\rangle = v.\nabla P(x) - v.\nabla P(x) = 0.$$

Concluímos que V é um função de Liapunov. Logo $(x_0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

Exercício 2 (D.L.5.26)

Encontre uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ do sistema

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2^2 \\ x_2' = -x_2 - x_1^2 \end{cases}.$$

Resolução:

Seja $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Logo $V(x) > 0$ se $x \neq 0$ e $V(0) = 0$. Além disso,

$$\langle \nabla V(x), f(x)\rangle = \left\langle (x_1, x_2), \left(-2x_1 - x_2^2, -x_2 - x_1^2\right)\right\rangle = -2x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2^2 - x_1^2x_2 = -x_1^2(2 + x_2) - x_2^2(1 + x_1) < 0,$$

se $(x_1, x_2) \neq 0$, $x_2 > -2$ e $x_1 > -1$. Em particular $V : B_1(0) \to \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov estrita, em que $B_1(0) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$.

Exercício 3 (D.L.5.27)

Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1 g(x_1, x_2) \\ x_2' = -x_1 - x_2 g(x_1, x_2) \end{cases}$$

em $\mathbb{R}^2$, onde $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2)$ é analítica na origem e satisfaz $g(0, 0) = 0$ e $g(x_1, x_2) \geq 0$ numa vizinhança de $(0, 0)$. Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio estável mostrando que $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é uma função de Liapunov.

Resolução:

Seja $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1 g(x_1, x_2), -x_1 - x_2 g(x_1, x_2))$. Defino $W \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança da origem tal que $g(x_1, x_2) \geq 0$, se $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Seja $V : W \to \mathbb{R}$ dado por $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Logo $V(x) > 0$, se $x \neq 0$ e $V(0) = 0$. Além disso,

$$\langle \nabla V(x_1, x_2), f(x_1, x_2)\rangle = \langle (x_1, x_2), (x_2 - x_1 g(x_1, x_2), -x_1 - x_2 g(x_1, x_2))\rangle =$$

$$x_1x_2 - x_1^2 g(x_1, x_2) - x_2x_1 - x_2^2 g(x_1, x_2) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) g(x_1, x_2) \leq 0.$$

Logo $V : W \to \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov e $(0,0)$ é uma singularidade estável.

Exercício 4 (D.L.5.28)
Dado o sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 z + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2z^2 \\ z' = -x_1^2 - zx_2 \end{cases}$$

em $\mathbb{R}^3$, mostre que todas as suas soluções estão definidas em toda reta real e verifique se a solução pela origem é de equilíbrio estável ou assintoticamente estável.

Resolução: Definimos o seguinte produto interno $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Logo se $f(x_1,x_2,z) = \left(2x_1z + x_2, -x_1 + 2z^2, -x_1^2 - zx_2\right)$, então

$$\langle (x_1,x_2,z), f(x_1,x_2,z)\rangle = (2x_1z + x_2)\,x_1 + \left(-x_1 + 2z^2\right)x_2 + 2\left(-x_1^2 - zx_2\right)z =$$

$$2x_1^2z + x_2x_1 - x_1x_2 + 2z^2x_2 - 2x_1^2z - 2z^2x_2 = 0.$$

Assim se $x : I \to \mathbb{R}^3$ é uma solução de $x' = f(x)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t))$, então a função $t \in I \mapsto \langle x(t), x(t)\rangle$ é constante, pois $\frac{d}{dt}\langle (x_1(t),x_2(t),z(t)),(x_1(t),x_2(t),z(t))\rangle = 0$. Logo todas as órbitas estão confinadas num elipsoide e, portanto, em um compacto. Logo o intervalo máximo de todas elas é $\mathbb{R}$. A estabilidade segue facilmente daí. Basta achar elípsoides próximos a origem.

