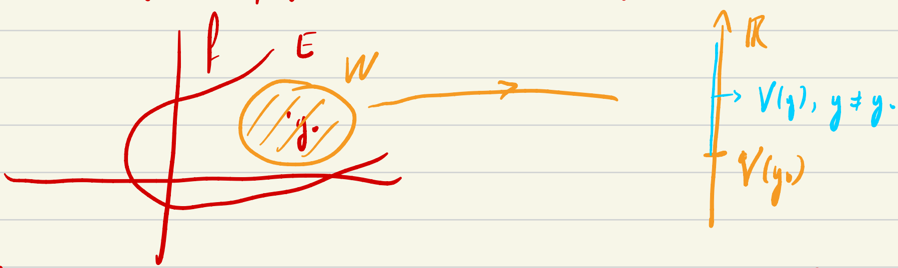
ONTEM: $f: E \to \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1 E y_0 SINGULARIDADE.

$V: W \to \mathbb{R}$ É LYAPUNOV DE f EM y_0 SE $y_0 \in W \overset{ab}{\subset} E$ E

1) V É CONTÍNUA, $V(y_0) = 0$ E $V(y) > 0$ SE $y \neq y_0$

2) SE $y'(t) = f(y(t))$, ENTÃO $t \mapsto V(y(t))$ É NÃO-CRESCENTE



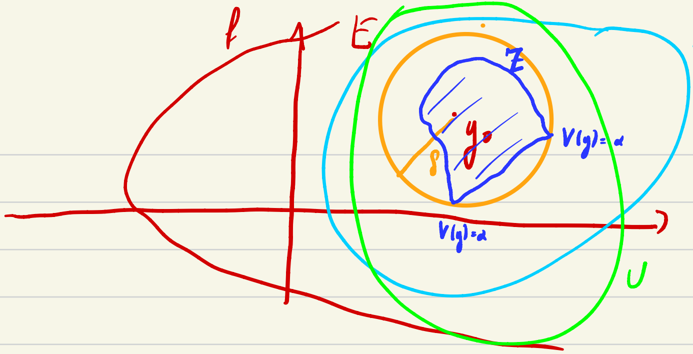
VIMOS SE V É DIFERENCIÁVEL $2 \Leftrightarrow \langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leq 0$, $\forall y \in W$.

<u>TEOREMA</u> (LIAPUNOV I). SEJA $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CAMPO DE VETORES C^1 E y_0 UMA SINGULARIDADE. SE EXISTE FUNÇÃO DE LYAPUNOV PARA f EM y_0, ENTÃO y_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

<u>DEMO:</u> SEJA $V: W \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO DE LYAPUNOV PARA f EM y_0. ($y_0 \in W$, $W \overset{ab}{\subset} E$).

DADO UM ABERTO U T.Q. $y_0 \in U \subset E$, <u>VAMOS MOSTRAR QUE $\exists$ UM ABERTO $Z \subset U$, $y_0 \in Z$, T.Q. $\phi_t(x) \in U$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in Z$</u>

$\Leftrightarrow$ y_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL



$V(y) < \alpha, \ \forall y \in Z$

Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{B(y_0,\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |y_0 - x| \leq \delta\} \subset U \cap W$

Seja $\alpha := \min\limits_{|x-y_0|=\delta} V(x) > 0$ $\big(V(x) > 0,\ x \neq y_0,\ V$ é contínua, $\partial B(y_0,\delta)$ é compacta$\big)$.

↳ é o mínimo em $\partial B(x_0,\delta)$

Vamos definir $Z := \{x \in B(y_0,\delta) ;\ V(x) < \alpha\}$. Como $V(y_0) = 0 < \alpha$ e $y_0 \in B(y_0,\delta) \Rightarrow Z$ é um aberto em U que contém y_0.

