DICAS E RESPOSTAS DA LISTA DE EXERCÍCIOS 4 EDO II - MAP 0316

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDO2

Os exercícios a seguir foram selecionados dos livros dos autores Claus Doering-Artur Lopes e Jorge Sotomayor. (S.X.Y) indica exercício Y do capítulo X do livro do Sotomayor. (D.L.X.Y) indica exercício Y do capítulo X do livro dos autores Claus Doering e Artur Lopes.

Nos exercícios abaixo f sempre denota um campo de classe C^1.

Exercício 1 (D.L.5.1)

Verifique para quais sistemas lineares $x' = Ax$, com $A \in M_2(\mathbb{R})$ em forma de Jordan, a origem é uma singularidade estável e para quais a origem é instável.

Resolução:

1) Seja

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Se λ_1 ou λ_2 for maior do que zero, a origem é uma singularidade instável. Se ambos forem estritamente menores do que zero, a origem é uma singularidade assintoticamente estável. Se forem menores ou iguais a zero e algum dos dois for igual a zero, então a origem é estável, mas não assintoticamente estável (indiferente).

2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Se $a > 0$, então é instável. Se $a < 0$, então é assintoticamente estável. Se $a = 0$, então é estável, porém não é assintoticamente estável (indiferente).

3)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda > 0$, então é instável. Se $\lambda < 0$, então é assintoticamente estável. Se $\lambda = 0$, então é instável.

Exercício 2 (D.L.5.2)

Mostre que a origem é sempre um ponto de equilíbrio instável para um sistema linear $x' = Ax$ definido por uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que tem pelo menos um autovalor complexo com parte real positiva.

Resolução:

Seja λ um autovalor com parte real positiva.

Suponha que λ seja um número real. Logo, dado uma vizinhança qualquer da origem, existe um vetor $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ contido nesta vizinhança tal que $Av = \lambda v$. Logo $e^{tA}v = e^{t\lambda}v$. Como $\lim_{t\to\infty} \left\| e^{t\lambda}v \right\| = \infty$, concluímos que $e^{tA}v$ não está contido em nenhuma vizinhança limitada de 0. Logo a origem é instável.

Suponha que $\lambda = a + ib$, em que $a > 0$ e $b \neq 0$. Seja $u + iv \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de λ. Assim

$$A(u + iv) = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu).$$

Logo

$$\begin{array}{c} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{array}.$$

Assim, podemos verificar explicitamente que $x(t) = \alpha e^{at}(cos(t)u + sen(t)v)$ é solução de $x' = Ax$ com $x(0) = \alpha u$, $\alpha > 0$. . Logo, dado uma vizinhança qualquer da origem, existe um número $\alpha > 0$ tal que αu pertence a esta vizinhança. Como $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$, concluímos que a imagem de $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto x(t)$ não está contida em nenhuma vizinhança limitada de 0. Logo a origem é instável.

Exercício 3 (D.L.5.3)

(a) Dê um exemplo de um campo com singularidade estável não isolada.

Resolução:

Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Assim as singularidades de $x' = Ax$ são $\{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, não são isoladas. No entanto, são estáveis. De fato, vamos mostrar que $(0, y_0)$ é uma singularidade estável. Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta < \epsilon$. Assim se $\|(x, y) - (0, y_0)\| < \delta$ e $t \geq 0$, então

$$\|\varphi(t, (x, y)) - (0, y_0)\| = \left\|\left(xe^{-t}, y\right) - (0, y_0)\right\| = \left\|\left(xe^{-t}, y - y_0\right)\right\| \leq \|(x, y - y_0)\| < \delta < \epsilon.$$

Acima φ denota o fluxo de $x' = Ax$.

(b) Dê uma condição para que um campo linear $x' = Ax$, com $A \in M_n(\mathbb{R})$, tenha a origem como singularidade isolada.

Resolução:

Vamos mostrar que a origem é isolada se, e somente se, A é uma matriz inversível.

Se A é inversível, então $Ax = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Logo 0 é a única singularidade e é, portanto, isolada.