Note, no entanto, que 0 é um ponto estável, mas não assintoticamente estável. De fato, se as soluções $t \mapsto x(t)$ estão confinadas num elisóide, então não temos $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Exercício 5 (S.5.1)
Prove que a origem é um ponto singular assintoticamente estável do sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{x^3}{3} - 2sen(y) \\ y' = -y - \frac{y^3}{3} \end{cases}.$$

Faça de duas maneiras: Achando os autovalores de $Df(0)$ e achando uma função de Liapunov apropriada.
Resolução:
Primeiro Método: Autovalores.
Neste caso calculamos $Df(x,y)$, obtendo

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -1-x^2 & -2cos(y) \\ 0 & -1-y^2 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores são iguais a -1, concluímos que a singularidade é assintoticamente estável.
Segundo Método: Usando funções de Liapunov.
Seja $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Assim

$$\langle \nabla V(x,y), f(x,y)\rangle = \left\langle (x,y), \left(-x - \frac{x^3}{3} - 2sen(y), -y - \frac{y^3}{3}\right)\right\rangle =$$

$$-x^2 - \frac{x^4}{3} - 2xsen(y) - y^2 - \frac{y^4}{3} = -\frac{1}{3}\left(x^4 + y^4\right) - \left(x^2 + 2xsen(y) + y^2\right) \leq$$

$$-\frac{1}{3}\left(x^4 + y^4\right) < 0, \text{ se } (x,y) \neq (0,0).$$

Acima usamos que $x^2 + 2xsen(y) + y^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$.

Como V é uma função de Liapunov estrita para f em 0, concluímos que a origem é um ponto de singularidade assintoticamente estável.

Exercício 6 (D.L.5.30)
Sejam A e B matrizes tais que A é simétrica com todos os autovalores negativos e B é antissimétrica, isto é, $B^* = -B$. Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio estável para o sistema linear $x' = (A+B)\,x$ em $\mathbb{R}^n$ usando para isto a função de Liapunov $V(x) = \langle x, x\rangle = x_1^2 + ... + x_n^2$.
(Dica: Use o seguinte fato: Se A é simétrica, existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$, D diagonal e $P^* = P^{-1}$)
Resolução:

Vemos que $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq 0$. Agora vamos mostrar que $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$, em que $f(x) = (A+B)\,x$. De fato,

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \langle 2x, Ax + Bx \rangle = 2\,\langle x, Ax \rangle + 2\,\langle x, Bx \rangle\,.$$

Basta agora observar que

$$\langle x, Bx \rangle = \langle B^* x, x \rangle = -\,\langle Bx, x \rangle = -\,\langle x, Bx \rangle \implies \langle x, Bx \rangle = 0.$$

Como A é simétrica e todos os autovalores são negativos, então existe $P \in M_n(\mathbb{R}^n)$ inversível e ortogonal tal que $P^{-1}AP = D$ e $P = P^*$, em que D é uma matriz diagonal com todos os elementos diagonais menores do que zero. Assim $\langle Dx, x \rangle < 0$. (Basta observar que se D é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são λ_1,...,λ_n e $x = (x_1, ..., x_n)$, então

$$\langle Dx, x \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n^2 x_n^2 < 0, \text{ se } x \neq 0.)$$

Logo

$$\langle x, Ax \rangle = \left\langle x, PDP^{-1}x \right\rangle = \left\langle P^* x, DP^{-1}x \right\rangle = \left\langle P^{-1}x, DP^{-1}x \right\rangle < 0.$$

Exercício 7 (D.L.5.31)

Consideremos a equação $x' = f(x)$, em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \in E$. Suponha que a equação em coordenadas polares é conjugada à equação $(r', \theta') = (g(r), 1)$, em que $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(r_n) = 0$ para todo r_n, em que $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $]0, \infty[$ tal que $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$. Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio estável para a equação diferencial $x' = f(x)$.