Seja $x \in Z$. Queremos mostrar que $\phi_t(x) \in \overline{B(x_0,\delta)} \subset U$, $\forall t \geq 0$. Suponha que $\exists\ t^*$ t.q. $\phi_{t^*}(x) \in \overline{B(x_0,\delta)}$. Logo

como $t \mapsto \|\phi_t(x) - y_0\|$ é contínua e $\|\phi_0(x) - y_0\| < \delta$, $\|\phi_{t^*}(x) - y_0\| > \delta$, logo $\exists\ 0 < \tilde{t} < t^*$ t.q. $\|\phi_{\tilde{t}}(x) - y_0\| = \delta$

Logo $\alpha \leq V(\phi_{\tilde{t}}(x)) \leq V(\phi_0(x)) = V(x) < \alpha$

$\phi_{\tilde{t}}(x) \in \partial B(x_0,\delta)$

$\alpha = \min\limits_{y \in \partial B(x_0,\delta)} V(y)$

V é não crescente

$\phi_0(x) = x$

$x \in Z$ e em Z, $V(y) < \alpha$, $\forall y \in Z$

$\Longrightarrow \alpha < \alpha$ ABSURDO, Concluímos que $\phi_t(x) \in \overline{B(x_0,\delta)} \subset U$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in Z$ ∎

EXEMPLOS 1) Se x_0 é mínimo local estrito da energia potencial de um sistema mecânico conservativo, então $(x_0, 0)$ é ponto de equilíbrio estável do sistema.

$$\begin{pmatrix} x' = y \\ y' = \frac{1}{m}F(x) = -\frac{1}{m}\nabla U(x) \\ f(x,y) = \left(y, -\frac{1}{m}\nabla U(x)\right) \end{pmatrix}$$

São equilíbrios estáveis (com velocidade 0).

EXEMPLO 2)
$$\begin{cases} x_1' = 2x_2(x_3 - 1) \\ x_2' = -x_1(x_3 - 1) \\ x_3' = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1', x_2', x_3') = \underbrace{(\overbrace{2x_2x_3 - 2x_2}^{f_1}, \overbrace{-x_1x_3 + x_1}^{f_2}, \overbrace{-x_3}^{f_3})}_{f(x_1,x_2,x_3)}$$

O que sabemos sobre a singularidade $(0,0,0)$?

1º Método) Vamos calcular $Df(0,0,0)$ e seus autovalores.

$$Df(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_3 - 2 & 2x_2 \\ -x_3 + 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda^2 + 2)(\lambda + 1)$$

AUTOVALORES -1, $\sqrt{2}\,i$, $-\sqrt{2}\,i$

$\sqrt{2}\,i$, $-\sqrt{2}\,i$ → PARTE REAL $= 0$

NÃO CONCLUÍMOS NADA!

RECORDAÇÃO: $\underbrace{y'(t) = y(t)^3}_{f_1(y)}$ INSTÁVEL, $\underbrace{y'(t) = -y(t)^3}_{f_2(y)}$ ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

TEMOS $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, MAS INSTÁVEL

LOGO SE Df TEM AUTOVALORES COM PARTE REAL ZERO, NÃO PODEMOS CONCLUIR NADA.

2º MÉTODO: VAMOS TENTAR ACHAR FUNÇÃO DE LIAPUNOV

VAMOS TENTAR ALGO DO TIPO $V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, $a>0, b>0, c>0$.

TEMOS QUE $V(0,0,0) = 0$ E $V(x_1, x_2, x_3) > 0 = V(0,0,0)$, SE $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$.

BASTA MOSTRAR QUE $\langle \nabla V(x_1,x_2,x_3), f(x_1,x_2,x_3) \rangle \leq 0$ NUM ABERTO QUE CONTÉM $(0,0,0)$.

$$\langle \nabla V(x_1,x_2,x_3), f(x_1,x_2,x_3) \rangle = \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), (2x_2x_3 - 2x_2, -x_1x_3 + x_1, -x_3) \rangle$$

$$= 4ax_1x_2x_3 - 4ax_1x_2 - 2bx_1x_2x_3 + 2bx_1x_2 - 2cx_3^2.$$

$$= \underbrace{(4a - 2b)}_{a=1,\ b=2} x_1x_2x_3 - \underbrace{(4a-2b)}_{a=1,\ b=2} x_1x_2 - \underbrace{2c}_{c=1} x_3^2. = -2x_3^2 \leq 0.$$

CONCLUSÃO: ESCOLHENDO $a=1, c=1, b=2$.

$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$, TEMOS QUE

$\langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle = -2x_3^2 \leq 0 \Rightarrow V$ É FUNÇÃO DE LIAPUNOV!