Se A não é inversível, então, por ser matriz quadrada, não define uma transformação linear injetora de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Logo existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Assim o conjunto $\{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ está contido no conjunto do ponto de singularidades de A. Toda vizinhança da origem contém, desta forma, infinitas outras singularidades. Concluímos que 0 não é um ponto de singularidade isolado.

Exercício 4 (D.L.5.4)

Mostre que toda singularidade assintoticamente estável é uma singularidade isolada.

Resolução:

Suponha que x_0 seja um ponto de singularidade assintoticamente estável de $x' = f(x)$. Logo existe uma vizinhança aberta de x_0, W, tal que se $x \in W$, então $[0, \infty[\subset I(x)$ (ou seja, o fluxo está definido para todo os reais positivos se $x \in W$) e

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x) = x_0, \ \ \forall x \in W \qquad (*)$$

Logo a única singularidade que existe em W é o ponto x_0. De fato, se $\tilde{x} \in W$ é uma singularidade e $\tilde{x} \neq x_0$, então

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, \tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Isto contradiz a afirmação $(*)$. Concluímos que x_0 é uma singularidade isolada.

Exercício 5 (D.L.5.5)

Mostre que uma conjugação entre campos de vetores leva singularidades assintoticamente estáveis em singularidades assintoticamente estáveis.

Resolução:

Sejam $x' = f_1(x)$ e $x' = f_2(x)$, em que $f : E_1 \to \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}^n$ são campos de classe C^1. Seja $g : E_1 \to E_2$ uma conjugação (basta ser topológica) e x_0 uma singularidade assintoticamente estável de f_1. Denotemos por ϕ_1 o fluxo de f_1 e por ϕ_2 o fluxo de f_2.

Logo $y_0 = g(x_0)$ é uma singularidade assintoticamente estável. Vamos provar por partes:

1) O ponto y_0 é uma singularidade.

De fato,

$$\phi_2(t, y_0) = g\left(\phi_1(t, x_0)\right) = g(x_0) = y_0.$$

Logo $t \to \phi_2(t, y_0)$ é uma função constante. Assim $f_2(y_0) = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0, y_0) = 0$.

2) O ponto y_0 é uma singularidade estável.

Seja $U \subset E_2$ uma vizinhança de y_0. Logo $g^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x_0. Como x_0 é uma singularidade estável, podemos achar uma vizinhança aberta de x_0, $W \subset g^{-1}(U)$, tal que para todo $x \in W$, o fluxo está definido para todo $t \geq 0$ e

$$\phi_1(t, x) \in g^{-1}(U), \ \ \forall x \in W, \ \forall t \geq 0.$$

Assim seja $V := g(W)$. Logo V é uma vizinhança aberta de y_0 e $V = g(W) \subset g \circ g^{-1}(U) = U$. Além disso, se $x \in V$ e $t \geq 0$, então $g^{-1}(x) \in W$ e

$$\phi_2(t, x) = g\left(\phi_1\left(t, g^{-1}(x)\right)\right) \in g\left(g^{-1}(U)\right) \subset U.$$

Logo y_0 é estável.

3) O ponto y_0 é uma singularidade assintoticamente estável.

Como x_0 é assintoticamente estável, dado $U \subset E_2$, podemos escolher uma vizinhança aberta de x_0, $W \subset g^{-1}(U)$ que satisfaz as propriedades do item 2) acima e que satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \phi_1(t,x) = x_0, \ \forall x \in W.$$

Assim, se $x \in V = g(W)$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \phi_2(t,x) = \lim_{t\to\infty} g\left(\phi_1\left(t, g^{-1}(x)\right)\right) = g(x_0) = y_0,$$

em que usamos a constinuidade de g e g^{-1}.

Exercício 6 (D.L.5.6)

Mostre com um exemplo que se f é um campo de vetores não-linear tal que $Df(0) = 0$, é possível ter

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

para toda solução de $x' = f(x)$, sem que os autovalores de $Df(0)$ tenham parte real negativa.