Resolução: Observe que para cada r_n temos uma órbita periódica de raio r_n. Assim dado U uma vizinhança da origem, escolho r_n tal que $\overline{B_{r_n}(0)} \subset U$. Se $x \in B_{r_n}(0)$, então, como a borda da bola $B_{r_n}(0)$ é uma órbita periódica e como órbitas distintas não se cruzam (por unicidade), concluímos que a órbita passando pelo ponto x está contida em $B_{r_n}(0)$. Como ela não sai do compacto $\overline{B_{r_n}(0)}$, concluímos que a solução que passa por x está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, o intervalo máximo é $\mathbb{R}$.

Em particular, concluímos que $\phi(t, x) \in B_{r_n}(0) \subset U$ para todo $t \geq 0$. Logo 0 é ponto de estabilidade estável.

Exercício 8 (D.L.5.32)

Mostre que se para um campo de vetores $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 existe uma função de Liapunov estrita $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida em todo o espaço de fase, então f não possui órbitas periódicas.

Resolução:

Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma órbita periódica, então existe $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ para todos $t \in \mathbb{R}$. Logo, se V é uma função de Liapunov estrita, obtemos

$$V(x(t)) = V(x(t+T)) < V(x(t)).$$

Absurdo. Logo a órbita periódica não existe.

Exercício 9 (D.L.5.33)

Usando uma função de Liapunov, mostre que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2 sen(x_2) \\ x_2' = -x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \end{cases}.$$

Resolução:

Seja $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Logo $V(x) > 0$, se $x \neq 0$ e $V(0) = 0$. Além disso,

$$\left\langle \nabla V(x_1, x_2), \left(-x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2 sen(x_2), -x_2 - \frac{1}{3}x_2^3\right) \right\rangle = \left\langle (x_1, x_2)\,, \left(-x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2 sen(x_2), -x_2 - \frac{1}{3}x_2^3\right) \right\rangle =$$

$$-x_1^2 - \frac{1}{3}x_1^4 - x_1^3 sen(x_2) - x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^4 = -x_1^2\left(1 + \frac{1}{3}x_1^2 + x_1 sen(x_2)\right) - x_2^2\left(1 + \frac{1}{3}x_2^4\right) < 0$$

se $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Logo $V : B_1(0) \to \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov estrita. Portanto a origem é assintoticamente estável.

Exercício 10 (D.L.5.29)

Mostre que o sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 + x_1 e^{x_1^2+x_2^2} \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + x_2 e^{x_1^2+x_2^2} \end{cases}.$$

em $\mathbb{R}^2$, tem um único ponto de equilíbrio e uma única órbita periódica. Estude a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Resolução:

Vamos colocar a equação acima em coordenadas polares. Seja $x_1 = rcos\theta$ e $x_2 = rsen\theta$. Assim

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = -2rcos\theta - rsen\theta + rcos\theta e^{r^2} \\ r'sen\theta + rcos\theta\theta' = rcos\theta - 2rsen\theta + rsen\theta e^{r^2} \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2rcos\theta - rsen\theta + rcos\theta e^{r^2} \\ rcos\theta - 2rsen\theta + rsen\theta e^{r^2} \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} rcos\theta & rsen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix},$$

concluímos que

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} rcos\theta & rsen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2rcos\theta - rsen\theta + rcos\theta e^{r^2} \\ rcos\theta - 2rsen\theta + rsen\theta e^{r^2} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} -2r^2cos^2\theta - r^2cos\theta sen\theta + r^2cos^2\theta e^{r^2} + r^2sen\theta cos\theta - 2r^2sen^2\theta + r^2sen^2\theta e^{r^2} \\ 2rsen\theta cos\theta + rsen^2\theta - rsen\theta cos\theta e^{r^2} + rcos^2\theta - 2rsen\theta cos\theta + rsen\theta cos\theta e^{r^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r\left(e^{r^2} - 2\right) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim temos