$\Rightarrow$ $\boxed{(0,0,0) \text{ É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL}}$

EXEMPLO 3 $mx'' = -kx$ MOLA SEM ATRITO.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{k}{m}x \end{cases} \qquad (x', y') = \left(y, -\frac{k}{m}x\right) = f(x,y)$$

VAMOS MOSTRAR QUE $(0,0)$ É EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

DEFINE $V(x,y) = \frac{m}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2$ ENERGIA.

1) $V(0,0) = 0$ E $V(x,y) > 0$ SE $(x,y) \neq (0,0)$.

2) $\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle = \langle \underbrace{(kx, my)}_{\nabla V}, \underbrace{\left(y, -\frac{k}{m}x\right)}_{f} \rangle = kxy - m\frac{k}{m}yx = 0$.
≤ 0.

V É FUNÇÃO DE LIAPUNOV $\Rightarrow$ $(0,0)$ É EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

Funções de Liapunov estritas (e pontos ass. estáveis).

Definição: Seja $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $y_0 \in E$ uma singularidade ($f(y_0) = 0$). Uma função de Liapunov estrita $V: W \to \mathbb{R}$ para f em y_0 é uma função contínua em $W \overset{ab}{\subset} E$, $x_0 \in W$, diferenciável em $W \setminus \{x_0\}$ e tal que

1) $V(y_0) = 0$ e $V(y) > 0$, se $y \in W \setminus \{y_0\}$

2) $\frac{d}{dt}(V(y(t))) < 0$ para toda solução $y: I \to W$ de $y'(t) = f(y(t))$.

Observação: 2) $\iff \langle \nabla V(y), f(y) \rangle < 0$, $\forall y \in W$, pois

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(V(y(t)))}_{<0} = \langle \nabla V(y(t)), y'(t) \rangle = \underbrace{\langle \nabla V(y(t)), f(y(t)) \rangle}_{<0}$$

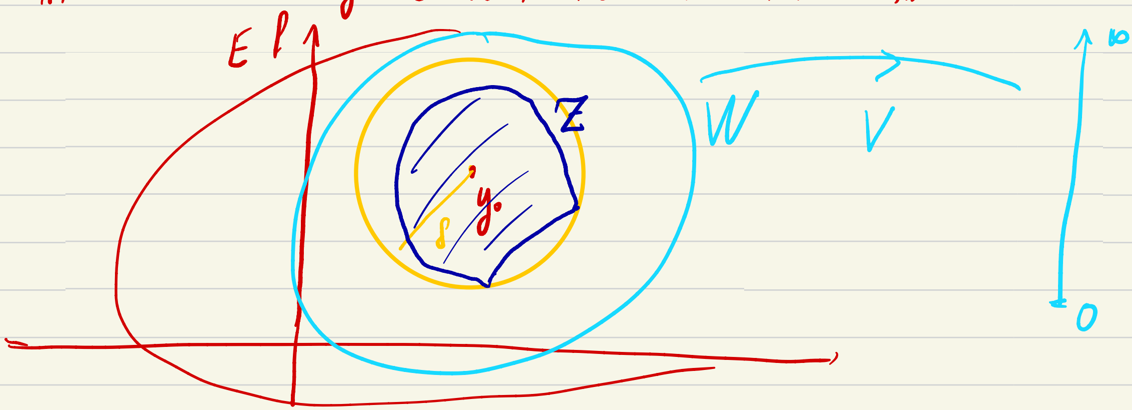
Importante: Se $V: W \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $V(y_0) = 0$, $V(y) > 0$, $y \neq y_0$,

então $\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leq 0 \Rightarrow V$ é Liapunov

$\langle \nabla V(y), f(y) \rangle < 0 \Rightarrow V$ é Liapunov estrita.

Teorema Liapunov II: Seja $f: E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e y_0 uma singularidade de f. Se existe uma função de Liapunov estrita para f em y_0, então y_0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Demo: Uma função de Liapunov estrita é uma função de Liapunov. Logo y_0 é ponto de equilíbrio estável.



$$Z = \{ x \in B(x_0, \delta);\ V(x) < \alpha \}, \quad \alpha := \min_{\|x - y_0\| = \delta} V(x)$$