Resolução:

Seja $x' = -x^3$. Logo $Df(0) = 0$. No entanto, se $x(0) > 0$, então

$$-\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{s^3} ds = t \implies \left.\frac{s^{-2}}{2}\right|_{x(0)}^{x(t)} = t \implies \frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{x(0)^2} = 2t.$$

Concluímos, assim, que

$$\frac{1}{x(t)^2} = 2t + \frac{1}{x(0)^2} \implies x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2t+\frac{1}{x(0)^2}}}, \, x(0) > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2t+\frac{1}{x(0)^2}}}, \, x(0) < 0 \end{cases}$$

Vemos assim, que as soluções estão definidas para todo $t \geq 0$. Seja agora dado um $\epsilon > 0$. Logo existe $\delta > 0$ (basta escolher $\delta < \epsilon$) tal que se $\|x\| < \delta$, então

$$\|\varphi(t,x)\| = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} \leq \|x\| < \delta < \epsilon.$$

Assim 0 é um ponto de equlíbrio estável. Por fim

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x) = \lim_{t\to\infty} \pm\frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Logo 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Exercício 7 (D.L.5.10)

Seja $f : E \to \mathbb{R}^3$ o campo de vetores dado por

$$f(\phi,\psi,\omega) = \left(\psi, \eta^2\omega^2 sen\phi cos\phi - gsen\phi - \frac{b}{m}\psi, \frac{k}{J}cos\phi - \frac{F}{J}\right),$$

com $E =]0, \frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R}\times]0,\infty[$. (Este campo aparece no problema do "regulador automático de pressão". Mais informações sobre a origem deste campo podem ser encontradas na seção 5.3 do livro do Artur Lopes e Claus Doering).

(a) Mostre que $f(\phi,\psi,\omega) = (0,0,0)$ se, e somente se, $kcos\phi = F$, $\psi = 0$ e $n^2\omega^2 cos\phi = g$. Denote a única singularidade de f em E por $(\phi_{0,}0,\omega_0)$.

Resolução: Vemos que $f(\phi,\psi,\omega) = (0,0,0)$, se e somente se,

$$\begin{array}{c} \psi = 0 \\ \eta^2\omega^2 sen\phi cos\phi - gsen\phi - \frac{b}{m}\psi = 0 \\ \frac{k}{J}cos\phi - \frac{F}{J} = 0 \end{array},$$

ou seja, $\psi = 0$, $kcos\phi = F$ e $\eta^2\omega^2 cos\phi - g = 0$. Note que $sen\phi \neq 0$, pois $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcule a matriz jacobiana $A = Df(\phi_0, 0, \omega_0)$ de f na singularidade.

Resolução:

Temos

$$Df(\phi,\psi,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta^2\omega^2 cos\phi cos\phi - \eta^2\omega^2 sen\phi sen\phi - gcos\phi & -\frac{b}{m} & 2\eta^2\omega sen\phi cos\phi \\ -\frac{k}{J}sen\phi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$Df(\phi_0, 0, \omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta^2\omega_0^2 cos\phi_0 cos\phi_0 - \eta^2\omega_0^2 sen\phi_0 sen\phi_0 - gcos\phi_0 & -\frac{b}{m} & 2\eta^2\omega_0 sen\phi_0 cos\phi_0 \\ -\frac{k}{J} sen\phi_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Mostre que

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{b}{m}\lambda^2 - \frac{gsen^2\phi_0}{cos\phi_0}\lambda - \frac{2kgsen^2\phi_0}{J\omega_0}$$

é o polinômio característico de A.
Resolução:
Basta calcular o determinante $\det(Df(\phi_0, 0, \omega_0) - \lambda I)$.
(d) Mostre que todos os autovalores de A têm parte real negativa se, e somente se,

$$\frac{bJ}{m} > \frac{2kcos\phi_0}{\omega_0} = \frac{2F}{\omega_0} = \frac{2kg}{n^2\omega_0^3}.$$

Resolução:
Basta observar que as raízes de $p(\lambda)$ são as raízes de $p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{b}{m}\lambda^2 + \frac{gsen^2\phi_0}{cos\phi_0}\lambda + \frac{2kgsen^2\phi_0}{J\omega_0}$. Logo devemos ter $a_2a_1 > a_0$. Assim

$$\frac{b}{m}\frac{gsen^2\phi_0}{cos\phi_0} > \frac{2kgsen^2\phi_0}{J\omega_0} \implies \frac{bJ}{m} > \frac{2k}{\omega_0}cos\phi.$$

As outras relações seguem das igauldades do item a).
(Sugestão: Use o seguinte resultado: Seja $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. Logo as raízes de p têm todas as partes reais negativas se, e somente se, $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ e $a_2a_1 > a_0$.