$$\begin{cases} r' = r\left(e^{r^2} - 2\right) \\ \theta' = 1 \end{cases}.$$

Usando coordenadas cartesianas, vemos que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio. Usando coordenadas polares, concluímos que $(0,0)$ é o único ponto de equilíbrio, pois f fora de uma reta $\{rcos(\theta_0), rsen(\theta_0);\, r \geq 0\}$ é conjugado a $\tilde{f} :]0,\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, em que $\tilde{f}(r,\theta) = \left(r\left(e^{r^2} - 2\right), 1\right)$. No entanto, $\tilde{f}(r,\theta)$ nunca é igual a $(0,0)$.

Vemos também que se $r = \sqrt{\ln(2)}$, então $r' = 0$. Logo

$$t \in \mathbb{R} \to \left(\sqrt{\ln(2)}cos\left(\sqrt{\ln(2)}t\right), \sqrt{\ln(2)}sen\left(\sqrt{\ln(2)}t\right)\right)$$

é uma órbita periódica. Ela é única, pois se $r > \sqrt{\ln(2)}$, então a função $t \mapsto r(t)$ é estritamente crescente e se $r < \sqrt{\ln(2)}$, então a função $t \mapsto r(t)$ é estritamente decrescente. Logo órbitas periódicas não podem existir nestes casos.

Exercício 11 (D.L.5.35)

Ache as singularidades e classifique-as em estáveis, assintoticamente estáveis e instáveis. Desenhe o retrato de fase do campo $x' = -\nabla V(x)$, onde $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por

(a) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$,

Resolução:

Neste caso $f(x) = -\nabla V(x)$ é dado por $f(x_1, x_2) = (-2x_1, -4x_2)$. A origem é a única singularidade. Ela é assintoticamente estável pois $Df(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Logo todos os autovalores são negativos.

(b)$V(x_1, x_2) = x_2 sen(x_1)$,

Resolução:

Neste caso $f(x) = -\nabla V(x)$ é dado por $f(x_1, x_2) = (-x_2cos(x_1), -sen(x_1))$. As singularidades são $x_1 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, e $x_2 = 0$. Vamos achar $Df = -D^2V$

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2sen(x_1) & -cos(x_1) \\ -cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \implies Df(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n \\ -(-1)^n & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo os autovalores são ± 1. Assim as singularidades são instáveis (Por Grobman-Hartman, qualitativamente temos algo semelhante a uma sela na vizinhança das singularidades);

(c)$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

Resolução:

Neste caso $f(x) = -\nabla V(x)$ é dado por $f(x_1, x_2) = (-2x_1, -2x_2, -2x_3)$. A origem é a única singularidade. Ela é assintoticamente estável pois $Df(x) = -2I$, em que I é a identidade. Logo todos os autovalores são negativos.

(d)$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 5$,

Resolução:

Vemos que $-\nabla V(x) = (-2x_1 + 2, 2x_2 - 4)$. Logo o único ponto de equilíbrio é $(1, 2)$. Observemos que

$$D^2V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo $Df(x) = -D^2V(x)$ tem um autovalor positivo: 2. Assim a singularidade é instável.

(e) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(x_1 - 1) + x_2^2(x_2 - 2) + x_3^2$

Resolução:

Vemos que $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_1^2 + x_2^3 - 2x_2^2 + x_3^2$

Neste caso $f(x) = -\nabla V(x)$ é dado por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(-3x_1^2 + 2x_1, -3x_2^2 + 4x_2, -2x_3\right) = \left(x_1(-3x_1 + 2), x_2(-3x_2 + 4), -2x_3\right).$$

As singularidades são $(0, 0, 0)$, $\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$. Observamos que

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -6x_1 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6x_2 + 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, Df\left(0, \frac{4}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, Df\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vemos assim que $(0, 0, 0)$ e $\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$ são instáveis e $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$ é assintoticamente estável.