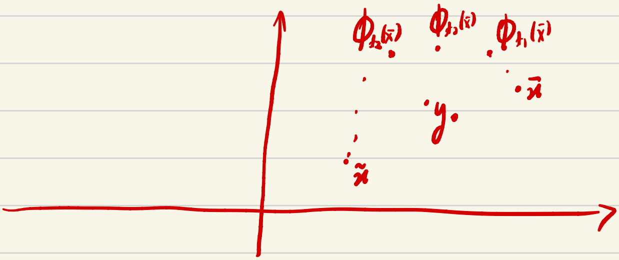
Vimos que se $x \in Z$ e $t \geq 0$, então $\phi_t(x) \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Agora vamos mostrar que se $x \in Z$, então $\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = y_0$

Vamos supor que $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t(\bar{x})$ não seja igual a y_0 para algum $\bar{x} \in Z$ (ou o limite não existe ou converge para outro ponto).

Como não vale $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t(\bar{x}) = y_0$, então $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ e $\{t_n > 0\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \to \infty$, t.q. $\|\phi_{t_n}(\bar{x}) - y_0\| > \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $\phi_{t_n}(\bar{x}) \in \overline{B(y_0,\delta)}$. Como $\overline{B(y_0,\delta)}$ é compacto, então $\exists$ uma subsequência $\phi_{t_{n_j}}(\bar{x})$ que converge para $\tilde{x} \in \overline{B(x_0,\delta)}$. (É claro que $\|\tilde{x} - y_0\| > \varepsilon_0$).



Sabemos que $t \mapsto V(\phi_t(\bar{x}))$ é decrescente e limitada inferiormente (>0). Como $V(\tilde{x}) = \lim\limits_{j\to\infty} V(\phi_{t_{n_j}}(\bar{x}))$, então

$$V(\tilde{x}) < V(\phi_t(\bar{x})), \quad \forall t \geq 0 \qquad (*)$$

Em particular $V(\tilde{x}) < \alpha$, pois $V(\bar{x}) < \alpha$.

SABEMOS QUE $V(\tilde{x}) = V(\phi_0(\tilde{x})) > V(\phi_1(\tilde{x}))$

V DECRESCE ESTRITAMENTE

COMO ϕ_1 E V SÃO CONTÍNUAS, ENTÃO $\exists$ UM ABERTO $Y \subset Z$ T.Q

$\tilde{x} \in Z$ E $V(\tilde{x}) > V(\phi_1(y))$, $\forall y \in Z$

MAS SE j É GRANDE ENTÃO $\phi_{t_{n_j}}(\bar{x}) \in Z$. LOGO

$$V(\tilde{x}) > V(\phi_1(\phi_{t_{n_j}}(\bar{x}))) = V(\phi_{t_{n_j}+1}(\bar{x}))$$

CONTRADIÇÃO COM (*)

LOGO $\lim_{t \to \infty} \phi_t(\bar{x}) = y_0$ $\boxed{}$

<u>EXEMPLO 1)</u>
$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2 & \longleftrightarrow f_1 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2 & \longleftrightarrow f_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ É SINGULARIDADE. O QUE SABEMOS SOBRE ELA?

<u>1º MÉTODO</u> CALCULAMOS $Df(0,0)$ E SEUS AUTOVALORES.

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2(x+y)^2 + 4x(x+y) & 4x(x+y) \\ 4y^3(x+y) & -3y^2 + 6y^2(x+y)^2 + 4y^6(x+y) \end{pmatrix}$$

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ AUTOVALORES -1 E $\underline{0}$

NÃO CONCLUÍMOS NADA!

$2^{\underline{o}}$ MÉTODO: FUNÇÃO DE LIAPUNOV.

SEJA $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DADA POR $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

1) $V(0,0) = 0$, $V(x,y) > 0$, SE $(x,y) \neq (0,0)$

2) $\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle = \langle (x,y), (-x + 2x(x+y)^2, -y^3 + 2y^3(x+y)^2) \rangle$

$= -x^2 + 2x^2(x+y)^2 - y^4 + 2y^4(x+y)^2$

$= -(x^2 + y^4) + 2(x^2 + y^4)(x+y)^2$

$= (x^2 + y^4)\left[2(x+y)^2 - 1\right] < 0$ SE $(x+y)^2 < \frac{1}{2}$

$(x,y) \in B((0,0), \frac{1}{4})$.

$\Rightarrow V\big|_{B(0,\frac{1}{4})}$ É LIAPUNOV ESTRITA

$\Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL}}$