Exercício 8 (D.L.5.11)

Dizemos que um ponto de equilíbrio x_0 de um campo de vetores $f : E \to \mathbb{R}^n$ do aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ é uma fonte de f se a matriz $Df(x_0) \in M_n(\mathbb{R})$ tem todos autovalores generalizados com parte real positiva. Dizemos que o ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente instável se x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo oposto $-f$, cujas trajetórias coincidem com as de f exceto pelo sentido de percurso. Use o Teorema 5.3 para mostrar que se x_0 é uma fonte de f então x_0 é uma singularidade assintoticamente instável para f.

Resolução:

Basta observar que os autovalores de $-Df(x_0)$ são iguais a menos os autovalores de $Df(x_0)$. (De fato, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (-1)^n \det(-\lambda I + A) = (-1)^n p_{-A}(-\lambda)$. Ou seja, as raízes de p_A são iguais a -1 vezes as raízes de p_{-A}).

Assim, se x_0 é uma fonte de f, então os autovalores complexos de $Df(x_0)$ têm parte real positiva. Logo, os autovalores complexos de $-Df(x_0)$ têm autovalores complexos com parte real negativa. Assim x_0 é um poço para $-f$. Logo x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $-f$. Assim, é um ponto de equilíbrio assintoticamente instável para f.

Exercício 9 (D.L.5.14)

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz com todos autovalores de parte real estritamente menor que um número real α negativo. Mostre que existe um $t_0 > 0$ tal que para toda solução x de $x' = Ax$ temos

$$\|x(t)\| \le e^{t\alpha},$$

para todo $t > t_0$.

Resolução:

Sabemos que a solução $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ é tal que $x_j(t)$ é combinação linear de termos $t^j cos(bt)e^{at}$ e $t^j sen(bt)e^{at}$, em que $a + bi$ são os autovalores de A. Sabemos que $a < \alpha$ para todo autovalor $a + ib$ de A. Logo

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}t^j cos(bt)e^{at} = \lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}t^j sen(bt)e^{at} = 0.$$

Isto implica que $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}x_j(t) = 0$, para todo $j = 1, ..., n$. Assim $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}x(t) = 0$ e, portanto, $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}\|x(t)\| = 0$. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, $e^{-t\alpha}\|x(t)\| \le 1$, ou seja,

$$\|x(t)\| \le e^{t\alpha},$$

para $t > t_0$.

Exercício 10 (D.L.5.18)

Classifique (estável, assintoticamente estável, instável, indiferente, isolado) o comportamento do campo linear A na origem, nos casos seguintes:

(a) $0 \in M_n(\mathbb{R})$

Resolução: As soluções são constantes. Logo todos os pontos são estáveis e as singularidades não são isoladas.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução: As singularidades são $\{(x, 0);\, x \in \mathbb{R}\}$. Logo não são isoladas. As soluções do problema são $(x(t), y(t)) = (x_0 + ty_0, y_0)$. Os pontos de equilíbrio não são estáveis. De fato seja $(x_0, 0)$ um ponto de equilíbrio. Logo, dada uma vizinhança de $(x_0, 0)$, esta vizinhança deve conter um elemento da forma (x_0, y_0) para um $y_0 \neq 0$ suficientemente pequeno. Porém $\lim_{t\to\infty} \|(x_0 + ty_0, y_0) = \phi(t, (x_0, y_0))\| = \infty$ (ϕ denota o fluxo da EDO em questão). Logo a solução não está confinada a um aberto limitado. Logo $(x_0, 0)$ não é uma singularidade estável.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resolução:

Os autovalores são -3 e 2. Logo a origem é a única singularidade e, assim, ela é isolada. Como $2 > 0$, a singularidade é instável, pelo exercício 2.