Exercício 12 (D.L.5.38)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um campo de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ com $f'(0) = 0$. Mostre que

(a) 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f se f é estritamente decrescente ($t > s \implies f(t) < f(s)$) em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x) = -\int_0^x f(s)ds.$$

Assim $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = -f(x)^2 < 0$, se $x \neq 0$. Além disso, $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq 0$.

Como V é função de Liapunov estrita, concluímos que 0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

(b) 0 é um ponto de equilíbrio instável de f se f é estritamente crescente ($t > s \implies f(t) > f(s)$) em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

Assim $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = f(x)^2 > 0$. Além disso, $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq 0$. Usamos agora o resultado do exercício 16 e concluímos que 0 é ponto de equilíbrio instável.

(c) 0 é um ponto de equilíbrio instável de f se f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, \infty[$. Analise o retrato de fase em $\mathbb{R}$ nos três casos acima.

Resolução:

Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

Assim $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = f(x)^2 > 0$. Além disso, $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x > 0$. Usamos agora o resultado do exercício 16 e concluímos que 0 é ponto de equilíbrio instável.

Exercício 13 (S.5.2)

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $\langle x, f(x)\rangle < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Prove que $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $V(x) = \|x\|^2$ é uma função de Liapunov estrita para o sistema $x' = f(x)$ em $x = 0$.

Resolução:

Basta observar que $V(x) > 0$, se $x \neq 0$, e $V(0) = 0$. Por fim, observemos que $\langle \nabla V(x), f(x)\rangle = 2\langle x, f(x)\rangle < 0$ se $x \neq 0$. Concluímos assim que V é uma função de Liapunov estrita e 0 é uma singularidade assintoticamente estável.

Exercício 14 (S.5.14)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. Considere o sistema

$$x'' + ax' + f(x) = 0.$$

Se $a > 0$ e $f(x)x > 0$, $\forall x \neq 0$, então $0 \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de equilíbrio estável para o sistema de primeira ordem, construído a partir da equação acima.

Sugestão: Tome $V(x, y) = y^2 + 2\int_0^x f(s)ds$.

Resolução:

O sistema de primeira ordem é

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - f(x) \end{cases}$$

Agora observamos que como $f(x)x > 0$, então $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Logo $2\int_0^x f(s)ds > 0$ se $x \neq 0$. Logo $V(x, y) > 0$ se $(x, y) \neq 0$ e $V(0, 0) = 0$. Por fim,

$$\langle \nabla V(x, y), (y, -ay - f(x))\rangle = 2\langle (f(x), y), (y, -ay - f(x))\rangle = 2\left(f(x)y - ay^2 - yf(x)\right) = -2ay^2 \leq 0.$$

Vemos, assim, que V é uma função de Liapunov. Logo 0 é ponto de equilíbrio estável.

Exercício 15 (S.5.9)

Sejam $V : E \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $f : E \to \mathbb{R}^n$ dado por $f(x) = -\nabla V(x)$. Seja $\tilde{x} \in L_\omega(x)$ para algum $x \in E$. Mostre que $f(x) = 0$. (Analogamente, se $\tilde{x} \in L_\alpha(x)$ para algum $x \in E$, então $f(x) = 0$).

Sugestão: Mostre que V é constante em $L_\omega(x)$.

Resolução:

Faremos a hipótese usual de que $I(x) = \mathbb{R}$ para todo $x \in E$, para facilitar.

Seja $\tilde{x} \in L_\omega(x)$. Logo existe $t_n \to \infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi(t_n, x) = \tilde{x}$. Assim $V(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} V(\phi(t_n, x))$. Logo, existe $M > 0$ tal que para $t_n > M$, $V(\phi(t_n, x)) > V(\tilde{x}) - 1$.

