Aula 5 - EDO-PVI

Ardson dos S. Vianna Jr.

Departamento de Engenharia Química - USP

10 de fevereiro de 2021

1. Sumário
2. Introdução
3. Euler explícito
4. Estabilidade A
5. Conclusões

Introdução

As equações diferenciais ordinárias com problema de valor inicial (EDO-PVI) podem ser representadas por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad em \quad x = 0 \quad y = y_0 \tag{1}$$

Introdução

- A taxa de variação da propriedade y com relação a x é conhecida. A interpretação geométrica disso é que a tangente no ponto é conhecida.

- $A \rightarrow$ produtos que pode seguir diversas leis
$$\frac{dA}{dt} = -k\ C_A^n \quad em\ t = 0, C_A = C_A^0$$

- Encontrar uma sequencia de pares ordenados (x_i, y_i) usando o valor da derivada, que é conhecida ($\frac{dy}{dx}$ da EDO), e ir traçando pequenas retas.

Euler - geração

O método de Euler explícito é resultado do truncamento da série de Taylor:

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\frac{g'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2\frac{g''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3\frac{g'''(x_0)}{3!} + \ldots + (x - x_0)^{(n+1)}\frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Euler - geração

Truncando no segundo termo:

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\frac{g'(x_0)}{1!} \tag{2}$$

A relação matemática é obtida a partir da atribuição de variáveis:

$x \leftarrow x_{i+1} \qquad x_0 \leftarrow x_i$

Na série de Taylor:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + (x_{i+1} - x_i)g'(x_i)$$

Euler - geração

Identificando cada termo:

- $u(x_{i+1})$ e $u(x_i)$ são os valores das estimativas, solução para y, chamamos de u_{i+1} e u_i
- $x_{i+1} - x_i$ é o tamanho de passo h escolhido pelo usuário
- $g'(x_i)$ é a derivada da função, que é o valor conhecido apresentado pelo problema (eq.1). Logo, $g'(x_i) = f(x_i, u_i)$

A fórmula final do Euler explícito é:

$$u_{i+1} = u_i + h\ f(x_i, u_i) \tag{3}$$

Euler, exemplo

Resolva com Euler explícito a EDO $\dfrac{dy}{dx} = 1 \; + \; x^2 \; y^2$ com condição inicial em x=0, $y_0 = 1$

Se pontos igualmente espaçados: $x_i = x_0 + i \; h$

Escolhendo h=0,1: $x_i = 0 + i \; 0,1 \quad \rightarrow \quad x_i = 0; 0,1; 0,2, \ldots, 1$

Aplicando a fórmula de Euler vem:
$u_{i+1} = u_i + \; h \; f(x_i, u_i) \quad \rightarrow \quad u_{i+1} = u_i + \; h \; (1 - x_i^2 u_i^2)$
para $i = 0 \;\rightarrow\; u_1 = \; 1 + \; 0,1 \; (1 - 0^2 \; 1^2) = 1,1$
para $i = 1 \;\rightarrow\; u_2 = \; 1,1 + 0,1 \; (1 - 0,1^2 \; 1,1^2) = 1,198790$
para
$i = 2 \;\rightarrow\; u_3 = \; 1,198790 + 0,1 \; (1 - 0,2^2 \; 1,198790^2) = 1,293042$

estabilidade do Euler explícito

Análise de estabilidade por equação com solução conhecida:

Esta EDO possui solução analítica:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \lambda dx \quad \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \lambda dx \quad \rightarrow \quad ln(y) = \lambda\ x\ +\ c^{te} \quad \rightarrow \quad e^{ln(y)} = e^{[\lambda\ x\ +\ c^{te}]}$$

que gera a solução geral: $y(x) \ = \ c\ e^{\lambda\ x}$

Aplicando a condição inicial: $y(0) \ = \ c\ e^{\lambda\ 0} \quad \rightarrow \quad y_0 = c\ e^0$

$$y(x) \ = \ y_0\ e^{\lambda\ x} \quad \rightarrow \quad y(x) \ = \ y_0\ e^{\ [\lambda\ (x_0 + i\ h)]} \tag{4}$$

estabilidade do Euler explícito

Agora chegou a hora de avaliar o algoritmo. O método de Euler explícito é:

$$u_{i+1} = u_i \; + \; h \; f(x_i, u_i)$$

Aplicando ao problema aqui apresentado:

$$u_{i+1} = u_i \; + \; h \; u_i \quad \rightarrow \quad u_{i+1} = \; (1 \; + \; h \; \lambda) \; u_i$$

para $i = 0 \;\rightarrow\; u_1 = \; (1 \; + \; h \; \lambda) \; u_0$

para $i = 1 \;\rightarrow\; u_2 = \; (1 \; + \; h) \; u_1 = \; (1 \; + \; h \; \lambda)^2 \; u_0$

$\vdots$

para $i = n \;\rightarrow\; u_{n+1} = \; (1 \; + \; h \; \lambda)^n \; u_0$

estabilidade do Euler explícito

Diferença do valor verdadeiro e o valor estimado:

$$e_{i+1} = y_{i+1} - u_{i+1}$$

Substituindo pelos valores para esse caso:

$$e_i = y_0 \, e^{[\lambda \, (x_0+(i+1) \, h)]} - (1 + h \, \lambda)^{i+1} \, u_0$$

$$e_i = (e_0 - u_0) \, e^{[\lambda \, (x_0+(i+1) \, h)]} - (1 + h \, \lambda)^{i+1} \, u_0$$

$$e_i = y_0 \, e^{[\lambda \, (x_0+(i+1) \, h)]} - (1 + h \, \lambda)^{i+1} \, (y_0 - e_0)$$

$$e_i = \underbrace{y_0 \, \{e^{[\lambda \, (x_0+(i+1) \, h)]} - (1 + h \, \lambda)^{i+1} \}}_{termo\ 1} + \underbrace{(1 + h \, \lambda)^{i+1} \, e_0}_{termo\ 2}$$

estabilidade do Euler explícito

O termo 1 é o erro associado ao truncamento da série.
O termo 2 é o erro de arredondamento que acumula a cada passo de integração h. . Daí vem o critério para convergência:

$$|1 + h\,\lambda| \leq 1 \quad \rightarrow \quad -1 \leq 1 + h\,\lambda \leq 1 \quad \rightarrow \quad -2 \leq h\,\lambda \leq 0$$

- $h\,\lambda \leq 0$ como o tamanho de passo h é maior que zero, λ tem de ser menor que zero para haver convergência
- $-2 \leq h\,\lambda$, como $\lambda < 0$, ao dividir inverte a desigualdade: $h < \dfrac{2}{|\lambda|}$

Para valores de $|\lambda|$ maiores, menores deverão ser os tamanhos de passo. Diz-se que o método é **condicionalmente estável**.

Conclusões

i. EDO-PVI
ii. Euler - truncando a serie de Taylor
iii. Estabilidade

Bibliografia

M.E. Davis, *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers*, John Wiley & Sons, 1984.

R.G. Rice, D.D. Do, *Applied Mathematics and modeling for Chemical Engineers*, 2nd edition, Wiley-AIChE,2012.