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução:

As singularidades são $\{(0, 0, z);\, z \in \mathbb{R}\}$. As soluções são da forma $x(t) = cos\left(\sqrt{3}t\right) v_1 + sen\left(\sqrt{3}t\right) v_2 + z_0\hat{k}$, em que v_1 e v_2 são vetores em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Para concluir isto, basta observar que os autovalores são $\pm i\sqrt{3}$ e 0. Com esta expressão é fácil demonstrar que as singularidades são estáveis, porém não são assintoticamente estáveis (são indiferentes).

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Resolução:

A origem é a única singularidade. Portanto ela é isolada. As soluções são da forma $x(t) = cos\left(\sqrt{3}t\right) v_1 + sen\left(\sqrt{3}t\right) v_2 + z_0 e^{-t}\hat{k}$, em que v_1 e v_2 são vetores em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Para concluir isto, basta observar que os autovalores são $\pm i\sqrt{3}$ e -1. Com esta expressão é fácil demonstrar que a origem é estável, porém não é assintoticamente estáveis (é indiferente).

(f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução:

A origem é a única singularidade. Ela é instável, pois os autovalores são $\pm i$ e ± 1. Como $1 > 0$, basta usar o exercício 2.

(g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução:

Novamente a origem é a única singularidade. Ela é instável, pois os autovalores são $\pm i$ e ± 1. Como $1 > 0$, basta usar o exercício 2.

Exercício 11 (D.L.5.20)

(a) Resolva a equação não-linear de primeira ordem $r' = r\left(1 - r^2\right)$.

Resolução:

Temos

$$\int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{\xi\left(1 - \xi^2\right)} = t - t_0.$$

Resolvendo a integral obtemos o resultado dado em sala de aula.

(b) Obtenha explicitamente o fluxo do campo não-linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(x_1, x_2) = \left(x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right), -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right).$$

(Sugestão: mude para coordenadas polares e use o item anterior)

Resolução:

Seja $r' = r\left(1-r^2\right)$ e $\theta' = 1$. Façamos a mudança de variáveis $x_1 = rsen\theta$ e $x_2 = rcos\theta$. Logo

$$x' = sen\theta r' + rcos\theta\theta' = rsen\theta - rsen\theta r^2 + rcos\theta = x_1 - x_1 r^2 + x_2 = x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + x_2$$
$$y' = cos\theta r' - rsen\theta\theta' = rcos\theta - rcos\theta r^2 - rsen\theta = x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) - x_1$$

Vemos assim que o sistema dado por f é conjugado ao sistema do item a com a conjugação $g^{-1}(r,\theta) = (rsen\theta, rcos\theta)$.

(c) Esboce o retrato de fase do campo não-linear f do item anterior.

Resolução:

Ver nas anotações de sala de aula ou no livro do Artur Lopes e Claus Doering.

Exercício 12 (D.L.5.21)

(a) Obtenha a expressão cartesiana do campo de vetores $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que corresponde, em coordenadas polares, ao sistema

$$\begin{cases} \theta' = 1 \\ r' = \psi(r) \end{cases},$$

onde $\psi(0) = 0$ e, para $r > 0$, $\psi(r) = r^2 sen\left(\frac{1}{r}\right)$.

Resolução:

Seja $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$.

Logo

$$x' = cos\theta r' - rsen\theta\theta' = rcos\theta rsen\left(\frac{1}{r}\right) - rsen\theta = x\sqrt{x^2+y^2}sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y$$
$$y' = sen\theta r' + rcos\theta\theta' = rsen\theta rsen\left(\frac{1}{r}\right) + rcos\theta = x\sqrt{x^2+y^2}sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x.$$

Assim concluímos que

$$f(x,y) = \left(x\sqrt{x^2+y^2}sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y, x\sqrt{x^2+y^2}sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x\right).$$

(b) Mostre que em cada vizinhança da origem existe uma órbita periódica de f envolvendo a origem.