Agora observamos que $t \in [0, \infty[\to V(\phi(t, x))$ é decrescente. Vamos mostrar que é limitado inferiormente. Se não fosse, existiria $\tilde{t} > M$ tal que $V(\phi(\tilde{t}, x)) < V(\tilde{x}) - 1$. Mas isto é um absurdo, pois se $t_n > \tilde{t}$, então

$$V(\phi(\tilde{t}, x)) < V(\tilde{x}) - 1 < V(\phi(t_n, x)),$$

contrariando o fato de V ser não crescente. Assim, $t \in [0, \infty[\to V(\phi(t, x))$ é decrescente e limitado inferiormente. Concluímos que existe $\lim_{t\to\infty} V(\phi(t, x))$. Como $V(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} V(\phi(t_n, x))$, concluímos que $\lim_{t\to\infty} V(\phi(t, x)) = V(\tilde{x})$.

Seja $\tilde{y}$ outro elemento de $L_\omega(x)$. Logo

$$V(\tilde{y}) = \lim_{t\to\infty} V(\phi(t, x)) = V(\tilde{x}).$$

Logo V é constante sobre $L_\omega(x)$.

Sabemos que $L_\omega(x)$ é um conjunto invariante, ou seja, $\phi(t, \tilde{x}) \in L_\omega(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$0 = \frac{d}{dt} V(\phi(t, \tilde{x}))\Big|_{t=0} = \langle \nabla V(\tilde{x}), f(\tilde{x})\rangle = -\|f(\tilde{x})\|^2.$$

Assim $f(\tilde{x}) = 0$.

Exercício 16 (S.5.5)

Seja x_0 um ponto singular de $x' = f(x)$, em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Seja V uma função C^1 definida numa vizinhança de x_0 tal que $\langle \nabla V(x), f(x)\rangle > 0$ para todo $x \neq x_0$ e $V(x_0) = 0$. Se em toda vizinhança de x_0 existe x tal que $V(x) > 0$, então x_0 é instável. Sugestão: Veja a demonstração do Teorema 5.17, capítulo 5, do livro do Sotomayor.

Resolução:

Suponha que x_0 seja estável. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\epsilon(x_0) \subset E$. Logo existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|\phi(t, x) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Seja $y \in B_\delta(x_0)$ tal que $V(y) > 0$. Como V é uma função contínua, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \tilde{\delta}$, então $V(x) < \frac{V(y)}{2}$. Como $t \mapsto V(\phi(t,y))$ é uma função crescente, pois $\frac{d}{dt}V(\phi(t,y)) = \langle \nabla V(\phi(t,y)), f(\phi(t,y))\rangle > 0$, concluímos que $t \mapsto \phi(t,y)$ está confinada na região $\overline{B_\epsilon(x_0)} \backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$. Seja $r := \min\left\{\langle \nabla V(x), f(x)\rangle\, ;\, x \in \overline{B_\epsilon(x_0)}\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)\right\}$. Logo $r > 0$ pela continuidade de $x \mapsto \langle \nabla V(x), f(x)\rangle$ e por esta função ser positiva no compacto $\overline{B_\epsilon(x_0)}\backslash B_{\tilde{\delta}}(x_0)$. Assim

$$V(\phi(t,y)) = V(y) + \int_0^t \frac{d}{ds}V(\phi(s,y))ds = V(y) + \int_0^t \langle \nabla V(\phi(s,y)), f(\phi(s,y))\rangle\, ds \geq V(y) + rt.$$

Logo $\lim_{t\to\infty} V(\phi(t,y)) = \infty$, ou seja, $t \mapsto V(\phi(t,y))$ não é uma função limitada para $t \geq 0$. Mas isto é um absurdo, pois V é contínua e, portanto, limitada em $\overline{B}_\epsilon(x_0)$. Além disso, $\phi(t,x) \in B_\epsilon(x_0)$, para todo $t \geq 0$. Logo $t \mapsto V(\phi(t,y))$ deveria ser uma função limitada para $t \geq 0$.

Concluímos assim que x_0 não é ponto de estabilidade estável, ou seja, é instável.

Exercício 17 (S.5.6)

Seja x_0 um ponto singular de $x' = f(x)$, em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $V : W \to \mathbb{R}$ uma função de Liapunov estrita de x_0. Então, para cada $c > 0$ tal que $V^{-1}([0,c])$ é compacto, tem-se $V^{-1}([0,c]) \subset B_f(x_0)$ (bacia de atração de x_0)

Resolução:

Seja $y \in V^{-1}([0,c])$. Queremos mostrar que $\lim_{t\to\infty}\phi(t,y) = x_0$. Suponha que isto não ocorra. Logo existe um $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $\|\phi(t_n,y) - x_0\| > \epsilon_0$. Como $V(y) \leq c$ e V é uma função de Liapunov estrita (portanto $t \mapsto V(\phi(t,y))$ é decrescente), concluímos que $\phi(t_n,y) \in V^{-1}([0,c])$ para todo n. Como $V^{-1}([0,c])$ é compacto, podemos passar para uma subsequência de t_n e assumir que $\phi(t_n,y)$ converge quando $n \to \infty$ (estamos denotando a subsequência como t_n mesmo, para facilitar). Seja $\tilde{y} = \lim_{n\to\infty}\phi(t_n,y)$. Logo $V(\tilde{y}) < V(\phi(t_n,y))$ para todo n. Como $t_n \to \infty$ e $t \mapsto V(\phi(t,y))$ é decrescente, concluímos que $V(\tilde{y}) < V(\phi(t,y))$, para todo $t \geq 0$. Além disso, como $\|\phi(t_n,y) - x_0\| > \epsilon_0$, para todo n, concluímos que $\tilde{y} \neq x_0$.

Sabemos que $V(\tilde{y}) > V(\phi(1,\tilde{y}))$, novamente por V ser uma função de Liapunov estrita e $\tilde{y}$ pertencer a $W\backslash\{x_0\}$. Por continuidade do fluxo ϕ e da função V, concluímos que existe uma vizinhança aberta Z de $\tilde{y}$ tal que

$$V(\tilde{y}) > V(\phi(1,z)),\ \ \forall z \in Z.$$

Mas para n suficientemente grande $\phi(t_n,y) \in Z$. Logo

$$V(\phi(1+t_n,y)) = V(\phi(1,\phi(t_n,y))) < V(\tilde{y}).$$

Isto é um absurdo, pois $V(\tilde{y}) < V(\phi(t,y))$ para todo $t \geq 0$. Logo $\lim_{t\to\infty}\phi(t,y) = x_0$.

Exercício 18 (S.5.12)

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. O ponto 0 é chamado de globalmente estável se for estável e $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$ para toda solução φ de $x' = f(x)$.

Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de Liapunov estrita para a equação acima em 0. Suponha que para cada $c > 0$ dado exista $R > 0$ tal que $\|x\| > R$ implica $V(x) > c$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Então, 0 é um ponto globalmente estável.

Resolução:

O ponto 0 é estável, pois existe uma função de Liapunov para f em 0, por hipótese.

Consideremos agora $x : I \to \mathbb{R}^n$ uma solução de $x' = f(x)$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(0) = x_0$.

Seja $c = V(x_0)$. Com as hipóteses do exercício, $V^{-1}([0,c])$ é compacto, pois é fechado, já que V é uma função contínua e $[0,c]$ é um conjunto fechado, e é limitado, pois existe R tal que se $\|x\| > R$, então $V(x) > c$, ou seja, $V^{-1}([0,c]) \subset \overline{B_R(0)}$ (bola fechada de raio R). Assim pelo resultado do exercício 17, concluímos que $V^{-1}([0,c]) \subset B_f(0)$, ou seja, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Como x é uma solução arbitrária, concluímos que 0 é ponto globalmente estável.