Resolução:

Basta observar que $r = \frac{1}{n\pi}$ e $\theta = t$ é solução. Assim $(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{n\pi}cos(t), \frac{1}{n\pi}sen(t)\right)$ é solução. Para toda vizinhança de 0, basta ecolher n suficientemente grande tal que $\overline{B_{\frac{1}{n\pi}}(0)}$ esteja contido na vizinhança. Isto implicará que a solução também está contida na vizinhança.

(c) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio estável para f.

Resolução: Seja $\epsilon > 0$. Escolho $\delta = \frac{1}{n\pi} < \epsilon$. Logo se $(x,y) \in B_\delta(0)$, então $\phi(t,(x,y)) \in B_\delta(0)$ para todo $t \geq 0$. De fato, se isto não for verdade, então existe $\tilde{t}$ tal que $\phi(\tilde{t},(x,y)) \in \partial B_\delta(0)$. Como $\partial B_\delta(0)$ é uma órbita e duas órbitas se cruzam se, e somente se, são iguais, isto implica que $(x,y) = \phi(0,(x,y)) \in \partial B_\delta(0)$. Mas isto é um absurdo. Logo a solução fica confinada dentro da bola $B_\delta(0)$. Em particular, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (não tem como sair do compacto $\overline{B_\delta(0)}$.

Exercício 13 (D.L.5.22)

Um a partícula move-se numa reta sob a influência de uma força newtoniana que depende somente da posição da partícula. Mostre que se a força é exercida na direção de $0 \in \mathbb{R}$ e é nula em 0, então a origem é um ponto de equilíbrio estável para o sistema mecânico. (Sugestão: estude a energia total do sistema)

Resolução:

Temos

$$\begin{array}{c} x'(t) = y \\ y'(t) = \frac{1}{m}F(x) \end{array} \implies \begin{array}{c} x'(t) = y \\ y'(t) = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}(x) \end{array}.$$

Sabemos que $E_T(x,y) = \frac{m}{2}y^2 + V(x)$ é constante e que $V(x) = -\int_0^x F(s)ds$. Logo $V'(x) = -F(x)$. Assim como $F(x) < 0$, se $x > 0$ e $F(x) > 0$, se $x < 0$, concluímos que V é estritamente crescente se $x > 0$, e V é estritamente decrescente se $x < 0$.

Para mostrar que $(0,0)$ é uma singularidade estável, basta agora ver que quanto menor a energia, mais próximo a solução está na origem. Basta agora formalizar o argumento.

Exercício 14 (D.L.5.23)

Sejam $f : E \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores e $x_0 \in E$ uma singularidade de f. Sabemos que se todos os autovalores generalizados de $Df(x_0) \in M_n(\mathbb{R})$ têm parte real negativa então existe uma vizinhança U de x_0 em E tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$, para qualquer solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(x)$, com $x(0) \in U$. Verifique se a recíproca é válida.

Resolução:

Não. A recíproca não é válida. Já vimos no exercício 6 que a origem de $x' = -x^3$ tem esta propriedade: Na verdade, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ para toda solução da EDO. No entanto, $Df(0) = -3x^2\big|_{x=0} = 0$. Logo o único autovalor complexo da matriz 1×1 $Df(0)$ é 0. Logo não tem parte real negativa.

Para um exemplo em $\mathbb{R}^2$, basta considerar

$$(x', y') = \left(-x^3, -y^3\right).$$

Exercício 15 (S.5.4)

Considere o sistema

$$x' = A(t)x + g(x), \;\; 0 \le t < +\infty, \; |x| < b, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

em que $A : [0, \infty[\to M_n(\mathbb{R})$ e $g : \{x \in \mathbb{R}^n, \; |x| < b\} \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas e $g(x) = o(|x|)$. Seja $t \mapsto \Phi(t)$ a matriz fundamental de $x' = A(t)x$ tal que $\Phi(0) = I$. Suponha que existam $K > 1$ e $\mu > 0$ tais que $\left\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\right\| \le Ke^{-\mu(t-s)}$, $t, s \ge 0$. Logo $x(t) \equiv 0$ é uma solução estável.

Resolução:

Repita os argumentos do livro do Sotomayor. Cap. 5.