Exercício 19 (S.5.13)

Mostre que toda forma quadrática $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida positiva satisfaz à condição: dado $c > 0$, existe $R > 0$ tal que $|x| > R$ implica $V(x) > c$. Prove novamente que a origem é um ponto é globalmente estável para $x' = Ax$, onde A é um operador linear em $\mathbb{R}^n$ cujos autovalores têm parte real < 0.

Observação: Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da forma $q(x) = B(x,x)$, em que $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear ($B(\alpha x + y, z) = \alpha B(x,z) + B(y,z)$ e $B(z, \alpha x + y) = \alpha B(z,x) + B(z,y)$, para todo $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$) e simétrica ($B(y,z) = B(z,y)$, para todo $y,z \in \mathbb{R}^n$)

Resolução:

Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática definida positiva, ou seja, $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ uma forma bilinear simétrica tal que $V(x) = B(x,x)$. Seja $r := \inf\{V(x) : \|x\| = 1\}$. Sabemos que $r > 0$, pois

$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ é compacto, V é uma função contínua e $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Assim, se $x \neq 0$, temos

$$V(x) = V\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) = B\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}.\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 B\left(\frac{x}{\|x\|}.\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 V\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq r\|x\|^2.$$

Assim, dado $c > 0$, concluímos que se $\|x\| > \sqrt{\frac{c}{r}}$, então $V(x) > r\frac{c}{r} = c$.

Vamos agora provar que 0 é um ponto globalmente estavel. Para tanto, vamos definir a forma bilinear simétrica $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$B(x,y) = \int_0^\infty \left\langle e^{tA}x, e^{tA}y\right\rangle dt.$$

Observemos que B está bem definida, pois como todos os autovalores de A têm parte real negativa, sabemos que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-\tau t}$, para algum $C \geq 1$ e $\tau > 0$. Logo

$$\int_0^\infty \left|\left\langle e^{tA}x, e^{tA}y\right\rangle\right| dt \leq \int_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\| \left\|e^{tA}y\right\| dt \leq \left(\int_0^\infty C^2 e^{-2\tau t} dt\right) \|x\| \|y\| < \infty.$$

Por fim, verificar que B é bilinear e simétrico é simples.

Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a B, $V(x) = B(x,x)$. Logo V é definida positiva, pois $V(x) = B(x,x) = \int_0^\infty \left\langle e^{tA}x, e^{tA}x\right\rangle dt = \int_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^2 dt$. Assim $V(x) \geq 0$ e se $V(x) = 0$, então como $t \mapsto \left\|e^{tA}x\right\|^2$ é uma função contínua e positiva, vemos que $\int_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^2 dt = 0$ implica que $\left\|e^{tA}x\right\|^2 = 0$ para todo $t \in [0,\infty]$. Em particular, isto vale para $t = 0$, ou seja, $x = 0$. Concluímos que $V(x) > 0$, se $x \neq 0$.

Vamos agora verificar que V é uma função de Liapunov estrita. De fato,

$$\langle \nabla V(x), f(x)\rangle = \frac{d}{ds} V\left(x + sf(x)\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty \left\langle e^{tA}\left(x + sf(x)\right), e^{tA}\left(x + sf(x)\right)\right\rangle dt\Big|_{s=0} = 2\int_0^\infty \left\langle e^{tA}x, e^{tA}f(x)\right\rangle dt.$$

Como $f(x) = Ax$, concluímos que

$$\langle \nabla V(x), f(x)\rangle = 2\int_0^\infty \left\langle e^{tA}Ax, e^{tA}x\right\rangle dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\left\langle e^{tA}x, e^{tA}x\right\rangle\right) dt = \left\langle e^{tA}x, e^{tA}x\right\rangle\Big|_0^\infty = -\|x\|^2 < 0,$$

se $x \neq 0$. Assim V é uma função de Liapunov estrita que satisfaz as condições do exercício 18. Concluímos que a origem é um ponto globalmente estável.